Notions et contenus	Capacités exigibles	CdE
2. 4. Fluides en écoulement		
2. 4.2 Actions de contact sur un fluide		
Pression.	Identifier la force de pression comme étant une action normale à la surface. Utiliser l'équivalent volumique des actions de pression -$\overrightarrow{grad}P$.	CdE1 : 21.1 ; 21.2 CdE2 : 26.3
Éléments de statique des fluides.	Exprimer l'évolution de la pression avec l'altitude dans les cas d'un fluide incompressible et de l'atmosphère isotherme dans le modèle du gaz parfait.	CdE 1 : 21.3 à 21.19 ; 21.21 CdE 2 : 26.5 ; 26.8 ; 26.9
Viscosité dynamique.	Relier l'expression de la force surfacique de viscosité au profil de vitesse dans le cas d'un écoulement parallèle. Exprimer la dimension du coefficient de viscosité dynamique. Citer l'ordre de grandeur de la viscosité de l'eau. Citer la condition d'adhérence à l'interface fluide-solide.	CdE 2 : 26.11

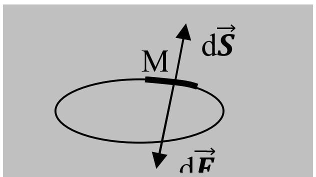
http://culturesciencesphysique.ens-lyon.fr/la-physique-animee/forces-de-viscosite-pour-un-fluide-equation-de-navier-stokes

Appendice 2 : outils mathématiques

1. Analyse vectorielle		
Gradient	Relier le gradient à la différentielle d'un champ scalaire à t fixé. Exprimer les composantes du gradient en coordonnées cartésiennes. Utiliser un formulaire fourni en coordonnées cylindriques ou sphériques Utiliser le fait que le gradient d'une fonction f est perpendiculaire aux surfaces iso-f et orienté dans le sens des valeurs de f croissantes.	CdE 2 : 1.1 ; 1.2

I. La pression

1. Définition :



Fluide au repos

La pression P(M) en un point M quelconque d'un fluide est définie par : $d\vec{F} = -P(M)d\vec{S}$où $d\vec{S}$est un élément de surface quelconque entourant le point M, orienté par sa normale extérieure.
p(M) est un ***scalaire positif.***
Une pression est une ***force par unité de surface.*** 1 Pa = 1 N.m^{-2} ;
unité usuelle 1 bar = 10^5 Pa ; il existe d'autres unités…

Les forces de pression sont ***normales*** à la surface.

La ***résultante*** des forces de pression est calculée par l'intégrale vectorielle

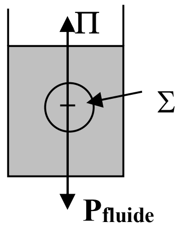
$$\vec{F} = \iint_{surface} -P(M)d\,\vec{S}$$

On intègre sur tous les points M de la surface où s'exerce la pression P.

Si la pression est uniforme, la résultante des forces de pression sur une surface fermée est nulle.

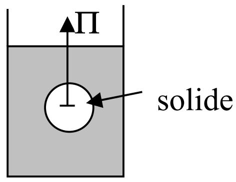
Sur des variations d'altitude inférieures à 100m on supposera la pression de l'air uniforme.

2. Théorème d'Archimède



Soit la partie Σ du fluide en équilibre sous l'effet de son poids $\vec{P}$ et des forces de pression exercées par le fluide.
On appelle **$\vec{\Pi}$ la résultante des force de pression, ou poussée d'Archimède.**

A l'équilibre $\vec{P}_{fluide} + \vec{\Pi} = \vec{0}$.



Si on remplace Σ, par un solide de même forme telle que la répartion des forces de pression exercées par le fluide sur le solide ne soit pas modifiée par rapport à la situation précédente, la poussée d'Archimède qui s'exerce sur le solide est toujours

$$\vec{\Pi} = -\vec{P}_{fluide}.$$

D'où l'énoncé du **théorème d'Archimède**:

La **poussée d'Archimède** $\vec{\Pi}$ exercée sur un système par le fluide dans lequel il est complètement immergé est opposé au poids du fluide déplacé. Elle s'exerce en C, centre de poussée, centre de gravité du fluide déplacé.

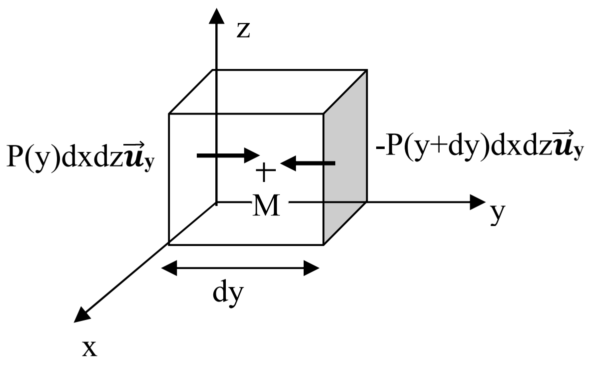
Que vaut la poussée d'Archimède si la pression est uniforme ?

Applications : Déterminer le volume immergé d'un iceberg.

Pourquoi un ballon gonflé à l'hélium s'envole-t-il ?

3. Résultante volumique des forces de pression

Considérons comme système un cube élémentaire, au voisinage d'un point M, de volume $d\tau = dxdydz$, soumis à des forces élémentaires de pression surfaciques $P(M)d\vec{S}$.



Sur la face d'abscisse y, s'exerce la force de pression P(y)dxdz$\vec{u}_y$.

Sur la face d'abscisse y+dy, s'exerce la force de pression -P(y+dy)dxdz$\vec{u}_y$.

On appelle d$\vec{F}_y$ la résultante des forces de pression qui s'exercent sur les faces d'abscisse y et y+dy.

$$d\vec{F}_y = (P(y) - P(y+dy))dxdz\,\vec{u}_y = -\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) dy\,dxdz\,\vec{u}_y.$$

Par analogie, on appelle d$\vec{F}_x$ la résultante des forces de pression qui s'exercent sur les faces d'abscisse x et x+dx.

$$d\vec{F}_x = (P(x) - P(x+dx))dydz\,\vec{u}_x = -\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) dx\,dydz\,\vec{u}_x.$$

et d$\vec{F}_z$ la résultante des forces de pression qui s'exercent sur les faces d'abscisse z et z+dz.

$$d\vec{F}_z = (P(z) - P(z+dz))dxdz\,\vec{u}_z = -\left(\frac{\partial P}{\partial z}\right) dz\,dydx\,\vec{u}_z.$$

Soit en vecteur colonne : $d\vec{F} = \begin{pmatrix} dF_x \\ dF_y \\ dF_z \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} \\ \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial P}{\partial z} \end{pmatrix} dxdydz = -\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} P(M)d\tau = -\overrightarrow{grad}P(M)d\tau$

Donc on peut écrire que la résultante des forces de pression est sur le volume dτ :

$$\boxed{d\vec{F} = -\overrightarrow{grad}P(M)d\tau}$$

Si la pression est uniforme P(M) = P° = const et $\overrightarrow{grad}P(M) = \vec{0}$, la résultante des forces de pression sur une surface fermée est nulle.

4. <u>L'opérateur gradient d'un champ scalaire</u>

<u>a) Définition</u>

La différentielle du champ scalaire $U(\vec{r},t)$ est: $\boxed{dU = \overrightarrow{grad}\,U.d\vec{r} + \frac{\partial U}{\partial t}dt\;.}$

A une date t fixée: $\boxed{dU = \overrightarrow{grad}\,U.d\vec{r}}$, où $d\vec{r}$ est le vecteur déplacement élémentaire.

Remarques : On note aussi $\overrightarrow{grad}\,U = \vec{\nabla}U$ ($\vec{\nabla}$ est l'opérateur nabla).

$\overrightarrow{grad}\,U$ est un champ de <u>vecteurs.</u>

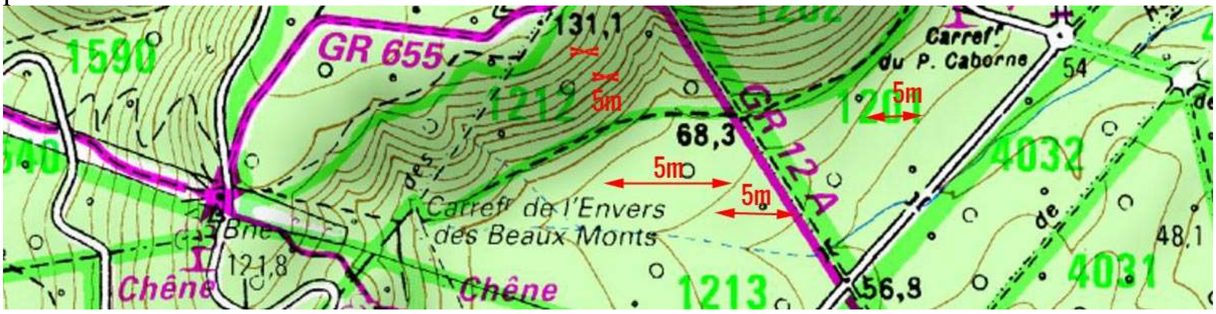
$$\overrightarrow{\boldsymbol{grad}}(\boldsymbol{scalaire}) = \overrightarrow{\boldsymbol{vecteur}}$$

Soit $d\vec{r}$ un déplacement élémentaire sur une surface telle que U = Constante. Sur cette surface $d\,U = 0 = \overrightarrow{grad}\,U.d\,\vec{r}$ donc $\overrightarrow{grad}U$ est perpendiculaire à $d\vec{r}$.

$\overrightarrow{gradU}$ est perpendiculaire aux surfaces « isoU » et est orienté dans le sens croissant de ces surfaces.

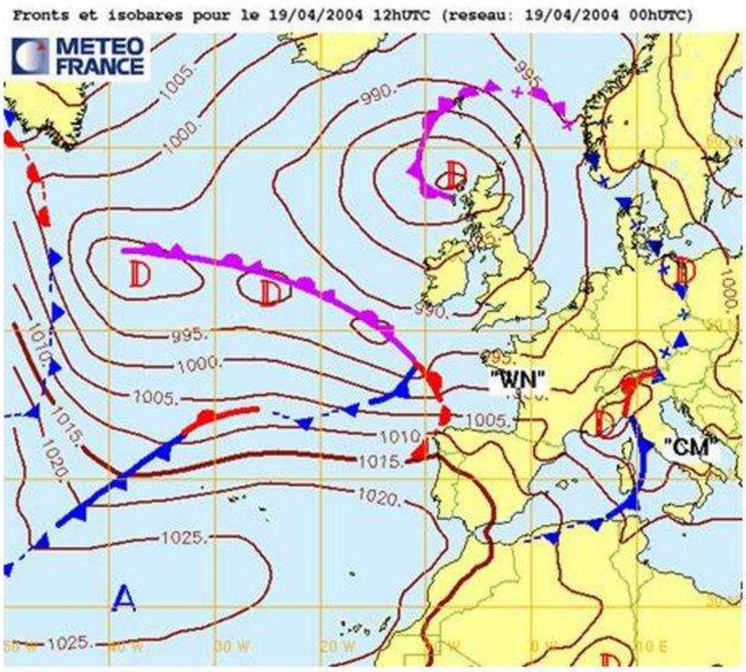
Les courbes de niveaux : ce sont des courbes à altitude constante.

La différence d'altitude entre deux courbes de niveau est toujours la même, ici $\Delta z = 5$m.
Plus les courbes de niveaux sont resserrées plus le gradient d'altitude est important et donc plus la pente est forte.



Courbes isobares : ce sont des courbes de pression constante

La différence de pression entre deux courbes est toujours la même ici 5 mbar. Lorsque les courbes se resserrent la valeur du gradient de pression devient plus importante.



b) Expressions

Coordonnées cartésiennes

U(x,y,z) donc

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_{y,z} dx + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)_{x,z} dy + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)_{x,y} dz = \begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} \\ \frac{\partial U}{\partial y} \\ \frac{\partial U}{\partial z} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} U . \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = \overrightarrow{grad}\, U . d\vec{r}$$

En identifiant :

$$\boxed{\overrightarrow{grad}\, U = \begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} \\ \frac{\partial U}{\partial y} \\ \frac{\partial U}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} U}$$

$$d\vec{r} = dx\,\vec{u}_x + dy\,\vec{u}_y + dz\,\vec{u}_z,$$

$$\boxed{\overrightarrow{grad}\, U = \vec{\nabla} U = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{u}_x + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{u}_y + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{u}_z\ .}$$

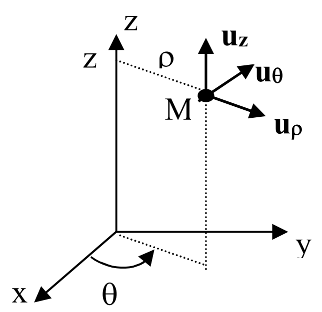
Remarque: $\vec{\nabla}$ est donc l'opérateur: $\boxed{\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{u}_x + \frac{\partial}{\partial y}\vec{u}_y + \frac{\partial}{\partial z}\vec{u}_z}$

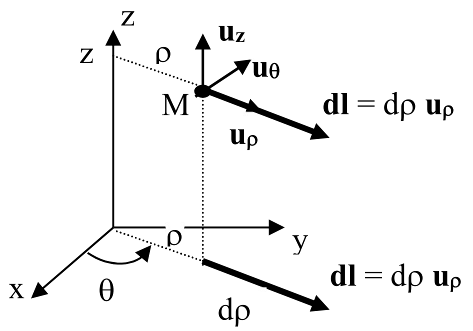
$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

<u>**seulement en coordonnées cartésiennes**</u>

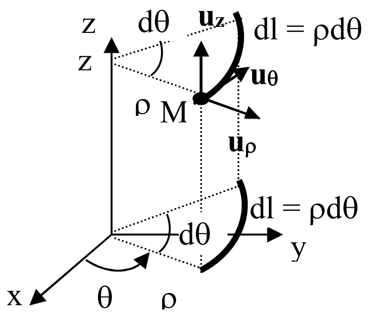
<u>Rq : dans cette section les grandeurs notées en caractère **gras** sont des **VECTEURS** ! Vous les noterez donc avec une **FLECHE !**</u>

<u>**En coordonnées cylindriques :**</u>

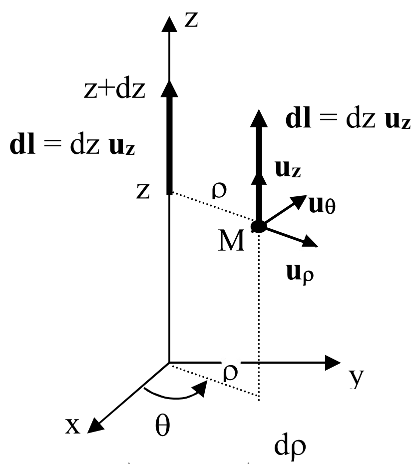




Déplacement colinéaire à $\mathbf{u}_\rho$:
dl = dρ $\mathbf{u}_\rho$ ou dl = dρ



Déplacement colinéaire à $\mathbf{u}_\theta$:
dl = ρdθ $\mathbf{u}_\theta$ ou dl = ρdθ



OM = ρ $\mathbf{u}_r$ + z $\mathbf{u}_z$
dl = dρ $\mathbf{u}_\rho$ + rdθ $\mathbf{u}_\theta$ + dz $\mathbf{u}_z$

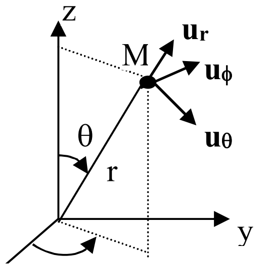
$$d\vec{r} = d\rho\,\vec{u}_\rho + $$

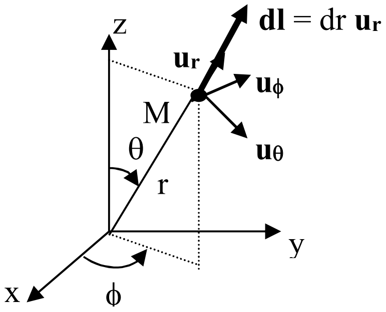
Déplacement colinéaire à $\mathbf{u}_z$:
dl = dz $\mathbf{u}_z$ ou dl = dz

$$\overrightarrow{grad}U = \frac{\partial U}{\partial \rho}\vec{u}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{u}_z.$$

$$\boxed{\overrightarrow{grad}\,U = \begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial \rho} \\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial \theta} \\ \frac{\partial U}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \rho} \\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} U}$$

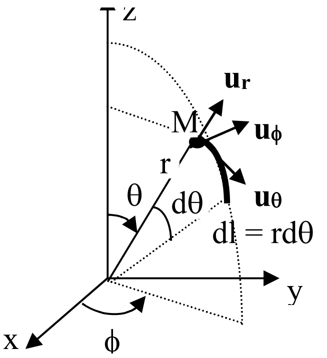
En coordonnées sphériques :



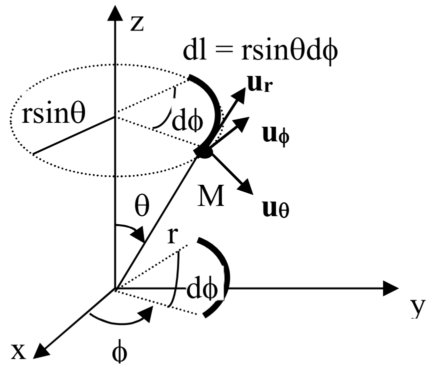


Déplacement colinéaire à $\mathbf{u_r}$:
dl = dr $\mathbf{u_r}$ ou dl = dr

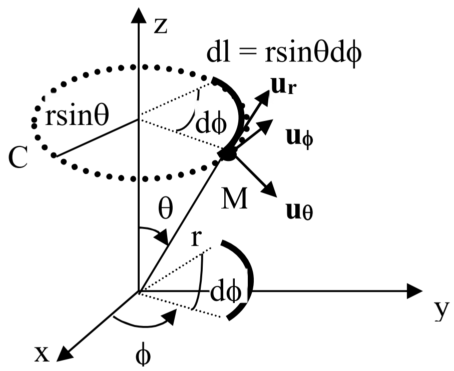
OM = r $\mathbf{u_r}$
dl = dr $\mathbf{u_r}$ + rdθ $\mathbf{u_\theta}$ + rsinθdϕ



Déplacement colinéaire à $\mathbf{u_\theta}$:
dl = rdθ $\mathbf{u_\theta}$ ou dl = rdθ



Déplacement colinéaire à $\mathbf{u_\phi}$:
dl = rsinθdϕ $\mathbf{u_\phi}$ ou dl = rsinθdϕ



Périmètre du cercle de rayon rsinθ :
C = $\oint r\,\sin\theta\,d\varphi = 2\pi\,r\,\sin\theta$

$$\boxed{\overrightarrow{grad}\,U = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial U}{\partial r} \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial U}{\partial \theta} \\ \dfrac{1}{r.\sin\theta}\dfrac{\partial U}{\partial \phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial r} \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial \theta} \\ \dfrac{1}{r.\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial \phi} \end{pmatrix} U}$$

$d\vec{r} = d\,r\,\vec{u}_r + r\vec{u}_\theta + r\,\sin\theta\,d\,\phi\,\vec{u}\phi$, donc:

$$\boxed{\overrightarrow{grad}\,U = \frac{\partial U}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta}\vec{u}\theta + \frac{1}{r\,\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial \varphi}\vec{u}\varphi\ .}$$

4. Equation fondamentale de la statique des fluides

On considère que le cube élémentaire précédent est en équilibre sous l'effet des forces de pression

$d\vec{F} = -\overrightarrow{grad}P(M)d\tau$, d'une part et des forces $\vec{f_v}d\tau$d'autre part.
$\vec{f_v}$ s'exprime en N.m^{-3}, c'est une ***force volumique.***

La relation fondamentale de la statique donne $\vec{f_v}d\tau + d\vec{F} = \vec{0}$, soit $-\overrightarrow{grad}P(M) + \vec{f_v} = \vec{0}$.

On retiendra que:

$$-\overrightarrow{grad}P(M) + \vec{f}_v = \vec{0}$$ **est l'équation fondamentale de la statique des fluides.**

Cette relation traduit l'équilibre d'une petit volume dτ de fluide soumis à des forces à distance $\vec{f}_v d\tau$ et à des forces de pression $-\overrightarrow{grad}P(M)d\tau$.

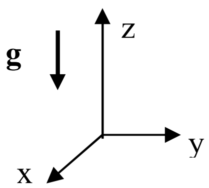
II. <u>Fluide en équilibre dans le champ de pesanteur</u>

1. <u>Expression de la relation fondamentale de la statique des fluides</u>

On considère dans le cas présent que la seule force à distance qui s'exerce sur le cube élémentaire, étudié dans un référentiel galiléen, est la force de pesanteur donc $\vec{f}_v d\tau = dm\vec{g} = \mu(M)d\tau\vec{g}$où μ(M) est la masse volumique du fluide au point M, d'où en identifiant$\vec{f}_v = \mu(M)\vec{g}$.

On retiendra que:

$$-\overrightarrow{grad}p(M) + \mu(M)\vec{g} = \vec{0}$$ **est l'équation fondamentale de la statique des fluides dans le champ de pesanteur**



En projetant cette relation sur le système d'axe ci-contre on obtient $-\begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} \\ \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial P}{\partial z} \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} = \vec{0}$ soit :

$$\frac{dP}{dz} = -\mu g$$ **lorsque l'axe Oz est orienté vers le haut**.

2. <u>Surfaces isobares</u>

On appelle **<u>surfaces isobares</u>** les surfaces telles que la pression soit constante.
Ici la pression ne dépend que de l'altitude z, car $\frac{\partial P}{\partial x} = 0$et $\frac{\partial P}{\partial y} = 0$,
les surfaces isobares sont donc les plans d'équation z = constante.

L'expression de l'énergie potentielle de pesanteur est Ep = mgz, avec l'altitude z = 0 comme référence d'énergie potentielle, donc les surfaces isobares sont les surfaces équipotentielles, la force de pression est perpendiculaire aux surfaces équipotentielles.

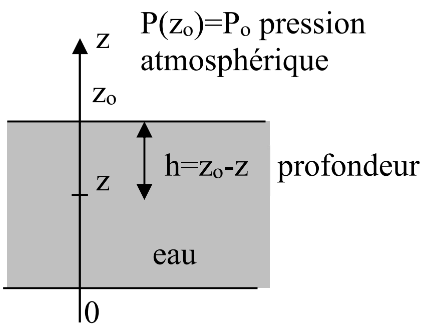
3. <u>Fluide incompressible</u>

Un fluide est dit **<u>incompressible</u>** si sa masse volumique ne dépend pas de la pression.

C’est en général le cas des liquides, car soumis à une forte pression leur volume ne varie pratiquement pas.

Donc en partant de la relation de la statique des fluides $\boldsymbol{dP = \frac{\partial P}{\partial z} dz = -\mu g dz}$, qui s’intègre en $P(z) = -\mu gz + cste$ donc

$$\boxed{P(z) = P(z_o) - \mu g(z - z_o)}$$



Application au cas de l’eau : la pression P(h) à la profondeur h est donnée par : $P(h) = P_o + \mu gh$

Plus la profondeur est grande, plus la pression est élevée.

Sur quelle hauteur d’eau h, la pression varie-t-elle de 10% ?

$\frac{P(h)-Po}{Po} = 0{,}1 = \frac{\mu gh}{Po}$ $h = 0{,}1 \cdot 10^5 / (10^3 \cdot 10) = 1$ m

Et de 63% ? $h = 0{,}63 \cdot 10^5 / (10^3 \cdot 10) = 6{,}3$ m

La pression de l’eau varie fortement sur de petites distances.

Application : Manomètre à liquide

4. Cas du gaz parfait

Un gaz est un fluide compressible, dont la masse volumique dépend de la pression via l'équation d'état du gaz.

Pour un gaz parfait $\mu = \frac{m}{V} = \frac{nM}{V} = \frac{PM}{RT}$où M est la masse molaire du gaz.

Donc en reprenant l'équation de la statique des fluide projetée sur Oz :

$$\boldsymbol{\frac{\partial P}{\partial z} = -\mu g = -\frac{P(z)M}{RT} g,}$$

on obtient une équation différentielle du 1er ordre

$$\boldsymbol{\frac{dP}{dz} + P(z)\frac{Mg}{RT} = 0}$$

et en posant $H = \frac{RT}{Mg}$, $\boldsymbol{\frac{dP}{dz} + \frac{P(z)}{H} = 0}$

de solution $\boxed{P(z) = P_o e^{-z/H}}$ si P_o est la pression à l'altitude z = 0.

Ce modèle permet de modéliser la variation de la pression dans l'atmosphère terrestre en fonction de l'altitude, en supposant l'atmosphère en équilibre isotherme.

H s'appelle la hauteur d'échelle.
Pour de l'air M = 29 g.mol^{-1} à T = 273 K , H = 7, 99 km.

Sur la hauteur H = 8 km la variation relative de pression est $\frac{Po-P(H)}{Po} = 1 - exp(-1) = 63\%$.

<u>Conclusion :</u>

Pour une **PARTICULE DE FLUIDE** centrée autour du point M, de masse volumique μ(M), de volume élémentaire dτ en équilibre dans le champ de pesanteur, **la résultante élémentaire des forces de pression** au point M s'écrit :

$$d\,\overrightarrow{F_p} = -\,\overrightarrow{grad}\,P(M).\,d\tau = -\mu(M)\,\overrightarrow{g}\,.d\tau$$

P(M) est la pression du fluide au point M.

Il s'agit d'une équation locale, valable en un point M du fluide.

Pour un système **MACROSCOPIQUE** de volume V, dans un fluide de masse volumique μ uniforme et dans le champ de pesanteur, **la résultante des forces de pression s'appelle la POUSSEE d'Archimède. Elle est notée $\boldsymbol{\vec{\Pi}}$.**

$$\vec{\Pi} = \int_{\substack{surface\ du \\ système\ macroscopique}} -P(M)d\,\vec{S} = -\mu V\,\vec{g}$$

P(M) est la pression du fluide en un point M du système macroscopique.

Il s'agit d'une équation intégrale ou globale.

III La force de viscosité

1. **Observation d'écoulements visqueux :**

   Vidéos : Marquer des particules de fluide ; couche_limite_plaque

2. **Expression de la force de viscosité**

Corps pur	eau	air	mercure	glycérine
Viscosité dynamique η (Pl)	$1{,}0.10^{-3}$	$1{,}8.10^{-5}$	$1{,}6.10^{-3}$	1,4
Masse volumique μ ($kg.m^{-3}$)	$1{,}0.10^{3}$	1,3	$13{,}6.10^{3}$	$1{,}3.10^{3}$
Viscosité cinématique ν ($m^2.s^{-1}$)	$1{,}0.10^{-6}$	$1{,}4.10^{-5}$	$0{,}121.10^{-6}$	$1{,}1.10^{-3}$

Condition d'adhérence entre un fluide et un solide, à l'interface $\vec{v}_{fluide} = \vec{v}_{solide}$

Voir autres vidéos l'écoulements visqueux sur le site de la classe