



Transport 4

Notions et contenus	Capacités exigibles	CdE
2. 4. Fluides en écoulement		
2. 4.1. Débits et lois de conservation		
Particule de fluide.	Définir la particule de fluide comme un système mésoscopique de masse constante.	CdE2 : 26.4
Champ eulérien des vitesses	Distinguer vitesse microscopique et vitesse mésoscopique. Définir une ligne de courant, un tube de courant	
Dérivée particulaire du vecteur vitesse : terme local ; terme convectif.	Associer la dérivée particulaire du vecteur vitesse à l'accélération de la particule de fluide qui passe en un point. Citer et utiliser l'expression de l'accélération avec le terme convectif sous la forme $(\vec{v} \cdot \vec{\text{grad}}) \vec{v}$.	CdE2 : 25.10
Masse volumique μ	Citer des ordres de grandeur des masses volumiques de l'eau et de l'air dans les conditions usuelles.	
Débit massique.	Définir le débit massique et l'écrire comme le flux du vecteur $\mu \vec{v}$ à travers une surface orientée.	CdE2 : 23.10 ; 25.3 ; 25.5
Conservation de la masse.	Écrire les équations bilans, globale ou locale, traduisant la conservation de la masse.	
Écoulement stationnaire.	Exploiter la conservation du débit massique le long d'un tube de courant.	CdE2 : 25.6
Débit volumique.	Définir le débit volumique et l'écrire comme le flux de \vec{v} à travers une surface orientée.	CdE2 : 23.9 ; 25.1 ; 25.2 ; 26.10
Écoulement incompressible et homogène.	Définir un écoulement incompressible et homogène par un champ de masse volumique constant et uniforme et relier cette propriété à la conservation du volume pour un système fermé. Exploiter la conservation du débit volumique le long d'un tube de courant indéformable.	CdE2 : 25.4 ; 25.7

Appendice 2 : outils mathématiques

Notions et contenus	Capacités exigibles
2.	
b) divergence	Citer et utiliser le théorème d'Ostrogradski.

Programme de 1ère année, 1er semestre

Thème 2 : mouvements et interactions (1)

Notions et contenus	Capacités exigibles
2.1. Description et paramétrage du mouvement d'un point	
Repérage dans l'espace et dans le temps Espace et temps classiques. Notion de référentiel. Caractère relatif du mouvement. Caractère absolu des distances et des intervalles de temps.	Citer une situation où la description classique de l'espace ou du temps est prise en défaut.

Cinématique du point Description d'un mouvement. Vecteur-position, vecteur-vitesse, vecteur-accélération. Systèmes de coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques.	Exprimer à partir d'un schéma le déplacement élémentaire dans les différents systèmes de coordonnées, construire le trièdre local associé et en déduire géométriquement les composantes du vecteur vitesse en coordonnées cartésiennes et cylindriques. Établir les expressions des composantes des vecteurs position, déplacement élémentaire, vitesse et accélération dans les seuls cas des coordonnées cartésiennes et cylindriques.	TD 11 AD 1 à 4
	Identifier les degrés de liberté d'un mouvement. Choisir un système de coordonnées adapté au problème.	
Mouvement à vecteur accélération constant.	Exprimer le vecteur vitesse et le vecteur position en fonction du temps. Etablir l'expression de la trajectoire en coordonnées cartésiennes.	
Mouvement circulaire uniforme et non uniforme.	Exprimer les composantes du vecteur-position, du vecteur-vitesse et du vecteur-accélération en coordonnées polaires planes.	
Repérage d'un point dont la trajectoire est connue. Vitesse et accélération dans le repère de Frenet pour une trajectoire plane.	Situer qualitativement la direction du vecteur vitesse et du vecteur accélération pour une trajectoire plane. Exploiter les liens entre les composantes du vecteur accélération, la courbure de la trajectoire, la norme du vecteur vitesse et sa variation temporelle. Réaliser et exploiter quantitativement un enregistrement vidéo d'un mouvement : évolution temporelle des vecteurs vitesse et accélération.	

Débits et lois de conservation

I. Décrire un fluide

Un fluide est un ensemble d'entités microscopiques (atomes, molécules, ...) occupant un volume dont la forme géométrique s'adapte aux **contraintes** extérieures (par exemple, les parois d'un récipient,...).

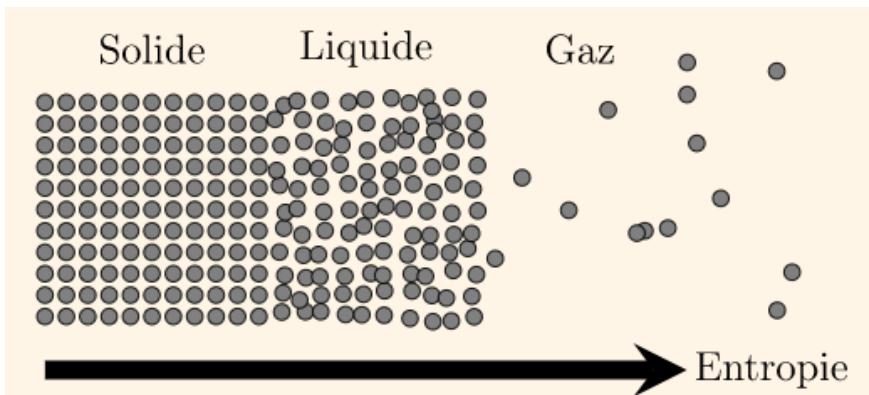
Les entités microscopiques peuvent se déplacer sur de grandes distances L par rapport à leur dimension caractéristique D .

état liquide $L \approx D$

état gazeux $L \gg D$.

Ces états de la matière s'opposent à l'état solide dans lequel les entités microscopiques gardent une organisation périodique invariable.

Remarque: en pratique, un solide soumis à des contraintes intenses peut subir des déformations ou certains liquides peuvent ne couler que si la contrainte appliquée est suffisante (pâte dentifrice...) etc... La frontière entre les deux types de comportement peut être floue.



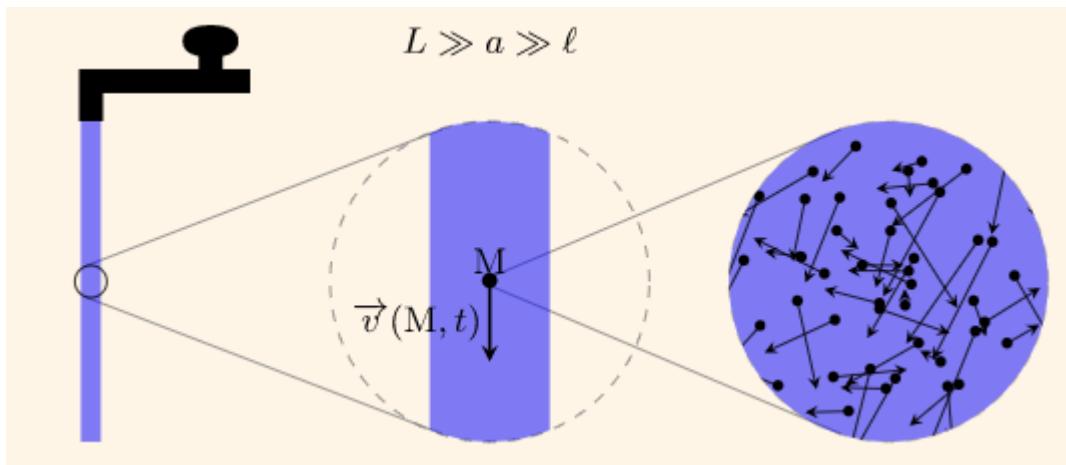
1. Échelles macroscopique et mésoscopique

Dans certains cas simples, par exemple le gaz monoatomique très peu dense, il est possible de faire une description à partir de l'étude mécanique détaillée des mouvements de toutes les particules élémentaires. On dit que l'on est à l'échelle **microscopique**.

Cependant, l'effet collectif des mouvements individuels des particules est perceptible à l'échelle **macroscopique** et peut être décrit par un petit nombre de grandeurs qui ne sont pas définies pour les particules individuelles.

Vu le très grand nombre de particules (de l'ordre de 10^{20} dans 1 mm^3 d'air ambiant), on peut envisager de découper le fluide en petits éléments de volume $d\tau$, qui sont petits à l'échelle macroscopique mais qui contiennent encore suffisamment de particules (par exemple 10^6) pour pouvoir définir des valeurs moyennes de grandeurs mécaniques, par exemple de la vitesse, ou définir des grandeurs thermodynamiques, par exemple la température ou la pression dans l'hypothèse de l'équilibre thermodynamique local.

Cette échelle sera appelée **mésoscopique** et dans la suite du cours, on n'utilisera plus l'échelle microscopique.



2. La particule de fluide

L'élément $d\tau$ de fluide de volume mésoscopique et de masse constante dm est appelé **particule du fluide** bien que ce ne soit pas une molécule ou un atome.

C'est un système FERME : sa masse ne varie pas

À un instant t donné, chaque point M du fluide est associé à une « particule » $d\tau$ pour laquelle sont définies les grandeurs $\vec{v}(M), \vec{a}(M), T(M), p(M)$ etc... qui constituent donc un ensemble de fonctions *continues* de l'espace:

Conclusion : À l'échelle macroscopique et mésoscopique, la matière est considérée comme **continue**.

En **statique des fluides** on considère que la particule de fluide (grandeur mésoscopique) est au repos, bien qu'à l'intérieur de celle-ci les atomes et/ou molécules microscopiques qui composent la particule de fluide soient en mouvement désordonné. La vitesse moyenne de toutes ces entités microscopiques est nulle.

Chaque particule fluide a un vecteur vitesse qui est la moyenne des vitesses microscopiques constituant la particule de fluide.

Le mouvement du fluide est décrit par la donnée de l'ensemble des vecteurs vitesse de toutes les particules fluides

Il existe alors deux modes de description possibles qui conduisent évidemment aux mêmes résultats.

3. Description de Lagrange

Le fluide est découpé en particules fermées de volume $d\tau$ et de masse dm .

Vidéo : incomp-fluid-element

S'il y a écoulement, cette particule est alors entraînée et l'on suit son mouvement au cours du temps.

Les grandeurs définies pour chaque particule ne dépendent donc *que du temps* : $\vec{v}(t)$, $\vec{a}(t)$, $T(t)$, $p(t)$ de même que sa position $\vec{r}(t)$.

Ce point de vue est celui adopté en mécanique du point matériel ou en mécanique du solide. On définit donc les grandeurs cinétiques de la particule : masse dm , énergie cinétique $de_C = \frac{1}{2} dm \cdot v^2$, quantité de mouvement $d\vec{p} = dm \cdot \vec{v}$, etc...

Dans la description de Lagrange, on suit une particule de fluide dans son mouvement dont la position $\vec{r}(t)$ varie au cours du temps.

La description de Lagrange est sympathique, puisqu'elle est identique à une description vue en mécanique du point et du solide, par contre elle est difficile à utiliser lorsqu'il s'agit d'exploiter par exemple des conditions aux limites, qui sont données en un point précis de l'espace et non plus pour une particule.

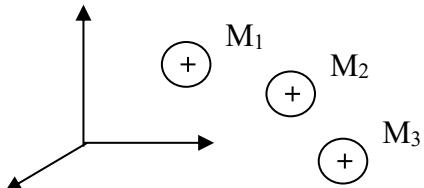
Exemples de conditions aux limites :

Vidéo Ecoulement autour d'un cube et d'un cylindre

Une vitesse qui s'annule sur un obstacle, continuité de la pression...

4. Description d'Euler

A chaque instant, le fluide est découpé en volumes élémentaires $d\tau$ centrés sur un ensemble de points **M fixes** par rapport au référentiel d'étude.



La position des points **M** ne change pas au cours du temps, mais les molécules contenues dans $d\tau$ *changent* à chaque instant. Cet élément forme un système *ouvert*.

Les grandeurs définies pour ce **volume élémentaire de contrôle** dépendent donc du temps *et* de la position **M** de ce volume. Ce sont donc des fonctions du type $\mu(M, t)$; $T(M, t)$; $P(M, t)$; $\vec{v}(M, t)$; $\vec{a}(M, t)$ que l'on appelle **des champs**. Ces champs peuvent être scalaires ou vectoriels.

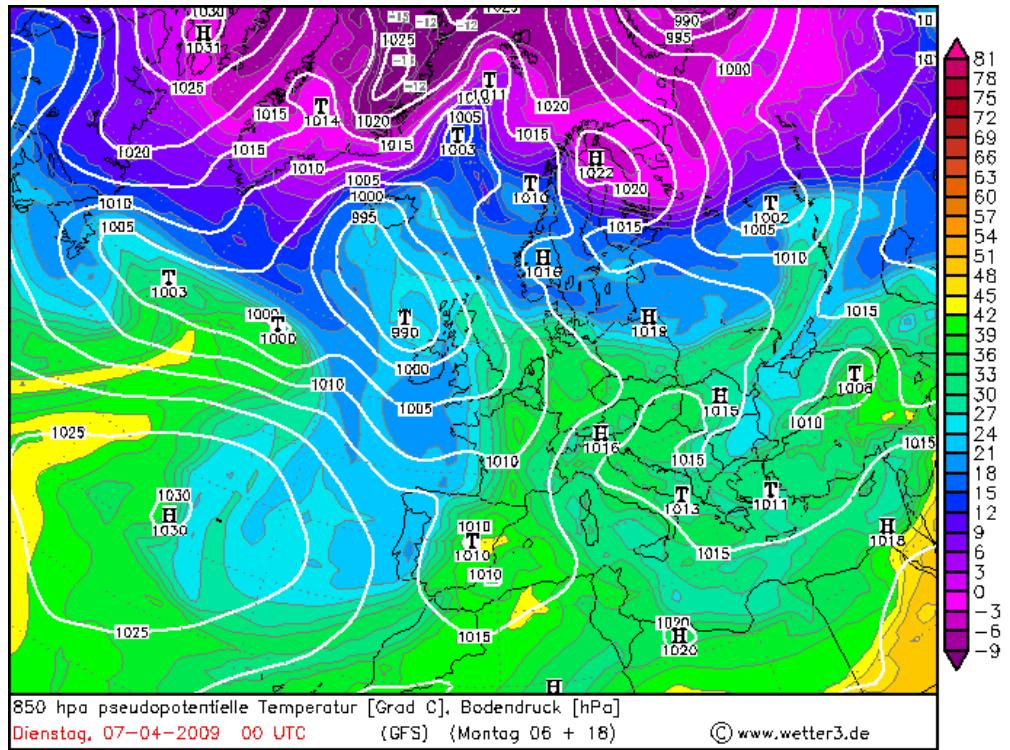
Expression d'un champ scalaire :

en coordonnées cartésiennes : $T(\vec{r}, t) = T(M, t) = T(x, y, z, t)$ c'est à priori une fonction de 4 variables, 3 variables d'espace x, y, z, et une variable de temps t.

en coordonnées polaires : $P(\vec{r}, t) = P(M, t) = P(r, \theta, t)$ c'est à priori une fonction de 3 variables, 2 variables d'espace r, θ et une variable de temps t.

en coordonnées sphériques : $\mu(\vec{r}, t) = \mu(M, t) = \mu(r, \theta, \phi, t)$ c'est à priori une fonction de 4 variables, 3 variables d'espace r, θ , ϕ et une variable de temps t.

Exemple d'une carte de champ de température (en couleur) et de pression (représentation des isobares)



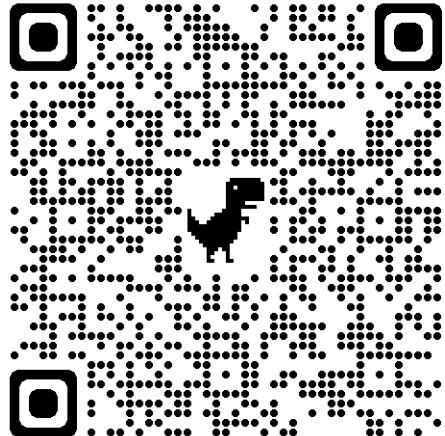
Rappel : les 3 systèmes de coordonnées

<http://ressources.univ-lemans.fr/AccesLibre/UM/Pedago/physique/02/meca/reperes.html>

II. Le champ des vitesses

1. Expression d'un champ vectoriel :

Dans un espace à 3 dimensions un champ vectoriel a, à priori 3 coordonnées et chaque coordonnée dépend de 4 variables : 3 variables d'espace et une variable de temps.



en coordonnées cartésiennes :

$$\vec{v}(\vec{r}, t) = v_x(x, y, z, t) \vec{u}_x + v_y(x, y, z, t) \vec{u}_y + v_z(x, y, z, t) \vec{u}_z$$

autre notation : $\vec{v}(\vec{r}, t) = \begin{pmatrix} v_x(x, y, z, t) \\ v_y(x, y, z, t) \\ v_z(x, y, z, t) \end{pmatrix}$

coordonnées cylindriques : $\vec{v}(\vec{r}, t) = v_r(r, \theta, z, t) \vec{u}_r + v_\theta(r, \theta, z, t) \vec{u}_\theta + v_z(r, \theta, z, t) \vec{u}_z$

autre notation : $\vec{v}(\vec{r}, t) = \begin{pmatrix} v_r(r, \theta, z, t) \\ v_\theta(r, \theta, z, t) \\ v_z(r, \theta, z, t) \end{pmatrix}$

en coordonnées sphériques : $\vec{v}(\vec{r}, t) = v_r(r, \theta, \varphi, t) \vec{u}_r + v_\theta(r, \theta, \varphi, t) \vec{u}_\theta + v_\phi(r, \theta, \varphi, t) \vec{u}_\phi$

autre notation : $\vec{v}(\vec{r}, t) = \begin{pmatrix} v_r(r, \theta, \varphi) \\ v_\theta(r, \theta, \varphi) \\ v_\phi(r, \theta, \varphi) \end{pmatrix}$

Si on est en coordonnées polaires, le champ vectoriel a, à priori 2 coordonnées qui dépendent chacune de 2 variables d'espace r, θ et une variable de temps t :

$$\vec{v}(\vec{r}, t) = v_r(r, \theta, t) \vec{u}_r + v_\theta(r, \theta, t) \vec{u}_\theta$$

autre notation : $\vec{v}(\vec{r}, t) = \begin{pmatrix} v_r(r, \theta, t) \\ v_\theta(r, \theta, t) \end{pmatrix}$

Un champ vectoriel est dit **unidirectionnel** s'il n'a qu'une seule coordonnée non nulle :

Champ unidirectionnel axial selon Ox : $\vec{v}(\vec{r}, t) = v_x(x, y, z, t) \vec{u}_x$

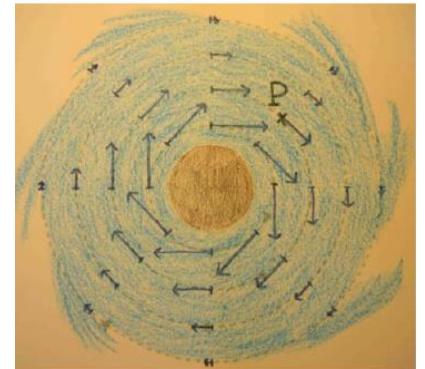
Champ unidirectionnel radial cylindrique selon la direction \vec{u}_r : $\vec{v}(\vec{r}, t) = v_r(r, \theta, z, t) \vec{u}_r$

Champ unidirectionnel orthoradial selon la direction \vec{u}_θ :

$$\vec{v}(\vec{r}, t) = v_\theta(r, \theta, z, t) \vec{u}_\theta$$

Champ unidirectionnel radial sphérique selon la direction

$$\vec{u}_r : \vec{v}(\vec{r}, t) = v_r(r, \theta, \varphi, t) \vec{u}_r$$



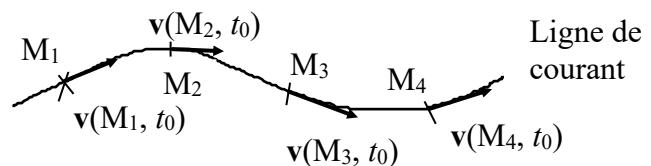
2. Exemples d'écoulements particuliers

https://femto-physique.fr/mecanique_des_fluides/cinematique.php ;
(voir simulations en fin de page) :

Champ des vitesses autour de l'œil d'un cyclone, la longueur du vecteur est proportionnelle à la valeur du champ en un endroit donné

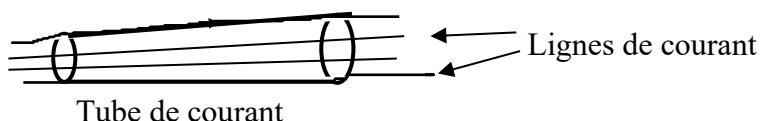
Les lignes de courant

Déf: Une **ligne de courant** est une ligne orientée du champ des vitesses c'est à dire une ligne tangente en chacun de ses points au vecteur $\vec{v}(M, t_0)$, à un instant t_0 fixé.



Tube de courant

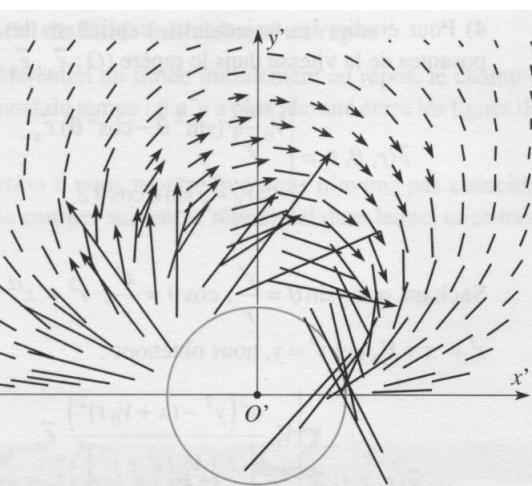
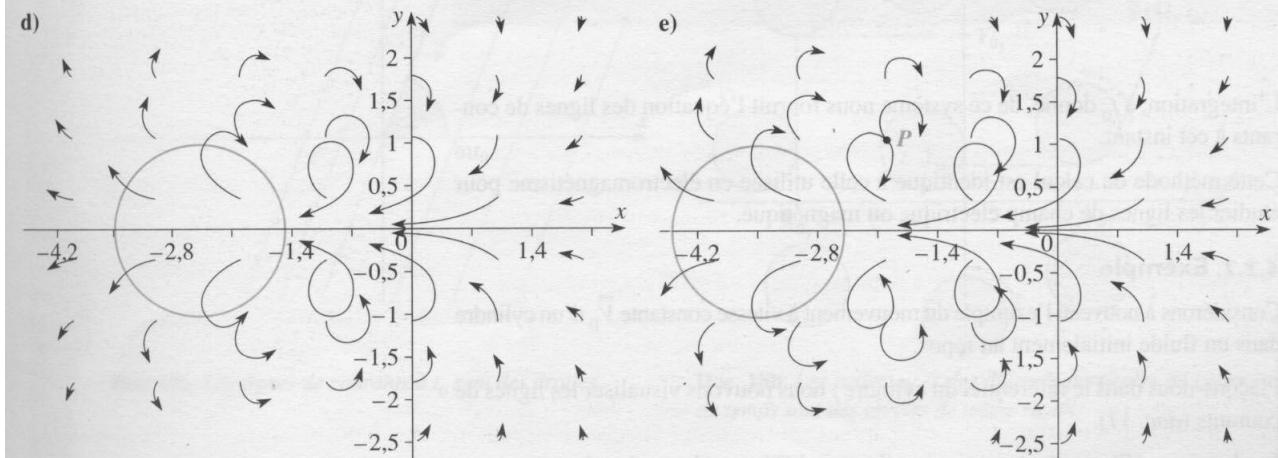
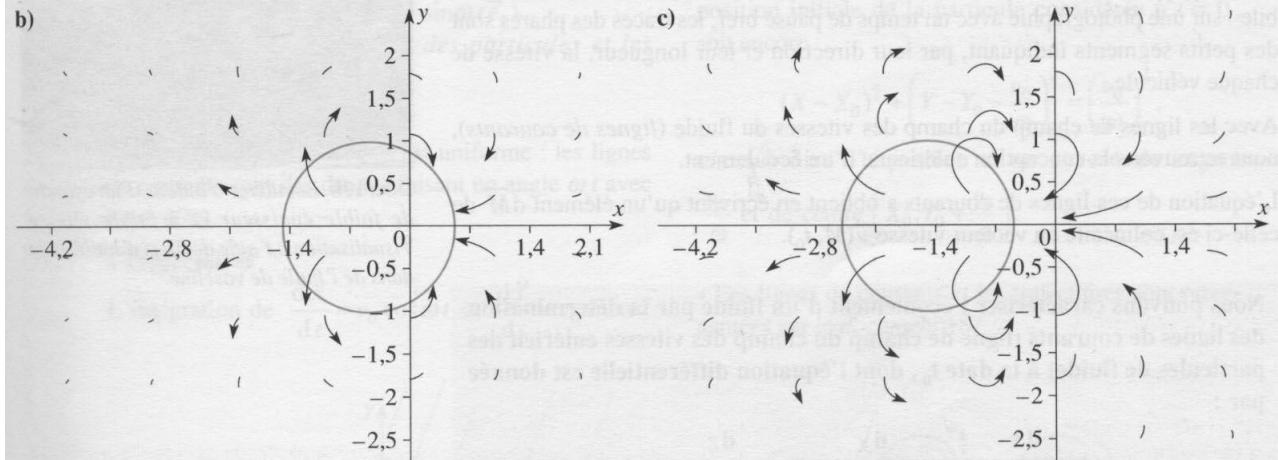
Déf: Un **tube de courant** est un tube du champ des vitesses c'est-à-dire un ensemble de lignes de courant s'appuyant sur un contour fermé donné



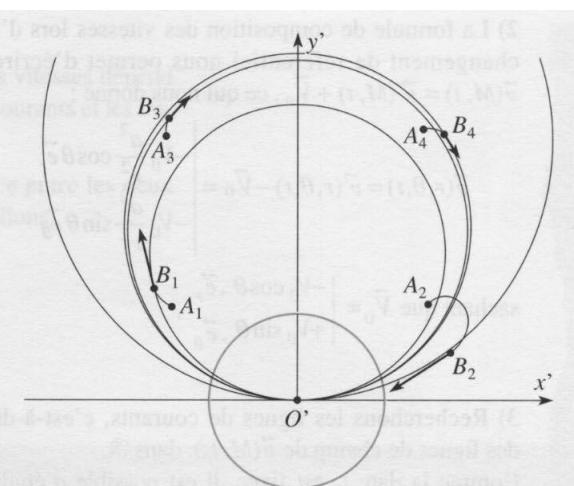
Trajectoires et lignes de courant : vidéo : [cylinder moving](#)

Considérons le mouvement à vitesse constante \vec{V}_0 d'un cylindre dans un fluide initialement au repos. Plaçons-nous dans le référentiel lié au fluide initialement immobile, nous pouvons visualiser les trajectoires de diverses particules de fluide au fur et à mesure du déplacement du cylindre (doc. 16).

Doc. 16b, c, d et e. Simulations montrant les trajectoires des particules de fluide lors de la progression d'un cylindre dans un fluide initialement au repos.



doc. 22c. Aperçu du champ des vitesses à une date t .



doc. 22d. Les lignes de courants sont des cercles.

III. Le champ des accélérations

1. Dérivée particulaire du vecteur vitesse

$$\vec{a}(\mathbf{M}, t) = \frac{D\vec{v}(\mathbf{M}, t)}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}(\mathbf{M}, t)}{\partial t} + (\vec{v}(\mathbf{M}, t) \cdot \vec{\text{grad}}) \vec{v}(\mathbf{M}, t)$$

2. Interprétation des deux termes de l'accélération

Accélération convective nulle : $(\vec{v}(\mathbf{M}, t) \cdot \vec{\text{grad}}) \vec{v}(\mathbf{M}, t) = \vec{0}$

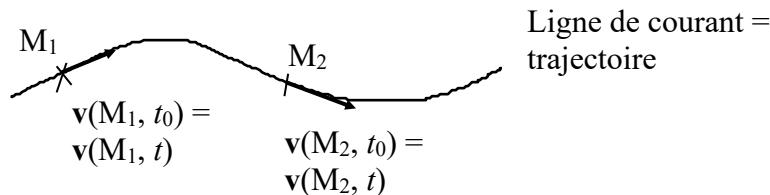
écoulement uniforme :

Déf: un champ est dit **uniforme** s'il ne dépend pas de la *position* du volume élémentaire de contrôle.

écoulement unidirectionnel visqueux :

Accélération locale nulle : écoulement stationnaire : $\frac{\partial \vec{v}(\mathbf{M}, t)}{\partial t} = \vec{0}$ donc $\vec{v}(\mathbf{M}, t) = \vec{v}(\mathbf{M})$

Vidéo : ldcstationnairesTrajectoireCylindre



La ligne de courant est alors confondue avec la trajectoire.

Exemple écoulement non stationnaires : vidéo cylinderNonStationnaire

Champs des accélérations dans un écoulement stationnaire = accélération convective

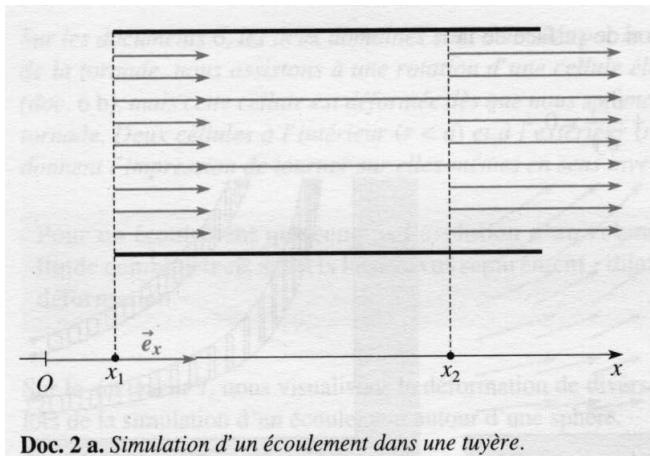
$$\vec{a}(\mathbf{M}) = \frac{D\vec{v}(\mathbf{M})}{Dt} = (\vec{v}(\mathbf{M}, t) \cdot \vec{\text{grad}}) \vec{v}(\mathbf{M})$$

Vidéo : incomp_fluid_element

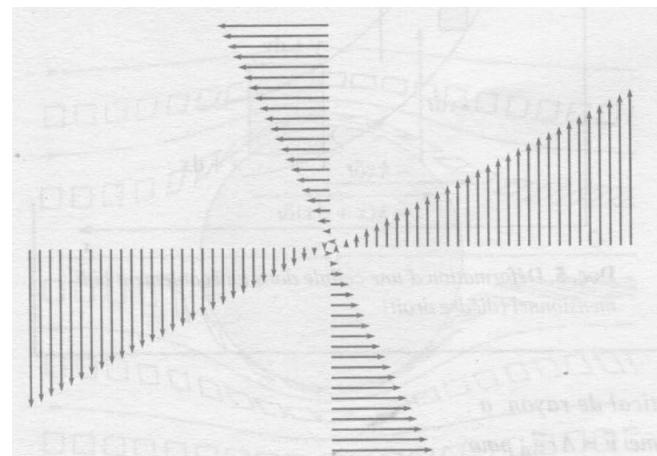
Lorsque l'écoulement n'est pas uniforme il existe un champ d'accélération non nul

Cartes de champ d'écoulements stationnaires

Sur chaque carte de champ, en suivant une particule de fluide pendant son mouvement, déterminer l'expression de l'accélération.



Doc. 2 a. Simulation d'un écoulement dans une tuyère.



Doc. 3 a. Visualisation du champ des vitesses d'un écoulement dans l'œil d'une tornade.

IV. La loi de conservation de la masse

1. La masse volumique

$$\mu(M) = \frac{dm}{dt}(M) \quad [\mu] = \text{kg.m}^{-3}$$

grandeur intensive : elle ne dépend pas de la quantité du système par opposition à une **grandeur extensive** qui dépend de la quantité du système.

Fluide compressible : si $\mu(M)$ dépend du point M , cas des gaz en général.

« Quand on appuie sur un gaz son volume diminue »

$$\text{Pour un gaz parfait de masse molaire } M_{\text{gaz}} : \mu(T, P) = \frac{m}{V} = \frac{nM_{\text{gaz}}}{V} = \frac{PM_{\text{gaz}}}{RT}$$

$$\text{AN : l'air sous 1 bar à 300 K} \quad \mu(T, P) = \frac{PM_{\text{gaz}}}{RT} = \frac{10^5 \times 0,029}{8,31 \times 300} \approx 1,2 \text{ kg.m}^{-3}$$

Pour une variation de pression de 1 bar sur de l'eau vapeur à 100°C, la variation relative de masse volumique est 100 %

Fluide incompressible : μ est une constante caractéristique du fluide, cas des liquides.

« Quand on appuie sur un liquide son volume ne varie pas »

$$\mu_{\text{eau}} = 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$$

Pour une variation de pression de 1 bar sur de l'eau liquide à 25°C, la variation relative de masse volumique est 0,02 %

2. Débit de masse (ou débit massique) en kg.s^{-1}

a. Définition

$$\text{Masse qui traverse une surface orientée par unité de temps : } Dm = \frac{\delta m}{dt}$$

b. Ecoulement unidirectionnel

$$\text{Axial dans un tuyau de section } S \text{ constante : } \vec{v}(M, t) = v(x, t) \vec{u}_x \quad Dm = \frac{\delta m}{dt} = \mu(x, t) v(x, t) S$$

Radial cylindrique : $S(r) =$ surface latérale d'un cylindre de hauteur h de rayon r

$$\vec{v}(M, t) = v(r, t) \vec{u}_r \text{ et } Dm = \mu(r, t) v(r, t) \cdot S(r) = \mu(r, t) v(r, t) 2\pi r h$$

Radial sphérique : $S(r) =$ surface d'une sphère de rayon r

$$\vec{v}(M, t) = v(r, t) \vec{u}_r \text{ et } Dm = \mu(r, t) v(r, t) \cdot S(r) = \mu(r, t) v(r, t) 4\pi r^2$$

c. Cas général

$$Dm = \frac{\delta m}{dt} = \varphi(\mu \vec{v}) = \iint_S \mu \vec{v} \cdot d\vec{S}$$

Si $\vec{v}(M, t)$ est uniforme sur S et si $d\vec{S}$ et $\mu \vec{v}$ sont colinéaires : $Dm = \frac{\delta m}{dt} = \mu(M, t) v(M, t) S$

d. Applications

Ecoulement orthoradial

Ecoulement visqueux

e. Expressions des surfaces élémentaires dans les différents systèmes de coordonnées

3. **Bilan de masse dans un système ouvert**

a. Expression générale du bilan : $m(t+dt) - m(t) = \delta m_e - \delta m_s$

$$\text{Avec } m(t+dt) - m(t) = \frac{dm}{dt} \cdot dt \quad \text{et} \quad \delta m_e = Dm_e \cdot dt \quad \delta m_s = Dm_s \cdot dt$$

$$\rightarrow \text{Equation globale de conservation de la masse : } \frac{dm}{dt} = Dm_e - Dm_s$$

« La variation de masse par unité de temps dans un système ouvert est égale au débit massique entrant retranché au débit massique sortant »

b. Pour un écoulement unidirectionnel : équation locale de conservation de la masse

$$\mu(x, t) \text{ et } \vec{v}(x, t) = v(x, t) \vec{u}_x \quad \left(\frac{\partial \mu}{\partial t} \right)_x + \left(\frac{\partial \mu v}{\partial x} \right)_t = 0$$

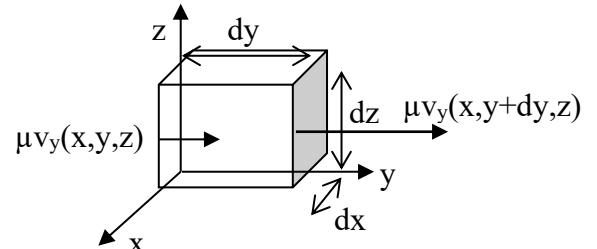
c. Pour un écoulement tridimensionnel : équation locale de conservation de la masse

$$\mu(M, t) \text{ et } \vec{v}(M, t) \quad \frac{\partial \mu}{\partial t} + \operatorname{div}(\mu \vec{v}) = 0$$

Démonstration : bilan de masse dans un cube élémentaire

La variation de masse par unité de temps dans le cube élémentaire est $\frac{dm}{dt} = \frac{\partial \mu(M, t)}{\partial t} dx dy dz$

Déterminons $Dm_e - Dm_s = \delta \Phi(\mu \vec{v})_e - \delta \Phi(\mu \vec{v})_s$



Avec $\delta \Phi(\mu \vec{v})_e$ flux élémentaire de densité de courant de masse entrant dans le cube élémentaire à travers les faces d'entrée : gauche, devant, dessous et

$\delta \Phi(\mu \vec{v})_s$ flux élémentaire de densité de courant de masse entrant dans le cube élémentaire à travers les faces d'entrée : droite, derrière, dessus

On pose : $\vec{v}(M, t) = v_x(x, y, z) \vec{u}_x + v_y(x, y, z) \vec{u}_y + v_z(x, y, z) \vec{u}_z$.

$$\begin{aligned} \delta \Phi = \delta \Phi(\mu \vec{v})_e - \delta \Phi(\mu \vec{v})_s &= -(\mu v_x)(x, y, z) + (\mu v_x)(x + dx, y, z)] dy dz + \\ &- (\mu v_x)(x, y, z)] + (\mu v_x)(x, y + dy, z)] dx dz + \\ &- (\mu v_x)(x, y, z) + (\mu v_x)(x, y, z + dz)] dx dy \end{aligned}$$

$$\text{donc: } \delta \Phi = -\frac{\partial \mu v_x}{\partial x} dx dy dz - \frac{\partial \mu v_y}{\partial x} dx dy dz - \frac{\partial \mu v_z}{\partial x} dx dy dz = -\left(\frac{\partial \mu v_x}{\partial x} + \frac{\partial \mu v_y}{\partial y} + \frac{\partial \mu v_z}{\partial z} \right) dx dy dz.$$

Et on pose $\delta \Phi = \operatorname{div}(\mu \vec{v}) dx dy dz$

$$\text{D'où } Dm_e - Dm_s = -\operatorname{div}(\mu \vec{v}) dx dy dz = \frac{dm}{dt} = \frac{\partial \mu(M, t)}{\partial t} dx dy dz \quad \text{d'où} \quad \frac{\partial \mu}{\partial t} + \operatorname{div}(\mu \vec{v}) = 0 \quad \text{CQFD}$$

V. Définition de l'opérateur divergent :

1. Expression de l'opérateur divergent dans les différents systèmes de coordonnées

Coordonnées cartésiennes

On pose $\vec{A} = A_x(x, y, z) \vec{u}_x + A_y(x, y, z) \vec{u}_y + A_z(x, y, z) \vec{u}_z$ alors $\operatorname{div} \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$.

Coordonnées cylindriques

On pose $\vec{A} = A_r(r, \theta, z) \vec{u}_r + A_\theta(r, \theta, z) \vec{u}_\theta + A_z(r, \theta, z) \vec{u}_z$ alors $\operatorname{div} \vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$.

Coordonnées sphériques

On pose $\vec{A} = A_r(r, \theta, \phi) \vec{u}_r + A_\theta(r, \theta, \phi) \vec{u}_\theta + A_\phi(r, \theta, \phi) \vec{u}_\phi$ alors

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} (r A_\phi).$$

2. Théorème d'Ostrogradski

Soit $\vec{A}(r, t)$ un champ de vecteur défini sur tout l'espace.

Il existe un unique champ scalaire appelé divergence de \vec{A} et noté $\operatorname{div} \vec{A}$, tel que pour tout volume V limité par une surface fermée S , orientée par sa normale extérieure, le flux de \vec{A} à travers S est égal à l'intégrale de $\operatorname{div} \vec{A}$ sur le volume V .

$$\Phi(\vec{A}) = \iint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} = \iiint_{V(S)} \operatorname{div} \vec{A} d\tau.$$

Remarque: $\operatorname{div} \vec{A}$ est un champ de scalaires.

$$\operatorname{div}(\overrightarrow{\text{vecteur}}) = \text{scalaire}$$

3. Application à l'équation locale de conservation de la masse

4. Cas de l'écoulement stationnaire

Un écoulement est dit stationnaire si l'ensemble des champs eulériens ne dépend pas du temps.
 Un champ est dit **stationnaire** (ou permanent ou constant) s'il ne dépend pas du *temps*.

Pour un écoulement stationnaire :

- ➔ Equation globale de conservation de la masse : $\frac{dm}{dt} = Dm_e - Dm_s = 0$
- ➔ $\operatorname{div}(\mu \vec{v}) = 0$
- ➔ Le flux de $\mu \vec{v}$ à travers une surface fermée est nul (Théorème d'Ostrogradski)
- ➔ Le flux de $\mu \vec{v}$ se conserve dans un tube de champ ; $Dm_e = Dm_s$

VI. L'écoulement incompressible et homogène : $\mu = \text{constante}$

écoulements d'eau

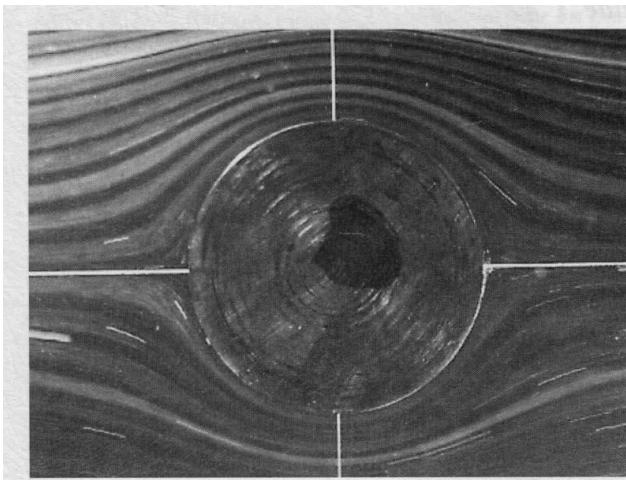
écoulements d'air si $v_{\text{air}} \ll c_{\text{son}}$ dans l'air (nombre de Mach : $M = v/c_{\text{son}} < 1$) ,

Vidéos : `incomp_fluid_element` ; `PartFluideTubeDiv` ;

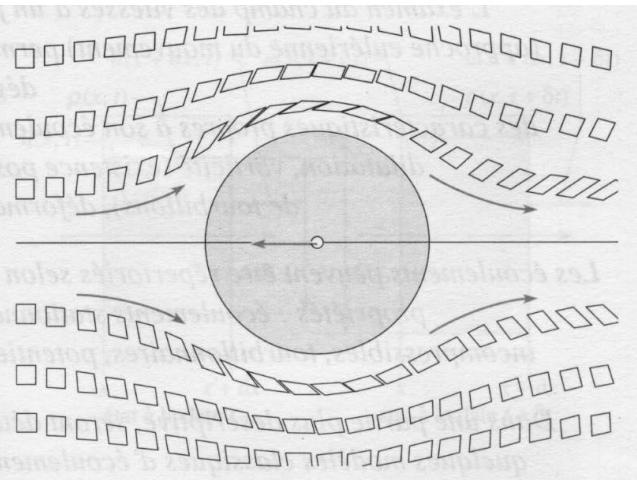
- ➔ Le volume de la particule fluide se conserve
- ➔ Equation locale de conservation de la masse $\text{div}(\mu \vec{v}) = 0$
- ➔ Le flux de \vec{v} à travers une surface fermée est nul (Théorème d'Ostrogradski)
- ➔ Le flux de \vec{v} se conserve dans un tube de champ ; $Dv_e = Dv_s$
- ➔ Définition du débit de volume en $\text{m}^3.\text{s}^{-1}$: $Dv = \frac{\delta V}{dt} = \varphi(\vec{v}) = \iint_S \vec{v} \cdot d\vec{S}$

Cartes de champ d'écoulements incompressibles et homogènes

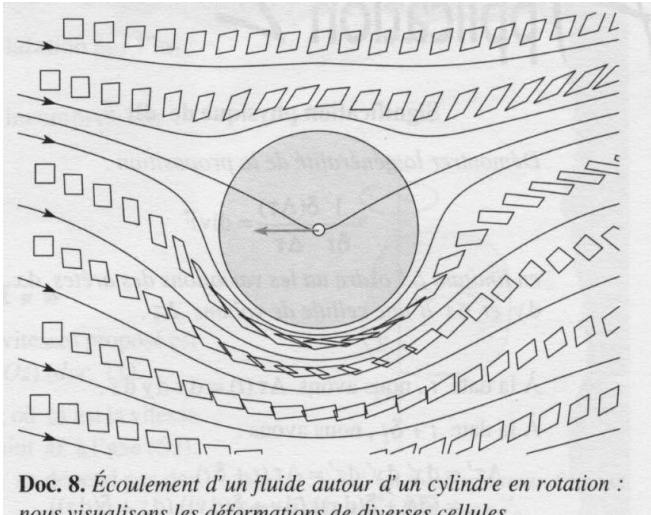
Vidéos : [écoulement_Incomp](#) ; [écoulement_Incomp2](#)



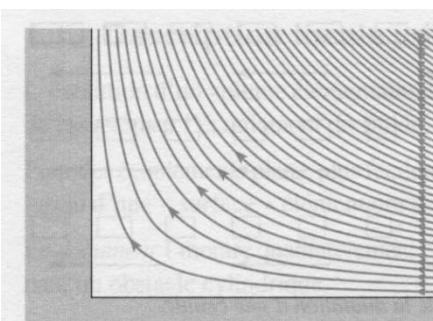
Doc. 1 a. Écoulement permanent indépendant du temps (stationnaire) autour d'un cylindre : cet écoulement d'eau symétrique (et réversible) a lieu de la gauche vers la droite. Il peut être visualisé grâce à des filets d'huile de lin dans de l'huile de vaseline.



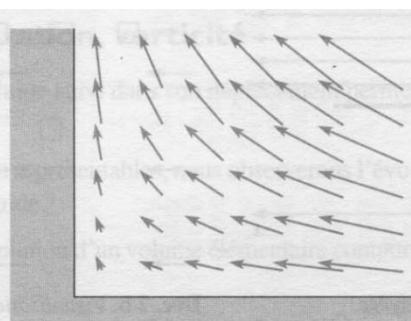
Doc. 1 b. Simulation numérique de cet écoulement montrant l'évolution d'un volume élémentaire.



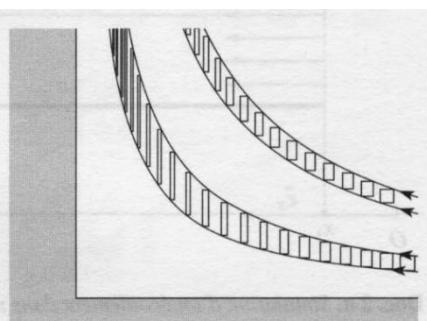
Doc. 8. Écoulement d'un fluide autour d'un cylindre en rotation : nous visualisons les déformations de diverses cellules.



Doc. 4 a. Lignes de courant de l'écoulement bidimensionnel (dièdre droit).



Doc. 4 b. Champ des vitesses du même écoulement bidimensionnel (dièdre droit).



Doc. 4 c. Déformation d'une cellule dans cet écoulement bidimensionnel (dièdre droit).

Condition à la limite sur un obstacle : [video verticalplate](#)

Exemples d'écoulement compressible

Vidéos : airfoil_schokwave ; mur du son

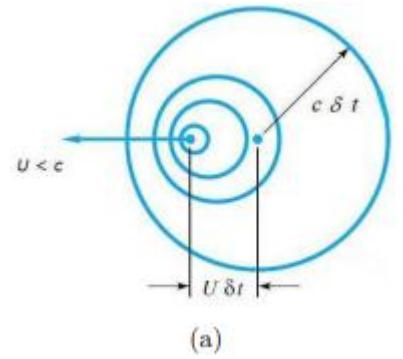
Au passage du mur du son l'écoulement d'air autour de l'avion est compressible



Une onde de choc correspond à une zone d'écoulement de très faible épaisseur, inférieure à 1 mm, qui fait la transition entre l'amont où la vitesse est supersonique (supérieure à la vitesse du son) et l'aval où elle est subsonique (inférieure à la vitesse du son). Dans le même espace, la pression est en très forte augmentation. Ainsi, les particules du fluide lors de leur traversée de l'onde de choc subissent une décélération extrêmement forte qui peut atteindre 10^9 à 10^{10} m /s², soit environ un milliard de g. C'est cet impact violent, produisant un véritable choc sur les particules, qui est à l'origine du nom donné à cette zone de transition.

Projectile P subsonique U (vitesse du projectile) < c (vitesse du son)

Au bout d'un temps δt , le projectile a parcouru $U\delta t$, alors que l'onde sonore a parcouru $c\delta t$ (Fig.a). La perturbation sonore créée en un point n'est jamais superposée à la perturbation créée en un autre point. Le projectile est précédé par les ondes sonores qui produisent des déformations anticipant l'approche de l'obstacle.



Projectile P supersonique $U > c$

Les ondes sphériques sont inscrites dans un cône enveloppe (Fig.b). La zone extérieure au cône est une zone de silence. Les ondes sont reçues dans l'ordre inverse de l'ordre d'émission. Les ondes de compression se concentrent sur ce cône appelé cône de Mach. Les particules de fluide ne peuvent subir aucune adaptation avant de recevoir le projectile. En conséquence, elles subissent de façon discontinue une brusque variation de vitesse, c'est le phénomène de choc. Il y a une brutale discontinuité de vitesse, de pression, de température et de masse volumique. Cela s'accompagne d'une dégradation de l'énergie et l'entropie augmente.

