

## Fractions rationnelles - Décomposition en éléments simples

## ■ Des calculs pour s'entraîner.

**Exercice 310.** On considère les fractions rationnelles suivantes :

$$F_1 = \frac{1}{X^2(X-1)(X^2+1)} \quad F_2 = \frac{X^4 - X^2 + 1}{(X-i)^3} \quad F_3 = \frac{16X}{(X^2+1)^3}$$

$$F_4 = \frac{8}{(X^2-1)^2(X^2+1)} \quad F_5 = \frac{1}{(X+1)^2(X^2+X+1)}$$

Chercher la décomposition en éléments simples :

1. de  $F_1$  sur  $\mathbb{R}$  puis sur  $\mathbb{C}$ .
2. de  $F_2$  sur  $\mathbb{C}$  en appliquant la formule de Taylor polynomiale.
3. de  $F_3$  sur  $\mathbb{C}$  et de  $F_4$  sur  $\mathbb{R}$  après avoir étudié la parité des fractions.
4. de  $F_5$  sur  $\mathbb{C}$  puis sur  $\mathbb{R}$ .

Réponse :  $F_1 = -\frac{1}{X} - \frac{1}{X^2} + \frac{1}{2} \frac{1}{X-1} + \frac{1}{2} \frac{X+1}{X^2+1} = \dots + \frac{1}{4} \left( \frac{1-i}{X-i} + \frac{1+i}{X+i} \right)$

$$F_2 = X + 3i - \frac{7}{X-i} - \frac{6i}{(X-i)^2} + \frac{3}{(X-i)^3}$$

$$F_3 = -\frac{i}{(X-i)^2} - \frac{2}{(X-i)^3} + \frac{i}{(X+i)^2} - \frac{2}{(X+i)^3}$$

$$F_4 = -\frac{2}{X-1} + \frac{1}{(X-1)^2} + \frac{2}{X+1} + \frac{1}{(X+1)^2} + \frac{2}{X^2+1}$$

$$F_5 = \frac{1}{X+1} + \frac{1}{(X+1)^2} + \frac{1}{3} \frac{j-1}{X-j} + \frac{1}{3} \frac{j^2-1}{X-j^2} = \dots - \frac{X+1}{X^2+X+1}$$

## ■ Formule des pôles simples.

**Exercice 311.**

1. On considère la fraction rationnelle  $F = \frac{1}{X(X^4-1)}$ .
  - (a) Préciser les pôles complexes de  $F$  et leur multiplicité.
  - (b) Décomposer  $F$  en éléments simples sur  $\mathbb{C}$ .

Réponse :  $F = -\frac{1}{X} + \frac{1}{4} \left( \frac{1}{X-1} + \frac{1}{X-i} + \frac{1}{X+1} + \frac{1}{X+i} \right)$

2. Soit un entier  $n \geq 2$ , décomposer en éléments simples sur  $\mathbb{C}$ , la fraction rationnelle :

$$F_n = \frac{1}{X(X^n-1)}$$

**Exercice 312.** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , on considère le polynôme  $P = (X+1)^n - 1$ .

1. Montrer que  $P$  admet  $n$  racines complexes simples :  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  (on ne demande pas de les calculer).

2. Justifier la décomposition en éléments simples :  $\frac{1}{P} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1+\alpha_k}{X-\alpha_k}$

**Exercice 313.** Soit  $n \in \mathbb{N}$ , écrire la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle :

$$F = \frac{n!}{X(X+1)\dots(X+n)} \quad \text{Réponse : } F = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{\binom{n}{k}}{X+k}$$

**Exercice 314.** Soit un entier  $n \geq 2$ , on considère un polynôme réel  $P$  unitaire, de degré  $n$ , admettant  $n$  racines réelles simples et s'écrivant :  $P = \prod_{k=1}^n (X - \alpha_k)$ .

1. Justifier la décomposition en éléments simples :

$$\frac{1}{P} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\tilde{P}'(\alpha_k)(X - \alpha_k)}$$

2. Déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\tilde{P}(x)}$ , puis calculer la somme :  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\tilde{P}'(\alpha_k)}$ .

■ Décomposition de  $P'/P$ .

**Exercice 315.** Soit un entier  $n \geq 2$ , on pose  $\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ ,  $\omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ .

1. Chercher la décomposition en éléments simples sur  $\mathbb{C}$  de  $F = \frac{nX^{n-1}}{X^n-1}$ .
2. En déduire la valeur de la somme  $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{1-\omega_k}$  Réponse :  $\frac{n-1}{2}$

## ■ Application de la décomposition en éléments simples.

**Exercice 316.** Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$  par :  $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$ .  $f$  étant de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ , déterminer  $f^{(n)}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**Exercice 317.** Étudier l'existence de la limite suivante :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{1}{t^3+1} dt \quad \text{Réponse : } \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^3+1} dt = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$