

Notions et contenus	Capacités exigibles	CdE
1.1. Stabilité des systèmes linéaires		
Fonction de transfert d'un système entrée-sortie linéaire continu et invariant.	Transposer la fonction de transfert opérationnelle dans les domaines fréquentiel (fonction de transfert harmonique) ou temporel (équation différentielle).	CdE2 : 18.1 ; 18.2
Stabilité.	Étudier la stabilité d'un système d'ordre 1 ou 2 à partir des signes des coefficients de l'équation différentielle ou de la fonction de transfert.	CdE2 : 15.3 ; 18.4

Electronique 1 Stabilité des systèmes linéaires



On étudie des opérateurs qui à un signal d'entrée $e(t)$ font correspondre un signal de sortie $s(t)$; en électronique $e(t)$ et $s(t)$ seront généralement des courants ou des tensions, mais on peut généraliser à d'autres systèmes : mécaniques, thermiques, etc., les grandeurs pouvant être des températures, pressions, angle de rotation, etc.

1. Qu'est-ce qu'un système linéaire continu invariant ?

Un système est dit **linéaire** si la relation entre les grandeurs d'entrée et de sortie est une équation différentielle linéaire à coefficients constants du type :

$$a_0 s(t) + a_1 \frac{ds(t)}{dt} + a_2 \frac{d^2 s(t)}{dt^2} + \dots = b_0 e(t) + b_1 \frac{de(t)}{dt} + b_2 \frac{d^2 e(t)}{dt^2} + \dots$$

L'ordre du système est l'ordre de la dérivée la plus élevée de l'équation différentielle en $s(t)$ précédente.

Un système est dit **continu** : les grandeurs étudiées sont définies quel que soit t , le signal est analogique, il peut être visualisé sur un oscilloscope analogique.

Par opposition aux signaux numériques qui sont des suites binaires de niveaux logiques 0 et 1. On les visualise sur des ordinateurs à l'aide de convertisseur analogique numérique (CAN), par exemple une interface Sysam et le logiciel latis pro ou un microprocesseur de type Arduino.

Un système est dit **invariant** : son comportement reste inchangé dans le temps, à une même entrée correspond toujours une même réponse

2. Fonction de transfert opérationnelle : $\underline{H(p)} = \frac{\underline{S(p)}}{\underline{E(p)}}$, notation de Laplace, qui s'utilise pour un signal $e(t)$ quelconque.

3. Régime permanent sinusoïdal (ou régime harmonique ou régime sinusoïdal forcé) :

Soit $e(t) = E \cdot \cos(\omega t + \varphi_e)$; E est l'amplitude de $e(t)$, $\omega t + \varphi_e$ sa phase, φ_e sa phase à l'origine que l'on prendra nulle très fréquemment, ω sa pulsation, $f = \omega / 2\pi$ est la fréquence du signal. $T = 1/f$ est sa période.

Valeur moyenne d'une fonction T périodique : $\langle e(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T e(t) dt$

$$\text{Valeur efficace} = \text{valeur quadratique moyenne} : E_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T e(t)^2 dt}$$

$$\text{Si } e(t) = E \cdot \cos(\omega t + \varphi) \quad \langle e(t) \rangle = 0 \text{ et } E_{\text{eff}} = \frac{E}{\sqrt{2}}$$

On associe à ce signal un signal complexe $\underline{e}(t) = \underline{E} \cdot \exp(j\omega t)$;
 $\underline{E} = E$ est l'amplitude complexe de $\underline{e}(t)$ et $e(t) = \text{Re}(\underline{e}(t))$.

Pour un **système linéaire stable**, on admettra qu'en régime sinusoïdal permanent la sortie est également sinusoïdale de même pulsation, soit :

$$s(t) = S(\omega) \cdot \cos(\omega t + \varphi(\omega))$$

$$\underline{s}(t) = \underline{S}(\omega) \cdot \exp(j\omega t) \text{ avec } \underline{S}(\omega) = S(\omega) \cdot \exp(j\varphi(\omega))$$

On privilégie la notation complexe, on identifie $j\omega = p$ en notation de Laplace.

On appelle **fonction de transfert** du système le rapport : $\underline{H}(j\omega) = \underline{S}(j\omega) / \underline{E}$.
l'ordre du système est le coefficient le plus élevé du dénominateur.

Dans le cas général : $\underline{H}(j\omega) = |\underline{H}(j\omega)| \cdot \exp(j\varphi)$;

- $G(\omega) = |\underline{H}(j\omega)| = S(\omega) / E$ est le gain - linéaire - du système et donc $S(\omega) = G(\omega) \cdot E$;
- le gain en décibels (dB) est défini par $G_{\text{dB}} = 20 \cdot \log(G)$;
- $\varphi(\omega) = \text{Arg}(\underline{H}(j\omega))$ est le déphasage du signal de sortie par rapport au signal d'entrée.

Le **diagramme de Bode** consiste à représenter les courbes :

* $G_{\text{dB}} = f(\log(\omega/\omega_0))$;

* $\varphi = g(\log(\omega/\omega_0))$, ω_0 étant une pulsation caractéristique du circuit.

Tracés numériques des diagrammes de Bode : cf annexes révisions de première année

Diag Bode ordre 1 universel

Diag Bode ordre 2 passe bande

Diag Bode ordre 2 universel

4. Relations entre $H(p)$ et $H(j\omega)$

	Fonction de transfert opérationnelle p	Fonction de transfert harmonique $j\omega$	Montage électrique	Propriétés du diagramme de Bode
Ordre 1 : $\tau = 1 / \omega_c$ τ : constante de temps ω_c : pulsation de coupure Déphasage de $\pi/2$ entre BF et HF	$\underline{H}(p) = \frac{H_o}{1 + \tau p}$	$\underline{H}(j\omega) = \frac{H_o}{1 + j \frac{\omega}{\omega_c}}$	Passe-bas du 1 ^{er} ordre : RC	Asymptote basse fréquence horizontale Asymptote haute fréquence en -20 dB/décade
	$\underline{H}(p) = \frac{H_o \tau p}{1 + \tau p}$	$\underline{H}(j\omega) = \frac{H_o j \frac{\omega}{\omega_c}}{1 + j \frac{\omega}{\omega_c}}$	Passe-haut du 1 ^{er} ordre : CR ou RL	Asymptote basse fréquence en $+20$ dB/décade Asymptote haute fréquence horizontale

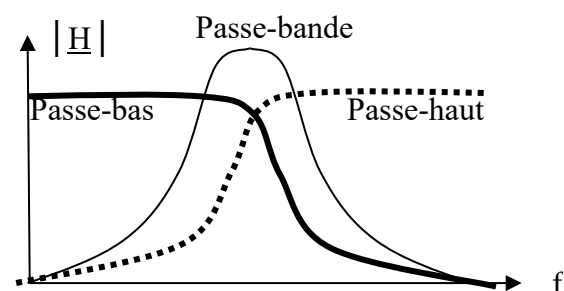
Ordre 2 : $\tau = 1 / Q \omega_o$ (pour l'ordre 2, il existe d'autres formes) τ : constante de temps ω_o : pulsation propre Q : facteur de qualité Déphasage de π entre BF et HF	$\underline{H}(p) = \frac{H_o}{1 + \tau p + \left(\frac{p}{\omega_o}\right)^2}$	$\underline{H}(j\omega) = \frac{H_o}{1 + j \frac{\omega}{Q\omega_o} + \left(\frac{j\omega}{\omega_o}\right)^2}$	Passe-bas du 2ème ordre : RLC	Asymptote basse fréquence horizontale Asymptote haute fréquence en -40 dB/décade
	$\underline{H}(p) = \frac{H_o \tau p}{1 + \tau p + \left(\frac{p}{\omega_o}\right)^2}$	$\underline{H}(j\omega) = \frac{H_o}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_o} - \frac{\omega_o}{\omega}\right)}$	Passe-bande du 2ème ordre : LCR	Asymptotes basse et haute fréquence en ± 20 dB/décade

Les principaux types de filtres

Passe-bas : $G = |\underline{H}|$ ne tend pas vers zéro à basse fréquence et tend vers 0 à haute fréquence

Passe-haut : $|\underline{H}|$ ne tend pas vers zéro à haute fréquence et tend vers 0 à basse fréquence

Passe-bande : $|\underline{H}|$ tend vers zéro à basse et à haute fréquence

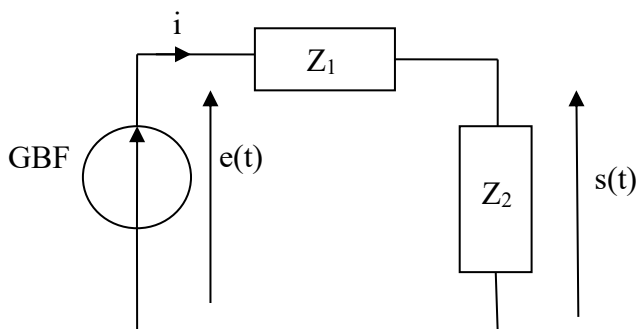


Préciser quel filtre utiliser ainsi que ses caractéristiques pour ne conserver que la valeur moyenne d'un signal.

Même question pour supprimer la valeur moyenne d'un signal.

5. Exemples

Etablir la fonction de transfert complexe et la mettre sous forme canonique :



Exemple 1 : $Z_1 = R$; $Z_2 = C$;

Exemple 2 : Z_1 association série d'une bobine parfaite d'inductance L et d'un condensateur parfait de capacité C ; $Z_2 = R$

On applique un diviseur de tension : $\underline{S} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} \underline{E}$.

Exemple 1 : application du diviseur de tension :

$$\underline{S} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} \underline{E} = \frac{1}{1 + \frac{Z_1}{Z_2}} \underline{E} = \frac{1}{1 + jRC\omega} \underline{E}$$

On reconnaît la forme canonique d'un **transfert passe-bas d'ordre 1** : $\underline{H} = \frac{\underline{S}}{\underline{E}} = \frac{H_o}{1 + j \frac{\omega}{\omega_c}}$ avec H_o réel ici

$H_o = 1$ et $\omega_c = 1 / RC$ pulsation caractéristique de la fonction de transfert.

Retrouver par la même méthode la fonction transfert du filtre de l'exemple 2 et la mettre sous sa forme canonique

6. Equation différentielle

a. Etablir l'équation différentielle dont s(t) est solution et la mettre sous forme canonique

Exemple 1 :

Loi des mailles : $e = Ri + s$ or $i = C ds / dt$ donc on obtient l'équation différentielle mise sous forme canonique $\frac{ds}{dt} + \frac{s}{\tau} = \frac{e}{\tau}$ avec $\tau = RC$, grandeur homogène à un temps.

L'équation différentielle est linéaire et d'ordre 1, donc le circuit est linéaire et d'ordre 1.

Exemple 2 :

Loi des mailles : $e = L di / dt + u_C + s$ or $i = C du_C / dt$ et $s = Ri$

En dérivant par rapport au temps : $de / dt = L/R (d^2s / dt^2) + i / RC + ds / dt$

On ordonne : $\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{ds}{dt} + \frac{s}{LC} = \frac{R}{L} \frac{de}{dt}$

On obtient l'équation différentielle mise sous forme canonique $\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{\omega_o}{Q} \frac{ds}{dt} + \omega_o^2 s = \frac{\omega_o}{Q} \frac{de}{dt}$

Avec $\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, grandeur homogène à une pulsation (rad.s^{-1}) et $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$, facteur de qualité, grandeur sans dimension.

Remarque : autre forme canonique $\frac{d^2s}{dt^2} + 2m\omega_o \frac{ds}{dt} + \omega_o^2 s = 2m\omega_o \frac{de}{dt}$ avec $2m\omega_o = R/L = \omega_o / Q$ grandeur homogène à l'inverse d'un temps. $2m = 1/Q$

L'équation différentielle est linéaire et d'ordre 2, donc le circuit est linéaire et d'ordre 2.

b. Passage équation différentielle canonique → fonction de transfert

Pour un système linéaire l'équation différentielle établie pour des expressions de $e(t)$ et $s(t)$ réelles restent valables avec les valeurs complexes $\underline{e}(t)$ et $\underline{s}(t)$.

On suppose implicitement que $e(t) = E \cdot \cos(\omega t)$ et $s(t) = S(\omega) \cdot \cos(\omega t + \varphi(\omega))$

donc $\underline{e}(t) = \underline{E} \cdot \exp(j\omega t)$ avec $\underline{E} = E$ et $\underline{s}(t) = \underline{S}(\omega) \cdot \exp(j\omega t)$ avec $\underline{S}(\omega) = S(\omega) \cdot \exp(j\varphi(\omega))$

Ordre 1 :

Système linéaire passage en complexe $\frac{d\underline{s}}{dt} + \frac{\underline{s}}{\tau} = \frac{\underline{e}}{\tau}$

On remplace dans l'équation différentielle : $j\omega \underline{S} + \underline{S} / \tau = \underline{E} / \tau$

D'où $\underline{S} / \underline{E} = 1 / (1 + j\omega\tau)$

Faire de même avec un ordre 2

c. Passage fonction de transfert canonique → équation différentielle

Écrire la fonction de transfert canonique sur “une seule ligne” (pas de fraction) et réaliser l’opération inverse à la précédente.

Ordre 1 :

$$\underline{S} / \underline{E} = 1 / (1 + j\omega\tau)$$

$$\underline{S} (1 + j\omega\tau) = \underline{E} \quad \underline{S} + j\omega \underline{S} \tau = \underline{E}$$

multiplier par $j\omega$ dans le domaine fréquentiel revient à dériver par rapport au temps dans le domaine temporel : $s(t) + \tau \frac{ds}{dt} = e(t)$ sous forme canonique $\frac{ds}{dt} + \frac{s(t)}{\tau} = \frac{e(t)}{\tau}$

Ordre 2 :

$$\underline{S} \left(1 + j\omega + \left(j \frac{\omega}{\omega_o} \right)^2 \right) = \underline{E} H_o j\omega \quad \underline{S} + j\omega \underline{S} + \left(\frac{1}{\omega_o} \right)^2 (j\omega)^2 \underline{S} = j\omega \underline{E} H_o \tau$$

multiplier par $j\omega$ dans le domaine fréquentiel revient à dériver par rapport au temps dans le domaine temporel : $s(t) + \tau \frac{ds}{dt} + \left(\frac{1}{\omega_o} \right)^2 \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{de}{dt} \tau$

$$\frac{d^2s}{dt^2} + \tau \omega_o^2 \frac{ds}{dt} + \omega_o^2 s = \tau \omega_o^2 \frac{de}{dt}$$
$$\frac{d^2s}{dt^2} + 2m\omega_o \frac{ds}{dt} + \omega_o^2 s = 2m\omega_o \frac{de}{dt} \quad \text{en posant } \tau = 2m\omega_o$$

7. Notion de stabilité d’un système

Exemples de systèmes stables et instables, ballon de baudruche, bulle de savon, balançoire excitée

L’amplitude des systèmes instables est toujours limitée, sinon on arrive à une rupture

$$a_o s(t) + a_1 \frac{ds(t)}{dt} + a_2 \frac{d^2s(t)}{dt^2} + \dots = b_o e(t) + b_1 \frac{de(t)}{dt} + b_2 \frac{d^2e(t)}{dt^2} + \dots$$

Pour un signal d’entrée $e(t)$ donné la sortie $s(t)$ s’obtient comme la somme de :

- La solution de l’équation homogène (ou sans second membre, appelée aussi solution générale) :

$$a_o s_{\text{hom}}(t) + a_1 \frac{ds_{\text{hom}}(t)}{dt} + a_2 \frac{d^2s_{\text{hom}}(t)}{dt^2} + \dots = 0$$

- Une solution particulière de l’équation complète.

La réponse **libre** d’un système linéaire est la réponse du système perturbé pendant un certain temps puis laissé à entrée nulle $e = 0$.

Mathématiquement, il s’agit de la solution de l’équation différentielle homogène.

Physiquement, on obtient la forme du régime transitoire.

Un système est stable si et seulement si à une entrée bornée correspond une sortie bornée.

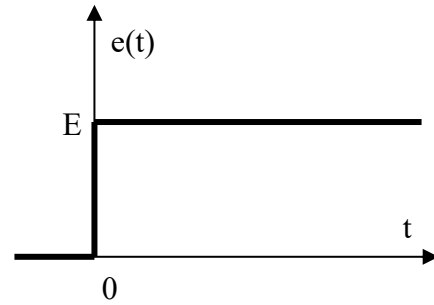
Entrée bornée : 1 échelon avec un système initial au repos

$e(t)$ est **un échelon de tension** :

à $t = 0^-$ $e(t) = 0$;

à $t > 0$ $e(t) = E = \text{constante}$, réponse indicielle.

On s'intéresse à l'établissement de la tension $s(t)$.



Cas usuels :

Ordre 1 : $\frac{ds}{dt} + \frac{s(t)}{\tau} = \frac{E}{\tau}$

la réponse libre est d'ordre 1 : $\frac{ds}{dt} + \frac{s(t)}{\tau} = 0$

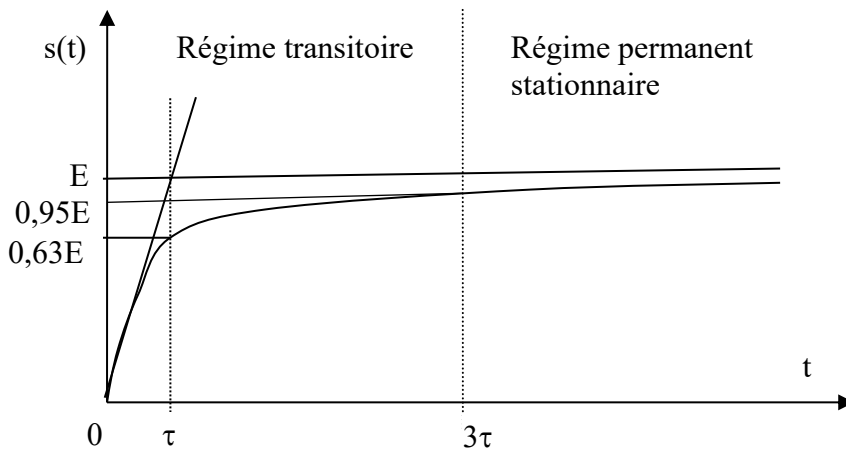
Régime transitoire :

$s_{\text{hom}}(t) = Ae^{-t/\tau}$;

$s_{\text{part}}(t) = \ll \text{de la forme du 2}^{\text{nd}} \text{ membre} \gg = \text{constante}$ donc $s_{\text{part}} = E$

$s(t) = s_{\text{hom}}(t) + s_{\text{part}}(t) = Ae^{-t/\tau} + E$

le système est stable si et seulement si τ est positif.



Ordre 2 : $\frac{d^2s}{dt^2} + 2m\omega_o \frac{ds}{dt} + \omega_o^2 s = 2m\omega_o \frac{de}{dt}$

la réponse libre est d'ordre 2 : $\frac{d^2s}{dt^2} + 2m\omega_o \frac{ds}{dt} + \omega_o^2 s = 0$

Détermination de la nature régime transitoire :

Equation caractéristique : $r^2 + 2m\omega_o r + \omega_o^2 = 0$

Discriminant : $\Delta = 4\omega_o^2 (m^2 - 1)$

$\Delta > 0$ soit $m^2 > 1$: 2 racines réelles : $r_{1/2} = -m\omega_o \pm \omega_o \sqrt{m^2 - 1}$

$s_{\text{hom}}(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$, **le régime est dit apériodique**

$\Delta = 0$ soit $m^2 = 1$: 1 racine double réelle : $r = -m\omega_o$

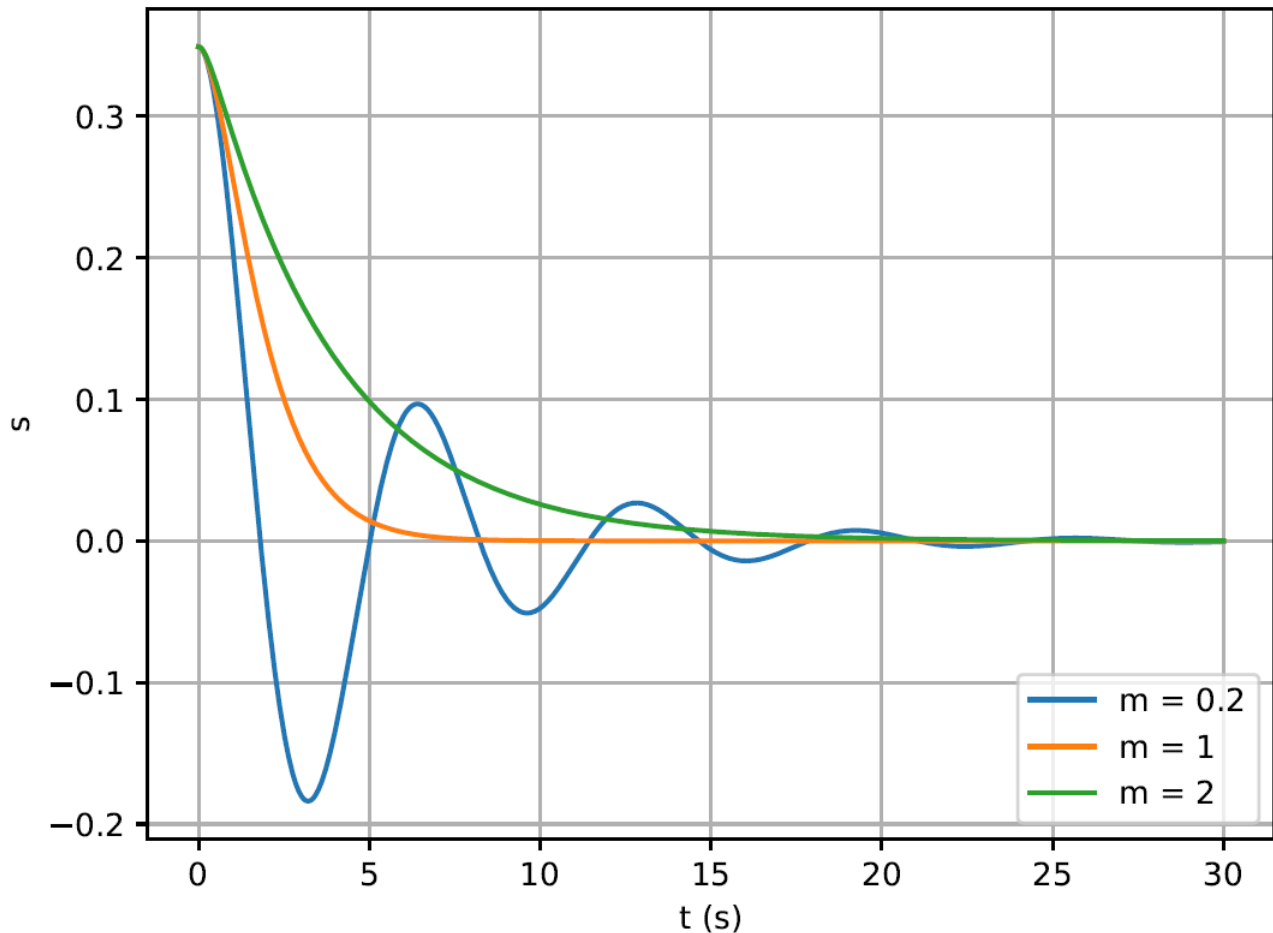
$s_{\text{hom}}(t) = (At + B)e^{rt}$, **le régime est dit critique**

$\Delta < 0$ soit $m^2 < 1$: 2 racines complexes

$$r_{1/2} = -m \omega_o \pm j \omega_o \sqrt{1-m^2} = -m \omega_o \pm j \Omega \text{ en posant } \Omega = \omega_o \sqrt{1-m^2} = \omega_o \sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}$$

$s_{hom}(t) = e^{-m\omega_o t} (A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t))$, **le régime est dit pseudopériodique**
de pseudo période $T = 2\pi/\Omega$ de coefficient d'amortissement m

Remarque : on a très souvent $m^2 \ll 1$ d'où $\Omega \approx \omega_o$



Fichier : ordre2_odeint.py

Conditions initiales : $s(t=0) = 0,35 \text{ V}$ et $ds/dt (t=0) = 0$

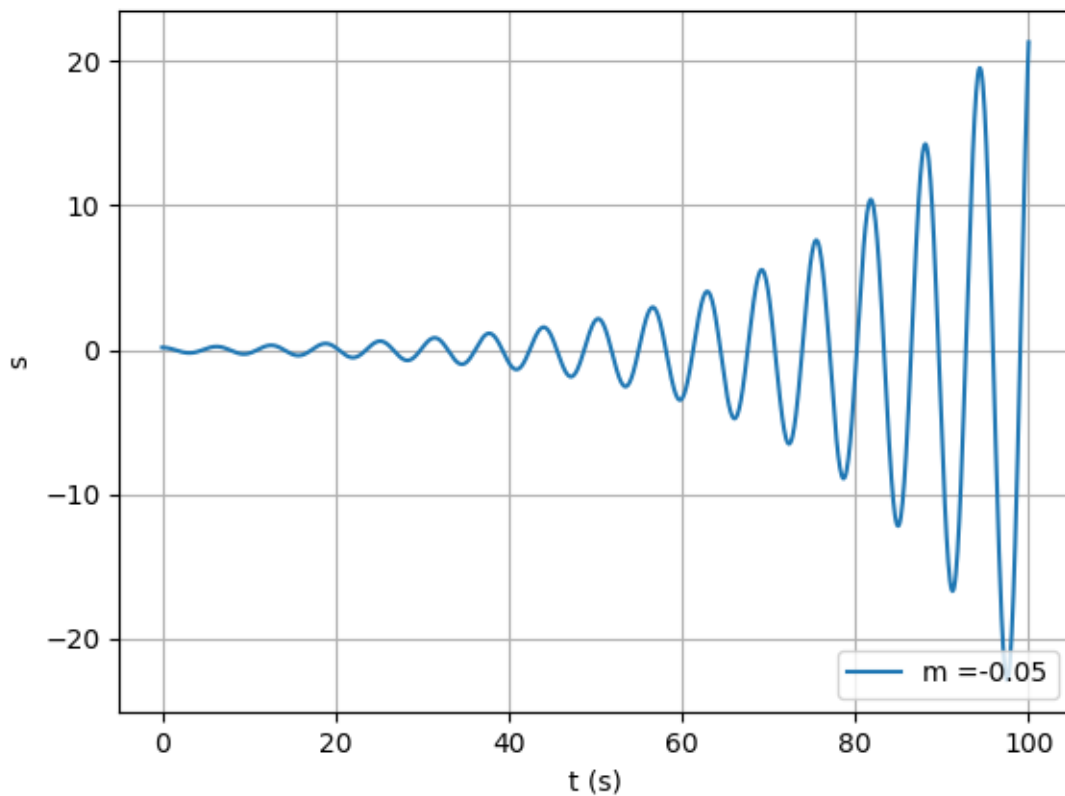
$m = 0,2$ régime pseudopériodique avec

$Q = 1/2m = 2,5$ ordre de grandeur du nombre de pseudoscillations avant le régime permanent

$m = 1$ régime critique

$m = 2$ régime apériodique

Vérifier que si $m > 0$ alors le système est stable



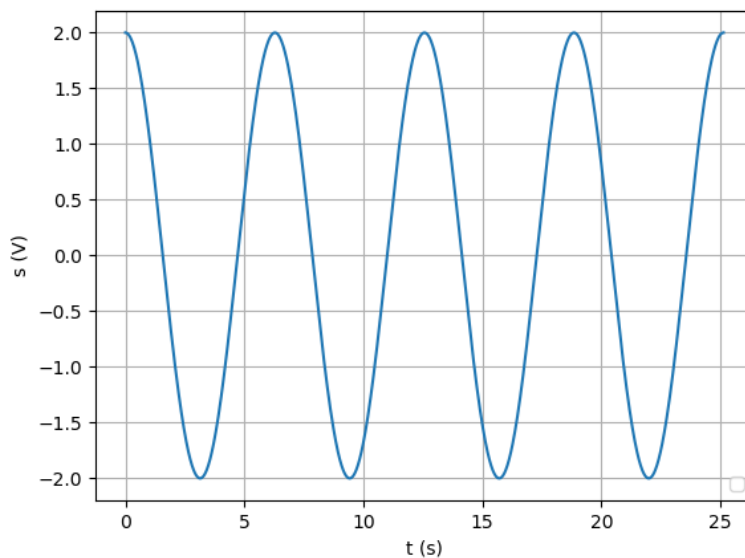
Conditions initiales : $s(t=0) = 0,35$ V et $ds/dt (t=0) = 0$.

$m < 0$, le régime est instable.

Ordre 2 $m = 0$: $\frac{d^2s}{dt^2} + \omega_o^2 s = 0$ **OSCILLATEUR HARMONIQUE**
 $s(t) = A.\cos(\omega_o t) + B.\sin(\omega_o t) = C. \cos(\omega_o t + \varphi)$

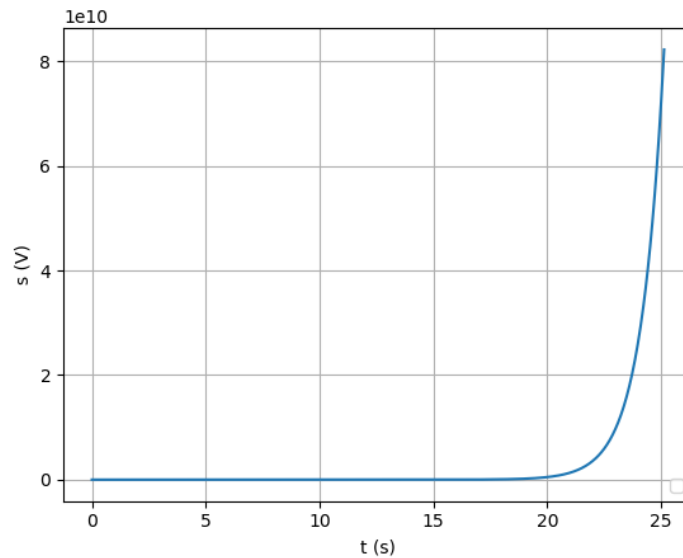
conditions initiales $s(0) = E = 2V$ et $\frac{ds}{dt}(0) = 0$; $\omega_o = 1 \text{ rad.s}^{-1}$; $T = 2\pi/\omega_o$

fichier Ordre2_odeint_OscHarm.py



$$\frac{d^2s}{dt^2} - \omega_o^2 s = 0 ; s(t) = A e^{-\omega_o t} + B. e^{+\omega_o t} ; s(0) = E = 2V \text{ et } \frac{ds}{dt}(0) = 0 ; \omega_o = 1 \text{ rad.s}^{-1}$$

Le système est INSTABLE



Critère de stabilité :

Un système d'ordre 1 ou 2 est stable lorsque tous les coefficients de l'équation différentielle homogène sont de même signe.

Un système d'ordre 1 ou 2 est stable lorsque tous les coefficients du polynôme en p du dénominateur de la fonction de transfert en notation de Laplace sont de même signe.

On admettra qu'il est possible de décomposer $H(j\omega)$ en éléments simples dont le dénominateur sera d'ordre ≤ 2 ; pour cette raison nous n'étudierons que des systèmes d'ordre ≤ 2 .

Remarque : Dans le cas d'un circuit ne comportant que des éléments passifs, le système est nécessairement stable, sauf s'il n'y a aucune résistance dans le circuit (cas théorique). Il faut utiliser au moins un composant actif (Amplificateur Linéaire Intégré ou circuit logique) pour apporter l'énergie nécessaire à déstabiliser le système.

Résumé ordre 2 passe-bande :

Equation différentielle canonique	Fonction de transfert canonique
$\frac{d^2 s}{dt^2} + 2m\omega_o \frac{ds}{dt} + \omega_o^2 s = 2m\omega_o H_o \frac{de}{dt}$ $\frac{d^2 s}{dt^2} + \frac{\omega_o}{Q} \frac{ds}{dt} + \omega_o^2 s = \frac{\omega_o}{Q} H_o \frac{de}{dt}$ Discriminant du polynôme caractéristique : $\Delta = 4\omega_o^2(m^2 - 1) = 4\omega_o^2 (1 - 1/4Q^2)$ Coefficient d'amortissement : $m = 1 / 2Q$ (peut avoir des définitions différentes) Pulsation propre : ω_o m petit, Q grand : régime indiciel pseudopériodique, la valeur de Q donne un ordre de grandeur des pseudopériodes avant amortissement m grand, Q petit : régime indiciel apériodique	$\underline{H} = H_o \frac{2jm\frac{\omega}{\omega_o}}{1+2jm\frac{\omega}{\omega_o}+(j\frac{\omega}{\omega_o})^2}$ $\underline{H}(p) = H_o \frac{2\frac{m}{\omega_o}p}{1+2\frac{m}{\omega_o}p+\left(\frac{p}{\omega_o}\right)^2}$ $\underline{H}(p) = H_o \frac{\frac{p}{Q\omega_o}}{1+\frac{p}{Q\omega_o}+\left(\frac{p}{\omega_o}\right)^2}$ $\underline{H}(j\omega) = \frac{H_o}{1+jQ\left(\frac{\omega}{\omega_o}-\frac{\omega_o}{\omega}\right)}$ Pulsation propre : ω_o largeur de la bande passante : $\Delta\omega$ Coefficient de qualité : $Q = \omega_o / 2m = \omega_o / \Delta\omega$ Q grand, $\Delta\omega$ petit : résonance aigue Q petit, $\Delta\omega$ grand : résonance floue
Critère de stabilité sur l'équation différentielle homogène : $\frac{d^2 s}{dt^2} + 2m\omega_o \frac{ds}{dt} + \omega_o^2 s = 0$	
Le système est stable si $m > 0$, en admettant que $\omega_o > 0$	