

Fiche 19 – Dérivabilité

279

1. Faisons un rapide tableau de signes.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$1-x$	+	+	0	-
$1+x$	-	0	+	+
$\frac{1-x}{1+x}$	-	+	0	-

Où l'on voit que f est définie sur $]-1, 1[$, là où la fraction rationnelle sous la racine est positive et que son dénominateur n'est pas nul.

2. Bien-sûr, la fraction est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, comme fonction usuelle. Sachant que $\sqrt{\cdot}$ est dérivable sur \mathbb{R}_+^* , par composition f est déjà dérivable sur $]-1, 1[$. De plus, si $x \in]-1, 1[$,

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{-1}{\sqrt{1+x}\sqrt{1-x}} \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} -\infty.$$

Cela signifie que f n'est pas dérivable en 1.

Ainsi, f est dérivable sur $]-1, 1[$.

3. Soit $x \in]-1, 1[$. Dérivons f comme un produit :

$$f(x) = \sqrt{1-x} \frac{1}{\sqrt{1+x}}.$$

On a

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-1}{2\sqrt{1-x}} \frac{1}{\sqrt{1+x}} + \sqrt{1-x} \left(-\frac{\frac{1}{2\sqrt{1+x}}}{(\sqrt{1+x})^2} \right) \\ &= -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{1-x}\sqrt{1+x}} + \frac{\sqrt{1-x}}{(1+x)^{3/2}} \right) \\ &= -\frac{1}{2} \left(\frac{1+x+1-x}{\sqrt{1-x}(1+x)^{3/2}} \right) \\ &= \frac{-1}{\sqrt{1-x}(1+x)^{3/2}}. \end{aligned}$$

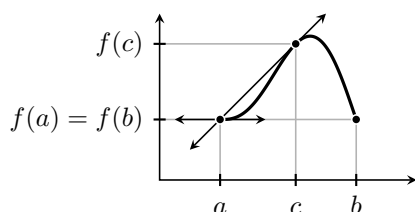
Commentaire. C'est peut-être plus simple de dériver usuellement comme un quotient : à vous de jouer.

286

Commençons par une figure. Le quotient

$$\frac{f(c) - f(a)}{c - a}$$

est la pente de la sécante passant par les points $(a, f(a))$ et $(c, f(c))$, et $f'(c)$ est la pente de la tangente à la courbe au point $(c, f(c))$. L'énoncé propose de démontrer qu'il existe un c pour lequel ces deux pentes sont égales, donc ces deux droites sont confondues, puisqu'elles passent toutes deux par $(c, f(c))$.



Introduisons le taux d'accroissement en a ,

$$g \left| \begin{array}{l} [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} & \text{si } x > a, \\ 0 & \text{si } x = a. \end{cases} \end{array} \right.$$

D'une part, $g(a) = g(b) = 0$, car $f(b) = f(a)$.

D'autre part, g est dérivable sur $]a, b[$, comme quotient de fonctions qui le sont, où le dénominateur ne s'annule pas. Et comme f est dérivable en a ,

$$\lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = f'(a) = 0 = g(a),$$

donc g est continue en a .

D'après le théorème de Rolle, il existe donc $c \in]a, b[$ tel que $g'(c) = 0$. Or pour tout $x \in]a, b[$,

$$g'(x) = \frac{f'(x)(x-a) - (f(x) - f(a)) \cdot 1}{(x-a)^2}.$$

Donc

$$f'(c)(c-a) = f(c) - f(a),$$

ce que l'on voulait.

288

Par opérations usuelles — composée et produit, la fonction $f : x \mapsto x e^{1/x}$ est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}_+^* , donc en particulier, elle y est dérivable. De plus, pour tout $x > 0$,

$$f'(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right) e^{1/x}.$$

D'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]x, x+1[$ tel que

$$f(x+1) - f(x) = f'(c).$$

Quand $x \rightarrow +\infty$, $x+1 \rightarrow +\infty$ donc $c \rightarrow +\infty$. Il s'ensuit que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x+1) - f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 1.$$

289

Comme fonction usuelle, \ln est de classe \mathcal{C}^∞ donc dérivable sur \mathbb{R}_+^* . De plus, pour tout $x > 0$,

$$\ln'(x) = \frac{1}{x}.$$

D'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]x, x+1[$ tel que

$$\ln(x+1) - \ln(x) = \ln'(c) = \frac{1}{c}.$$

Comme $x \mapsto 1/x$ décroît strictement sur $]x, x+1[$, il s'ensuit que

$$\frac{1}{x+1} < \frac{1}{c} < \frac{1}{x},$$

d'où

$$\frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln(x) < \frac{1}{x}.$$

Commentaire. On obtient des inégalités strictes, sans effort supplémentaire.

296

D'une part, les dérivées de l'exponentielle sont l'exponentielle. D'autre part, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$\cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right).$$

Donc avec la formule de Leibniz,

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos\left(x + \frac{k\pi}{2}\right) \right) e^x \\ &= \operatorname{Re} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{i\left(x + \frac{k\pi}{2}\right)} \right) e^x \\ &= \operatorname{Re} \left(e^{ix} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{i\frac{k\pi}{2}} \right) e^x \\ &= \operatorname{Re} \left(e^{ix} (1 + e^{i\frac{\pi}{2}})^n \right) e^x \\ &= \operatorname{Re} \left(e^{ix} (1 + i)^n \right) e^x \\ &= \operatorname{Re} \left(e^{ix} \sqrt{2}^n (e^{i\frac{\pi}{4}})^n \right) e^x \\ &= 2^{n/2} \left(\cos(x) \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) - \sin(x) \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) \right) e^x \\ &= 2^{n/2} \cos\left(x + \frac{n\pi}{4}\right) e^x. \end{aligned}$$

297

1° La fonction f est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}_+^* comme fonction usuelle. De plus, pour tout $x > 0$,

$$f'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1},$$

donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} (n-1)! x^{-n},$$

grâce à une récurrence immédiate.

2° La fonction f_n est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}_+^* comme produit de deux fonctions qui le sont. On voit que

$$f_1'(x) = \frac{1}{x}$$

et pour $n \geq 2$,

$$\begin{aligned} f_n^{(n)}(x) &= (f_n')^{(n-1)}(x) \\ &= \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left((n-1)x^{n-2} \ln x + x^{n-2} \right) \\ &= (n-1) f_{n-1}^{(n-1)}(x) \end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$f_n^{(n)}(x) = \frac{(n-1)!}{x},$$

là aussi avec une récurrence immédiate.

Commentaire. Ici la formule de Leibniz, bien que parfaitement appropriée, est lourde à mettre en œuvre.

298

1. Raisonnons par récurrence en nommant $\mathcal{P}(n)$ la propriété de l'énoncé.

Initialisation. On sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

En posant $P_1(x) = 1$, on obtient bien la forme voulue et $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

Transmission. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$. Alors, en dérivant comme un produit,

$$\begin{aligned} \arctan^{(n+1)}(x) &= \frac{P_n'(x)}{(1+x^2)^n} - \frac{P_n(x) n 2x}{(1+x^2)^{n+1}} \\ &= \frac{(1+x^2) P_n'(x) - 2nx P_n(x)}{(1+x^2)^{n+1}}. \end{aligned}$$

En posant $P_{n+1}(x) = (1+x^2) P_n'(x) - 2nx P_n(x)$, on obtient la forme voulue au rang $n+1$ et $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion. D'après le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. On a trouvé que $P_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$P_{n+1} = (1+X^2) P_n' - 2nX P_n.$$

On voit que $\deg(P_1) = 0$. Montrons par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \deg(P_n) = n - 1.$$

Initialisation. On vient de le dire.

Transmission. Supposons que $\deg(P_n) = n - 1$: le monôme dominant de P_n s'écrit $a_{n-1} X^{n-1}$ où $a_{n-1} \neq 0$. Alors le monôme dominant de P_{n+1} est

$$\begin{aligned} X^2(n-1)a_{n-1}X^{n-2} - 2nX a_{n-1}X^{n-1} \\ = -(n+1)a_{n-1}X^n. \end{aligned}$$

Comme $a_{n-1} \neq 0$, $\deg(P_{n+1}) = n$.

Conclusion. L'affirmation est vraie par récurrence.