

Dénombrement

■ Combinaisons, listes, arrangements, permutations...

Exercice 331. Un premier exercice :

1. Une urne contient 5 boules numérotées de 1 à 5, on la vide en tirant les boules une à une, quel est le nombre de façons de vider l'urne ?
2. Combien existe-t-il de façons de ranger 3 objets identiques dans un meuble ayant 10 tiroirs, chaque tiroir ne pouvant contenir qu'un objet.
3. Les 6 rôles d'une pièce de théâtre peuvent être joués par les 20 personnes d'une troupe, combien existe-t-il de distributions différentes ?
4. On lance 6 fois de suite une pièce de monnaie, compter le nombre de résultats possibles.

Exercice 332.

À l'entrée d'un immeuble, on dispose d'un clavier à 9 touches avec les neuf chiffres de 1 à 9. Le code d'ouverture de la porte est composé d'un nombre à quatre chiffres.

7	8	9
4	5	6
1	2	3

1. Combien existe-t-il de codes différents ?
2. Combien existe-t-il de codes :
 - (a) pour lesquels les quatre chiffres sont différents ?
 - (b) comportant au moins un chiffre 1 ?
 - (c) se terminant par un chiffre pair ?
 - (d) ayant exactement un seul chiffre pair ?
 - (e) comportant plusieurs fois le chiffre 1 ?
 - (f) pour lesquels les quatre chiffres sont dans l'ordre strictement croissant ?

■ Dénombrer des anagrammes

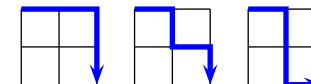
Exercice 333.

1. Quel est le nombre d'anagrammes écrits avec les lettres du mot « POIRES » ?
2. Même question avec les lettres du mot « ANANAS ».
3. Combien existe-t-il de nombres binaires écrits avec 5 chiffres « 0 » et 3 chiffres « 1 » ?

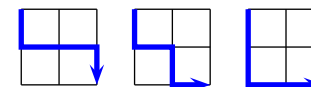
4. Une urne  contient 3 boules rouges, 1 boule bleue et 2 boules vertes, on la vide en tirant les boules une à une, quel est le nombre de façons de vider l'urne ?

Exercice 334. Problem 15 - Lattice paths. (<http://projecteuler.net>)

Starting in the top left corner of a 2×2 grid, and only being able to move to the right and down, there are exactly 6 routes to the bottom right corner.



How many such routes are there through a 20×20 grid ?



Exercice 335.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}^*$, calculer le nombre de mots écrits avec n « • » et $p - 1$ « | ».
2. Calculer le nombre de façons de ranger n boules identiques dans p tiroirs numérotés de 1 à p .

■ Principe additif

Exercice 336. Combien un ensemble E de cardinal $n \in \mathbb{N}$ possède-t-il de sous-ensembles ?

Exercice 337. Une urne contient p boules blanches et q boules noires. En calculant de deux manières différentes le nombre de façons de tirer une poignée de n boules de l'urne (avec $(n, p, q) \in \mathbb{N}^3$), établir l'égalité de Vandermonde :

$$\sum_{j=0}^n \binom{p}{j} \binom{q}{n-j} = \binom{p+q}{n}$$

En déduire : $\sum_{j=0}^n \binom{n}{j}^2$.

■ Quelques calculs de probabilité

Exercice 338.

1. Quel est le nombre de dominos d'un jeu complet ?
2. On choisit simultanément et au hasard, deux dominos dans un jeu.
 - (a) Quel est l'univers associé à cette expérience aléatoire ? Quel est son cardinal ?
 - (b) Calculer la probabilité des événements suivants :
 - A : « Le chiffre 2 figure au moins deux fois dans la poignée tirée. »
 - B : « Le chiffre 2 figure une seule fois dans la poignée tirée. »
 - C : « Le chiffre 2 figure au moins une fois dans la poignée tirée. »

Exercice 339. On choisit au hasard un entier à 3 chiffres, calculer la probabilité des événements suivants :

- A : « Le nombre choisi n'a pas de chiffre 0 »
- B : « Le nombre choisi n'a pas de chiffre 9 »
- C : « Le nombre choisi a au moins un chiffre 9 »
- D : « Le nombre choisi a exactement un chiffre 9 »

Exercice 340. On lance 3 fois de suite un même dé en notant à chaque fois le numéro sorti. Quelle est la probabilité que les 3 numéros sortent dans un ordre strictement croissant ?