Intégration sur un segment

Intégrale d'une fonction continue par morceaux

Exercice 318. Calculer :

1. $\displaystyle\int_0^4 \sin\frac{\lfloor x\rfloor\pi}{4}\,\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^n e^{-\lfloor t\rfloor}\,\mathrm{d}t$

Exercice 319. Calculer $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} (x-\lfloor x^2\rfloor)\,\mathrm{d}x$ Réponse : $\frac{5}{2}+\sqrt{2}-2\sqrt{3}$

Étude de suites définies par des intégrales.

Exercice 320. À l'aide d'un encadrement, trouver la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

Exercice 321.

1. Vérifier que pour tout réel $x \geqslant 0$, on a : $0 \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$.
2. On considère la suite définie pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ par $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\,\mathrm{d}x$.
   (a) Montrer que pour tout entier n non nul,
   $$I_n = \frac{\ln 2}{n} - \frac{1}{n}\int_0^1 \ln(1+x^n)\,\mathrm{d}x$$
   (b) En déduire la limite, puis un équivalent de la suite (I_n).

Exercice 322. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier n non nul par :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln k}{k}$$

1. Montrer que pour tout entier $k \geqslant 3$, $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{\ln k}{k}$.
2. En déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 323. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on définit l'intégrale $a_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \big(\cos t\big)^n\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que (a_n) est une suite décroissante, convergente.
2. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $(n+2)a_{n+2} = (n+1)a_n$.

Études de fonctions définies par des intégrales.

Exercice 324. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{e^t}{t}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer f'. Préciser les variations de f ainsi que son signe.
2. Soit g définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $g(x) = f(x) - \ln x$. Chercher le signe de g.
3. Étudier les limites $\lim\limits_{0} f$ et $\lim\limits_{+\infty} f$.

Exercice 325.

1. Montrer que pour tout réel t, on a $1 - \dfrac{t^2}{2} \leqslant \cos t \leqslant 1$.

On considère la fonction f définie par $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t$.

2. Quel est le domaine de définition de f ?
3. Étudier la limite de f à gauche et à droite de 0. Peut-on prolonger f par continuité en 0 ?
4. Étudier la dérivabilité de f et calculer sa dérivée f'.

Sommes de Riemann.

Exercice 326. Étudier la convergence des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ dans les cas suivants :

1. $u_n = \displaystyle\sum_{p=0}^{n-1} \frac{\ln(1+\frac{p}{n})}{p+n}$
2. $u_n = \displaystyle\frac{1}{n}\sum_{p=0}^{n} \frac{1}{e^{\frac{p}{n}}+1}$
3. $u_n = \displaystyle\sum_{p=n+1}^{2n} \frac{1}{p}$
4. $u_n = \displaystyle\left[\prod_{p=0}^{n-1}\left(1+\frac{p}{n}\right)\right]^{1/n}$

Exercice 327. En utilisant une somme de Riemann, déterminer un équivalent des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ suivantes :

1. $u_n = \displaystyle\sum_{p=0}^{n-1} \frac{1}{n^2+p^2}$
2. $u_n = \displaystyle\sum_{p=0}^{n} \frac{1}{(n+2p)^3}$
3. $u_n = \displaystyle\sum_{p=n+1}^{2n} \frac{1}{p^2}$

Formules de Taylor.

Exercice 328. Montrer en utilisant la formule de taylor avec reste intégral que $\forall x \in [0,\pi]$, on a :

$$x - \frac{x^3}{6} \leqslant \sin x \leqslant x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$$

Exercice 329. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a :

$$1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} \leqslant \sqrt{1+x} \leqslant 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8}$$

Exercice 330. En utilisant l'inégalité de Taylor-Lagrange à la fonction $f(x) = \ln(1+x)$, montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{p=1}^{n} \frac{(-1)^{p-1}}{p} = \ln 2$$