

Fonctions dérivables

■ Dérivabilité d'une fonction

Exercice 279. On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

Préciser le domaine de définition de f , étudier la dérivabilité et calculer sa dérivée.

Exercice 280. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = \frac{x}{1 + e^{1/x}}$$

Montrer que f se prolonge par continuité en 0 et étudier la dérivabilité en 0 de la fonction ainsi prolongée. Faire un dessin représentant f au voisinage de 0.

Exercice 281. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$$

Montrer que f se prolonge par continuité en 0, étudier la dérivabilité sur $\mathbb{R}$ de la fonction ainsi prolongée, puis calculer f' .

Exercice 282. On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\varphi(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \text{ si } x \neq 0 \text{ et } \varphi(0) = 0$$

1. Montrer que φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée φ' .
2. La fonction φ est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$?

■ Dérivabilité d'une application réciproque

Exercice 283. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f(x) = \frac{1}{\operatorname{ch} x}$$

1. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans un intervalle I que l'on précisera.

2. On note f^{-1} la bijection réciproque de f , montrer que f^{-1} est dérivable sur un intervalle J que l'on précisera, puis montrer que :

$$\forall x \in J, \quad (f^{-1})'(x) = -\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$$

Exercice 284. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $I = [0, \frac{\pi}{2}]$ par :

$$f(x) = \sqrt{\sin x} + x$$

Montrer que f réalise une bijection de I dans un intervalle J que l'on précisera. Étudier la continuité et la dérivabilité de f^{-1} .

■ Théorème de Rolle

Exercice 285. Soit f une fonction dérivable sur $[0, 1]$ telle que $f(0) = 0$ et $\forall x \in [0, 1], f'(x) \neq 0$. Montrer que f est de signe constant sur $[0, 1]$.

Exercice 286. Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $[a, b]$, vérifiant $f'(a) = 0$ et $f(a) = f(b)$. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = \frac{f(c) - f(a)}{c - a}$. Faire un dessin illustrant cet exercice.

Exercice 287. Deux généralisations du théorème de Rolle.

1. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable. On suppose $\lim_{-\infty} f = \lim_{+\infty} f = +\infty$, montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f'(c) = 0$.
2. Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ continue et dérivable $\mathbb{R}_+^*$. On suppose $f(0) = \lim_{+\infty} f$, montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $f'(c) = 0$.

■ Théorème et inégalité des accroissements finis

Exercice 288. À l'aide du théorème des accroissements finis, déterminer :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1)e^{\frac{1}{x+1}} - xe^{\frac{1}{x}}$$

Exercice 289. Montrer que pour tout réel $x > 0$,

$$\frac{1}{x+1} \leq \ln(x+1) - \ln(x) \leq \frac{1}{x}$$

Exercice 290. Montrer que la fonction arctan est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.

Exercice 291.

1. Montrer que la fonction exponentielle est e -lipschitzienne sur $[-1, 1]$.
2. En déduire que : $\forall x \in [-1, 1], |e^x - 1 - x| \leq e \times x^2$

■ Suites récurrentes

Exercice 292. On considère la fonction f définie sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ par $f(x) = \cos x$.

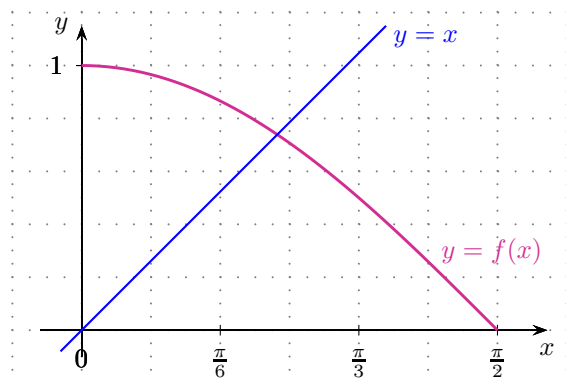
1. Montrer que f admet un unique point fixe $\alpha \in [0, \frac{\pi}{3}]$.

On considère la suite récurrente définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.

2. Montrer que la suite (u_n) est bien définie et justifier que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq \frac{\pi}{3}$$

3. Placer les premiers termes de la suite (u_n) sur le graphe.



4. Montrer que $\forall x \in [0, \frac{\pi}{3}], |f'(x)| \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$, et en déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{\sqrt{3}}{2} |u_n - \alpha|$$

5. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n \alpha$.
(b) Conclure quant à la convergence de la suite.

■ Théorème de la limite de la dérivée

Exercice 293. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x > 0, f(x) = \arctan\left(\frac{\ln x}{x}\right)$$

1. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer f' .
2. Montrer que l'on peut prolonger f par continuité en 0 et étudier la dérivabilité de la fonction ainsi prolongée.
3. Dresser le tableau de variation de f , puis tracer le graphe de la fonction.

■ Dérivée d'ordre n

Exercice 294. La fonction définie par $f(x) = (x^2 + 1)e^x$ étant de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, calculer en utilisant la formule de Leibniz, sa dérivée $f^{(n)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 295. Soit $n \in \mathbb{N}$, justifier que les fonctions suivantes sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur leur domaine de définition, et calculer leur dérivée d'ordre n .

$$f(x) = \frac{1}{1-x} \quad g(x) = \frac{1}{1+x} \quad h(x) = \frac{1}{1-x^2}$$

Exercice 296. Soit $n \in \mathbb{N}$, calculer la dérivée n^e de la fonction $f(x) = \cos(x)e^x$.

Exercice 297. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, justifier que les fonctions suivantes sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur leur domaine de définition, et calculer leur dérivée d'ordre n .

$$f(x) = \ln x \quad f_n(x) = x^{n-1} \times \ln x$$

Exercice 298. On note $f(x) = \arctan x$, on sait que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, montrer qu'il existe une fonction polynomiale P_n telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1+x^2)^n}$$

2. Quel est le degré de P_n ?