

Fonctions convexes

■ Études de fonctions

Exercice 299. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \ln\left(\frac{1+x^2}{2}\right)$$

1. Étudier la parité de f , dresser le tableau de variation de f .
2. Étudier la convexité de f et préciser ses points d'inflexions éventuels.
3. Tracer le graphe de f .
4. Justifier l'inégalité $\forall x \geq 1, \ln\left(\frac{1+x^2}{2}\right) \leq x - 1$.

Exercice 300. On considère la fonction f définie sur $[0, 1[$ par :

$$f(0) = 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in]0, 1[, \quad f(x) = \frac{1}{\ln x}$$

Étudier la continuité, la dérivabilité et la convexité de f , les points d'inflexion et les tangentes en ces points. Tracer « rapidement » le graphe de f .

■ Inégalités, encadrements

Exercice 301. Montrer que :

$$\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}], \quad \frac{2}{\pi}x \leq \sin x \leq x$$

On pourra commencer par tracer le graphe de la fonction $\sin$ sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$ pour illustrer l'encadrement.

Exercice 302. Démontrer les inégalités suivantes :

1. $\forall x \in [0, 1], \quad \frac{\pi}{4}x \leq \arctan x \leq x$
2. $\forall \alpha \geq 1, \forall x > -1, \quad (1+x)^\alpha \geq 1 + \alpha x$
3. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad x^{n+1} - (n+1)x + n \geq 0$

Exercice 303.

1. Montrer que l'application f définie sur $]1, +\infty[$ par $f(x) = \ln(\ln x)$ est concave.
2. En déduire que $\forall (x, y) \in]1, +\infty[^2, \quad \ln\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \sqrt{\ln x \ln y}$.

Exercice 304. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on considère $x_1, x_2, \dots, x_n$ des réels strictement positifs, prouver l'inégalité :

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

Exercice 305.

1. Étudier la convexité de $x \mapsto \frac{1}{e^x + 1}$ sur $\mathbb{R}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on considère $x_1, x_2, \dots, x_n$ des réels supérieurs à 1, prouver l'inégalité :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{1+x_k} \geq \frac{n}{1+\sqrt[n]{x_1 \dots x_n}}$$

Exercice 306.

1. Étudier la convexité de $x \mapsto \ln(e^x + 1)$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on considère $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n$ des réels strictement positifs.

(a) Prouver l'inégalité :

$$1 + \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n x_k} \leq \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n (1+x_k)}$$

(b) En déduire :

$$\sqrt[n]{\prod_{k=1}^n x_k} + \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n y_k} \leq \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n (x_k + y_k)}$$

■ Comportement des fonctions convexes

Exercice 307. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ convexe et positive.

Montrer que si $f(a) = f(b) = 0$ alors f est identiquement nulle sur $[a, b]$.

Exercice 308.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ convexe telle que $\lim_{+\infty} f = 0$, montrer que f est positive.

Exercice 309. Soit $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ convexe possédant une limite réelle en $+\infty$.

1. Montrer que f est décroissante.
2. On suppose de plus f dérivable, montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$.