Ondes : chapitre 1 Equation de D'Alembert et solutions

Notions et contenus	Capacités exigibles	CdE
6.1. Phénomènes de propagation non dispersifs : équation de d'Alembert		
6.1.1. Propagation unidimensionnelle		
Ondes transversales sur une corde vibrante	Établir l'équation d'onde dans le cas d'une corde infiniment souple dans l'approximation des petitsmouvements transverses.	
Équation de d'Alembert. Onde progressive. Onde stationnaire	Identifier une équation de d'Alembert. Exprimer la célérité en fonction des paramètres du milieu. Citer des exemples de solutions de l'équation ded'Alembert unidimensionnelle.	CdE 2 : 23.8
Ondes progressives harmoniques. Ondes stationnaires harmoniques.	Établir la relation de dispersion à partir de l'équation de d'Alembert. Utiliser la notation complexe. Définir le vecteur d'onde, la vitesse de phase. Décomposer une onde stationnaire en ondes progressives, une onde progressive en ondes stationnaires.	
Conditions aux limites. Régime libre : modes propres d'une corde vibrante fixée à ses deux extrémités. Régime forcé : corde de Melde.	Justifier et exploiter des conditions aux limites. Définir et décrire les modes propres. Construire une solution quelconque par superposition de modes propres. Associer mode propre et résonance en régime forcé.	
Ondes de tension et de courant dans un câble coaxial. Impédance caractéristique. Réflexion en amplitude sur une impédance terminale.	Décrire un câble coaxial par un modèle à constantesréparties sans perte. Établir les équations de propagation dans un câblecoaxial sans pertes modélisé comme un milieu continu caractérisé par une inductance linéique et une capacité linéique Établir l'expression de l'impédance caractéristique d'un câble coaxial. **Étudier la réflexion en amplitude de tension pour une impédance terminale nulle, infinie ou résistive.**	CdE 2 : 24.11

Thème 1 : ondes et signaux (1)

1.6. Propagation d'un signal		
Propagation d'un signal dans un milieu illimité, non dispersif et transparent		
Onde progressive dans le cas d'une propagation unidimensionnelle non dispersive. Célérité, retard temporel.	Écrire les signaux sous la forme f(x-ct) ou g(x+ct). Écrire les signaux sous la forme f(t-x/c) ou g(t+x/c).Prévoir, dans le cas d'une onde progressive, l'évolution temporelle à position fixée et l'évolution spatiale à différents instants.	CdE 1 : 2.13 à 2.15
Modèle de l'onde progressive sinusoïdale unidimensionnelle. Vitesse de phase, déphasage, double périodicité spatiale et temporelle.	Citer quelques ordres de grandeur de fréquencesdans les domaines acoustique, mécanique et électromagnétique. Établir la relation entre la fréquence, la longueurd'onde et la vitesse de phase. Relier le déphasage entre les signaux perçus en deux points distincts au retard dû à la propagation. **Mesurer la vitesse de phase, la longueur d'ondeet le déphasage dû à la propagation d'un phénomène ondulatoire.**	
Milieux dispersifs ou non dispersifs.	Définir un milieu dispersif.	

Rappels de première année

Vous pouvez visualiser l'animation : Onde sur une corde
https://phet.colorado.edu/sims/html/wave-on-a-string/latest/wave-on-a-string_fr.html

L'amplitude de la corde y(x,t) varie en fonction du temps t et de la position x du point sur la corde. La propagation de la déformation de la corde à la vitesse (ou célérité) c se fait sans déplacement de matière, mais avec propagation d'énergie, ici sous forme cinétique.

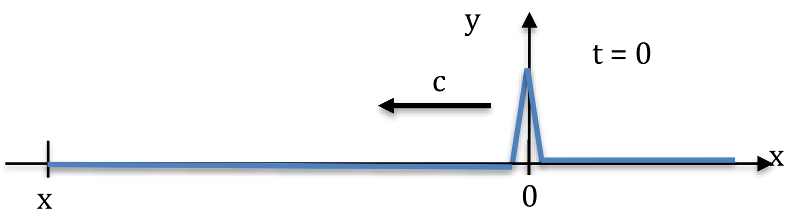
Propagation d'une déformation dans le sens x croissant à la célérité c :

$y(x,t) = y(0,0) = y(0, t - \tau)$ où τ est la durée mise à la déformation pour parcourir la distance x à la célérité $c = x/\tau$.

$y(x,t) = y(0, t - x/c) = y(t-x/c)$

Une onde progressive dans la direction x, dans le sens x croissant à la célérité c est modélisée par la fonction
$y(x,t) = y(t-x/c)$

Propagation d'une déformation dans le sens x décroissant à la célérité c :



$y(x,t) = y(0,0) = y(0, t - \tau)$ où τ est la durée mise à la déformation pour parcourir la distance -x à la célérité $c = -x/\tau$.
ici x est négatif, or une distance est toujours positive.

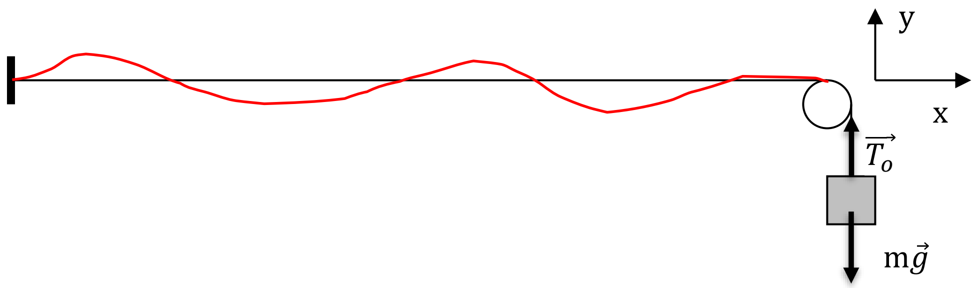
$y(x,t) = y(0, t + x/c) = y(t + x/c)$

Une onde progressive dans la direction x, dans le sens x décroissant à la célérité c est modélisée par la fonction
$y(x,t) = y(t+ x/c)$

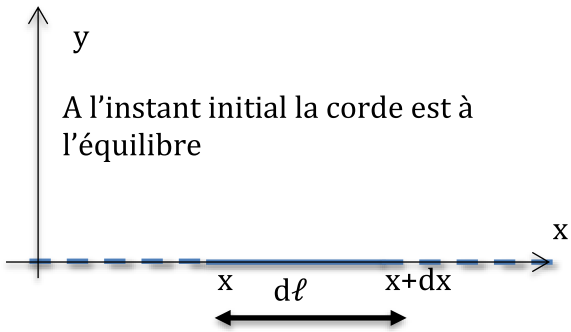
I. Equation de propagation d'une onde sur une corde :

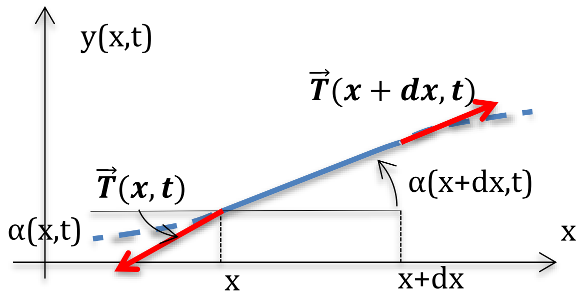
On considère une corde homogène et sans raideur sur laquelle se propage une déformation verticale y(x,t).
A l'équilibre la corde est au repos sur l'axe x. Elle est tendue grâce à une petite masse m suspendue au bout de la corde via une poulie.
On suppose que lors de la propagation de la déformation cette petite masse reste à l'équilibre.

Le mouvement se produit perpendiculairement à la direction de propagation : l'onde est **transversale**.



On veut établir l'équation du mouvement d'un élément de longueur dℓ de la corde de masse dm.





A l'instant t l'élément dℓ de la corde est en mouvement de translation vertical selon l'axe y.
Cet élément de corde est soumis de la part du reste de la corde, à une tension à gauche $\vec{T}$(x,t) et à une tension à droite $\vec{T}$(x+dx,t), tangentes à la corde au point d'application, ainsi qu'à son poids, négligé devant la tension de la corde.

D'après le pfd : $dm\vec{a} = \vec{T}(x,t) + \vec{T}(x+dx,t)$

On projette sur les axes, sachant que le mouvement de la corde n'a lieu que selon y $a_x = 0$

Sur Ox : $0 = -\cos(\alpha(x,t)).||\vec{T}(x,t)||+ \cos(\alpha(x+dx,t)).||\vec{T}(x+dx,t)||$

Sur Oy : $dm\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\sin(\alpha(x,t)).||\vec{T}(x,t)||+ \sin(\alpha(x+dx,t)).||\vec{T}(x+dx,t)||$

Les mouvements de la corde sont transversaux et petits ; en appelant α(x,t) l'angle entre la corde et l'horizontale, on a, à l'ordre le plus bas :

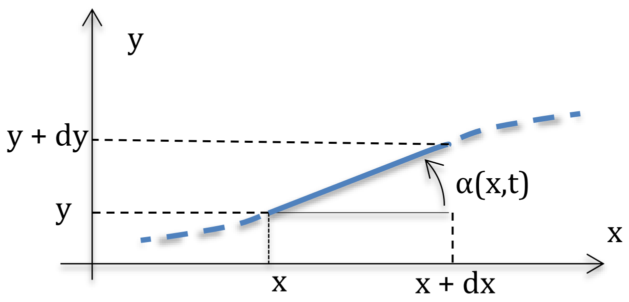
$$\cos\alpha \simeq 1 \ ; \ \sin\alpha(x) \simeq \alpha(x)$$

Sur Ox : $0 = -||\vec{T}(x,t)||+ ||\vec{T}(x+dx,t)||$

Sur Oy : $dm\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ = $-\alpha(x,t).||\vec{T}(x,t)|| + \alpha(x+dx,t)).||\vec{T}(x+dx,t)||$

Sur Ox : $||\vec{T}(x,t)|| = ||\vec{T}(x+dx,t)||$ la tension est donc uniforme sur toute la corde et on pose $||\vec{T}(x,t)|| = T_0$ tension de la corde à l'équilibre

Sur Oy : $dm\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = (-\alpha(x,t)+ \alpha(x+dx,t)).T_0 = \frac{\partial \alpha}{\partial x}.dx.T_0$



Comme les angles sont petits, on peut assimiler l'élément de longueur $d\ell$ de la corde à l'hypoténuse d'un triangle rectangle et poser

$$\alpha \approx \tan \alpha = \frac{\partial y}{\partial x} \text{ et } dx = d\ell.\cos\alpha \approx d\ell$$

Soit μ la masse linéique de la corde en $kg.m^{-1}$

$$dm = \mu d\ell = \mu\, dx$$

Sur Oy : $\mu\, dx\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.dx.\ T_0$

On en déduit l'équation vérifiée par y(x,t) :

$$\boldsymbol{\mu.\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = T_0.\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}}$$

En posant

$$c = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}$$

On obtient l'**équation de d'Alembert ou équation d'onde :**

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = c^2.\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}$$

A partir d'une équation aux dimensions sur l'équation d'onde, on remarque que c s'exprime en $m.s^{-1}$: c'est une célérité, c'est la célérité de l'onde.

On peut faire une même équation aux dimensions sur l'expression de $c(T_0, \mu)$ où T_0 est la tension de la corde en N et μ sa masse linéique en $kg.m^{-1}$.
La célérité de l'onde est d'autant plus grande que la tension T_0 est grande et la masse linéique μ faible.

Vous pouvez visualiser l'animation : Onde sur une corde et faire varier la tension de la corde
https://phet.colorado.edu/sims/html/wave-on-a-string/latest/wave-on-a-string_fr.html

L'équation d'onde précédente modélise une déformation y qui se propage dans la direction x à la célérité c.

Jean le Rond D'Alembert (1717 -1783) : mathématicien, philosophe et encyclopédiste français.

II. Les solutions de l'équation de D'Alembert

1. Caractères généraux de l'équation de d'Alembert

L'équation de d'Alembert à une dimension s'écrit toujours :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 . \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

C'est une équation **linéaire**.

y est la grandeur physique qui se propage
x est la direction de la propagation
c est la vitesse de propagation ou **célérité de l'onde.**

Cette célérité fait intervenir un terme dynamique exprimant la raideur du milieu : T_0 comparé à un terme d'inertie : μ.

On peut changer x en –x sans changer l'équation, donc ses solutions : le phénomène décrit par cette équation peut être décrit dans un sens ou dans l'autre de la même manière : il est **réversible spatialement**.

On peut changer t en –t sans changer l'équation, donc ses solutions : le phénomène décrit par cette équation est **réversible temporellement**.

2. Solutions progressives de l'équation de d'Alembert

Les solutions les plus générales de l'équation de d'Alembert à une dimension s'écrivent donc :

$$y(x, t) = f(t - x/c) + g(t+ x/c) ,$$

c étant la célérité des ondes.

La solution en t – x/c décrit une **onde progressive** progressant dans le sens des **x croissants** au cours du temps, avec la célérité c. On dit que l'onde se **propage**.

De même, la solution g(t + x/c) décrit une **onde progressive** progressant dans le sens des **x décroissants** au cours du temps, avec la célérité c.

Si y est ***transverse*** sa direction de vibration est perpendiculaire à Ox. (corde, ondes électromagnétiques)
Si y est ***longitudinale*** sa direction de vibration est colinéaire à Ox. (onde sonore, ondes de compression sur un ressort)

3. Les ondes progressives harmoniques (OPH)

Vous pouvez visualiser l'animation : Onde sur une corde
https://phet.colorado.edu/sims/html/wave-on-a-string/latest/wave-on-a-string_fr.html

si $y(x,t) = Y_o \cos(\omega(t - x/c) + \varphi_o) = Y_o.\cos(\omega t - \omega.x/c + \varphi_o) = Y_o.\cos(\omega t - k.x + \varphi_o)$

$$\boxed{y(x,t) = Y_o.\cos(\omega t - k.x + \varphi_o)}$$

Périodicité temporelle T : $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$ f : fréquence ; ω : pulsation

Périodicité spatiale, longueur d'onde λ : On pose $\vec{k} = \frac{\omega}{c}\vec{u} = \frac{2\pi}{cT}\vec{u} = \frac{2\pi}{\lambda}\vec{u}$, le vecteur d'onde et $\vec{u}$ la direction de propagation de l'onde.

Vitesse de phase : $v_\varphi = \omega / k = c$

φ_o est la phase de l'onde à l'origine $-\pi < \varphi_o < \pi$

Notation complexe uniquement pour les OPH:

$$\boxed{\underline{y}(x,t) = \underline{Y}_o.e^{j(\omega t - kx)} \text{ avec } \underline{Y}_o = Y_o.e^{j\varphi_o}}$$

Donc $\frac{\partial \underline{y}}{\partial t} = j\omega\underline{y}$

Et $\frac{\partial \underline{y}}{\partial x} = -jk\underline{y}$ si l'onde se propage dans la direction $+\vec{u}_x$ car $\underline{y}(t,x) = \underline{Y_o}\, exp\, j(\omega t - k.x)$

$\frac{\partial \underline{y}}{\partial x} = +jk\underline{y}$ si l'onde se propage dans la direction $-\vec{u}_x$ car $\underline{y}(t,x) = \underline{Y_o}\, exp\, j(\omega t + k.x)$

Relation de dispersion associée à l'équation de D'Alembert

Remplacer les dérivées partielles dans l'équation de D'Alembert :

$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ donne $(j\omega)^2\underline{y} = c^2(-jk)^2\underline{y}$ d'où

$$\boxed{k^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2}$$

C'est **la relation de dispersion, elle exprime k^2 en fonction de ω**

$k = +\omega / c$ pour les ondes se propageant dans le sens $+\vec{u}_x$
$k = -\omega / c$ pour les ondes se propageant dans le sens $-\vec{u}_x$

4. Solutions stationnaires de l'équation de D'Alembert

a. Forme des solutions :

Une onde stationnaire est une onde qui s'écrit : $y(x,t) = F(x).G(t)$.
On montre que les seules solutions acceptables physiquement sont de la forme :

$$y(x,t) = A.\cos(kx + \phi).\cos(\omega t + \varphi) \quad \text{avec} \quad -\pi < \phi, \varphi < \pi$$

L'amplitude de $y(x,t)$ est $A.\cos(kx+\phi)$.

Attention, lorsqu'on parle d'onde stationnaire y(x,t) dépend toujours du temps !

Vérifier que l'onde stationnaire est solution de l'équation de D'Alembert.

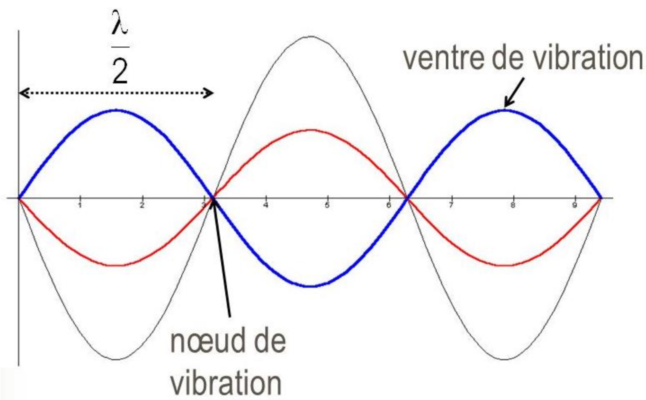
b. Nœuds de vibration :

On appelle **nœud de vibration** les points x_N pour lesquels l'amplitude est nulle : $\cos(kx_N + \phi)= 0$
$kx_N+\phi = \frac{\pi}{2}[\pi] = \frac{\pi}{2} + p\pi$ où p est un entier relatif.

$$\text{D'où } x_{Np} = \frac{\pi}{2k} + p\frac{\pi}{k} - \frac{\phi}{k} \text{ donne la position du nœud p}$$

On appelle **ventre de vibration** les points pour lesquels l'amplitude de vibration est maximale.

La distance entre deux nœuds de vibration consécutifs $x_{Np+1} - x_{Np}$ est égale à $\lambda/2$,
La distance entre un ventre et un nœud consécutif est $\lambda/4$. (rappel : $k = 2\pi/\lambda$)

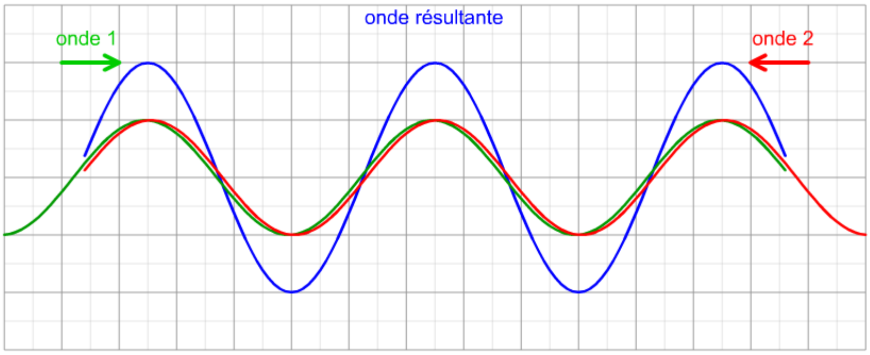


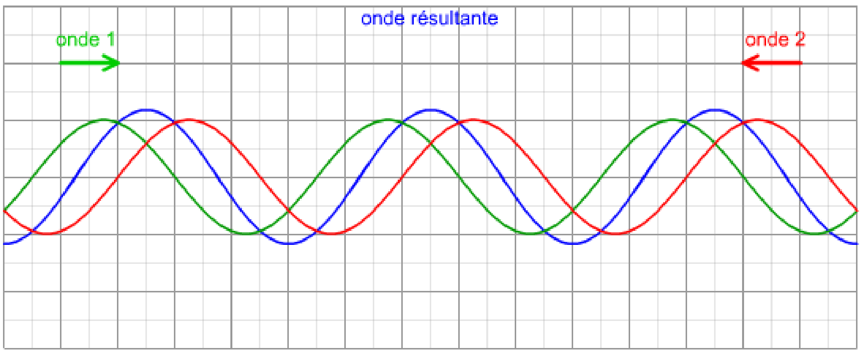
Onde stationnaire représentée à 3 instants différents : t, t et t.
La position d'un nœud ne change pas dans le temps.
L'amplitude des ventres varie dans le temps.

c. Réalisation d’une onde stationnaire :

Animation Ondes Stationnaires

http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/Ondes/ondes_stationnaires/stationnaires.php





Superposition de deux ondes se propageant en sens contraire :
Deux ondes **de même amplitude** (respectivement en vert et en rouge) se propagent en sens contraire. L'onde résultante est représentée en bleu. On peut constater qu'elle ne se propage pas : on dit qu'elle est **stationnaire**.

Il existe des nœuds de vibration, c’est-à-dire des points fixes où l’amplitude de l’onde est toujours nulle. Entre deux nœuds, l’amplitude de l’onde varie avec le temps.

d. **Onde stationnaire sur une corde :**

Si le milieu est infini, une onde émise en O à t = 0 se propage indéfiniment.
En général, le milieu est fini, et à ses extrémités se produisent des réflexions.

https://phet.colorado.edu/sims/html/wave-on-a-string/latest/wave-on-a-string_fr.html

On considère une corde fixée à l'extrémité x = 0 sur laquelle arrive une onde progressive harmonique incidente :

$$y_i(x, t) = A.\cos(\omega t - kx) \text{ en notation complexe } \underline{y}_i(x,t) = A.e^{j(\omega t - kx)}$$

En x = 0, on doit avoir :

$$\underline{y}(0, t) = 0 \ \forall t$$

condition que ne vérifie pas l'onde incidente.

On constate qu'il existe une onde réfléchie, que l'on peut écrire de manière très générale :

$$y_r = A'.\cos(\omega' t + k'x + \phi) \text{ en notation complexe } \underline{y}_r(x,t) = \underline{A}'.e^{j(\omega' t + k'x)}$$

et telle que :

$$\underline{y}_{totale}(0, t) = \underline{y}_i(0,t) + \underline{y}_r(0,t) = 0$$

$$0 = A.\, e^{j\omega t} + \underline{A}'.e^{j\omega' t}$$

Expression valable pour tout t

$$\begin{cases} \omega' = \omega \\ \underline{A}' = -A \\ k' = k \end{cases}$$

On calcule alors :

$$\underline{y}_{tot}(x, t) = A.e^{j(\omega t - kx)} - A.\, e^{j(\omega t + kx)} = A.\, e^{j\omega t}\,(e^{-j\,kx} - e^{-j\,kx}) = -2jA\sin(kx).\, e^{j\omega t} = 2A\sin(kx).\, e^{j(\omega t - \pi/2)}$$

$$\text{soit en réèl : } y_{tot}(x,t) = 2A\sin(kx).\cos(\omega t - \pi/2) = 2A\sin(kx).\sin(\omega t)$$

On remarque qu'on n'a plus de termes de propagation (t – x/c) ou (t + x/c) ! On obtient une solution à variables séparées de la forme y(x,t) = F(t).G(x)

Remarque 1 : On peut définir le coefficient de réflexion en amplitude par r = $\frac{y_r(x=0,t)}{y_i(x=0,t)}$. Ici r = - 1.

Remarque 2 : dans le cas général d'un changement de milieu en x = 0, une partie de l'onde est transmise et une partie réfléchie ; on définit alors le coefficient de transmission en amplitude par t = $\frac{y_t(x=0,t)}{y_i(x=0,t)}$, $y_t(x,t)$ étant l'onde transmise.

Nous avons vu qu'une onde stationnaire peut être considérée comme la superposition de deux ondes progressives de même amplitude se propageant en sens contraires.
De même, une onde progressive harmonique peut être considérée comme la superposition de deux ondes stationnaires de même amplitude et en quadrature :

$$y(x,t) = Y_o.\cos(\omega t - kx) = Y_o.[\cos(\omega t).\cos(kx) + \sin(\omega t).\sin(kx)]$$
$$= Y_o.[\cos(\omega t).\cos(kx) + \cos(\omega t - \tfrac{\pi}{2}).\cos(kx - \tfrac{\pi}{2})]$$

Il est donc équivalent pour un problème donné de rechercher des solutions stationnaires ou progressives, mais :

- Lorsque le milieu est illimité, il est préférable de travailler avec des ondes progressives ;
- Lorsque le milieu est fini, il est préférable de travailler avec des ondes stationnaires.

III. Modes propres et forcés d'une corde sous tension

1. Régime libre : corde pincée de guitare

a. Spectre d'une corde de guitare pincée

Vous pouvez écouter le fondamental émis par une corde pincée en fonction de la longueur de la corde et la tension appliquée :

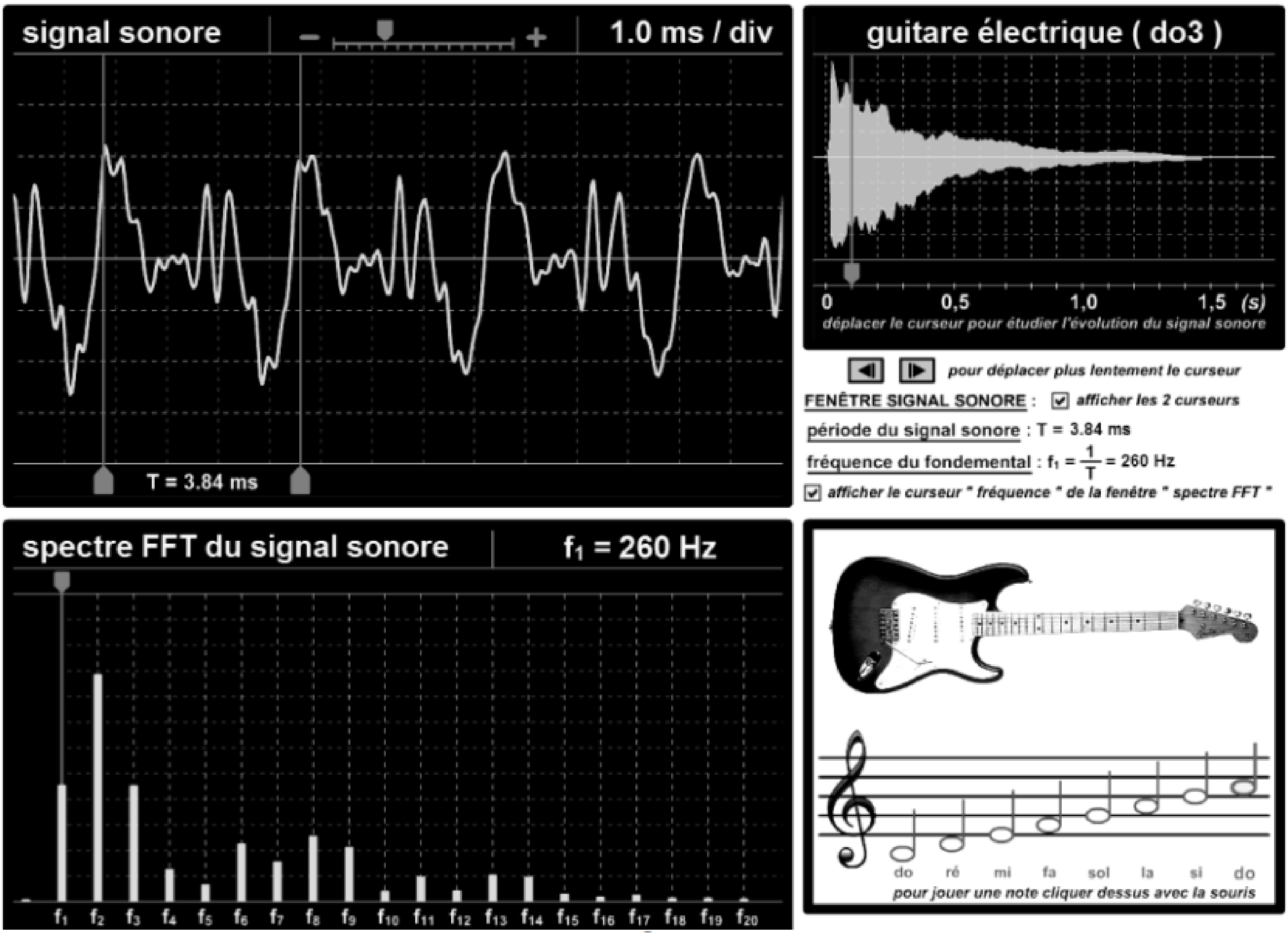
http://physique.ostralo.net/corde_guitare/

$y(x, t) = A.\sin(kx).\cos(\omega t + \varphi)$ avec $k = \omega / c$ $f = \frac{c}{2L} = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu_\ell}}$

Pour une corde de guitare la fréquence du fondamental dépend de la longueur L, de la tension T et de la masse linéique μ_ℓ de la corde. La longueur du manche d'une guitare classique est de 65,2 cm.

Fondamental : $f_1 = \frac{c}{2L} = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu_\ell}}$

CORDE	DIAMÈTRE	MASSE LINÉIQUE	TENSION	FREQUENCE FONDAMENTALE
	mm	g/m	N	Hz
n°1 - Mi_3	0.72	0.419	74.85	338
n°2 - Si_2	0.83	0.551	55.23	253
n°3 - Sol_2	1.04	0.867	54.74	201
n°4 - $Ré_2$	0.76	2.041	72.30	151
n°5 - La_1	0.91	3.794	75.44	113
n°6 - Mi_1	1.12	7.384	67.69	76



Le son entendu est d'autant plus riche que le nombre d'harmoniques est grand : c'est le timbre d'un instrument de musique.

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n.\sin(k_n x).\cos(\omega_n t + \varphi_n) \text{ avec } k_n = \omega_n / c$$

b. **<u>Modélisation de la corde vibrante</u>**

On considère une corde de longueur L fixée aux deux extrémités, sur laquelle aucune action extérieure n'est exercée : la corde oscille alors en **régime libre**.

L'existence de conditions aux limites oriente vers le choix d'une solution stationnaire :

$$y(x, t) = A.\cos(kx + \phi).\cos(\omega t + \varphi)$$

Les conditions aux limites imposent :

$$y(0, t) = 0 \Rightarrow \cos(\phi) = 0 \Rightarrow \phi = -\pi/2.$$

$$y(x, t) = A.\cos(kx - \pi/2).\cos(\omega t + \varphi) = A.\sin(kx).\cos(\omega t + \varphi)$$

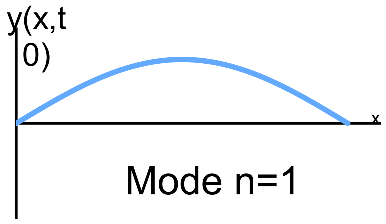
$y(L, t) = 0 \Rightarrow \cos(kL - \pi/2) = \sin(kL) = 0$

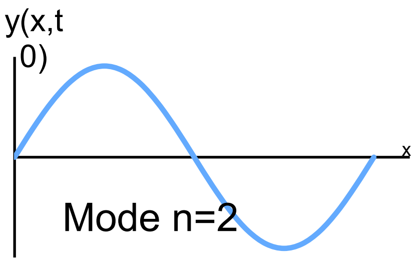
$$\Rightarrow L = n.\pi/k = n.\lambda / 2 \text{ avec } n \in \mathbb{N}^*.$$

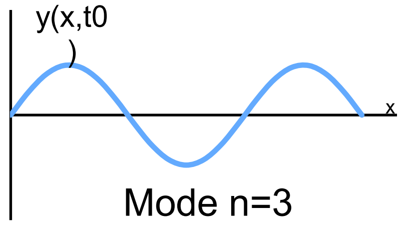
Les différentes valeurs de n correspondent aux différents **modes propres** de la corde.

Les pulsations propres de la corde sont

$$\boldsymbol{\omega_n = \frac{n\pi c}{L} = n\omega_1}$$







Nœuds pour x = 0 et x = L
$\lambda_1/2 = L$

Nœuds pour x = 0, x = L/2 et x = L
$\lambda_2/2 = L/2$

Nœuds pour x = 0, x = L/3, x = 2L/3 et x = L ; $\lambda_3/2 = L/3$

Pour n = 1, on observe le mode fondamental.

$$y_1(x,t) = A_1 \sin(k_1 x).\cos(\omega_1 t + \varphi_1) = A_1 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right).\cos\left(\frac{\pi c}{L} t + \varphi_1\right)$$

Les modes supérieurs sont appelés modes harmoniques :
le mode n = 2 correspond à l'harmonique de rang 2

$$y_2(x,t) = A_2 \sin(k_2 x).\cos(\omega_2 t + \varphi_2) = A_2 \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right).\cos\left(\frac{2\pi c}{L} t + \varphi_2\right)$$

le mode n correspond à l'harmonique de rang n

$$y_n(x,t) = A_n \sin(k_n x).\cos(\omega_n t + \varphi_n) = A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right).\cos\left(\frac{n\pi c}{L} t + \varphi_n\right)$$

<u>Solution générale de l'équation de la corde de guitare en régime libre :</u>

Le mouvement général de la corde est une superposition des différents modes propres :

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n.\sin(k_n x).\cos(\omega_n t + \varphi_n) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n.\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right).\cos\left(\frac{n\pi c}{L} t + \varphi_n\right)$$

Les constantes A_n et φ_n sont fixées par les conditions initiales, c.à.d par la donnée de :
y(x, 0) et (∂y/∂t) (x, 0).

A t = 0, on a en effet :

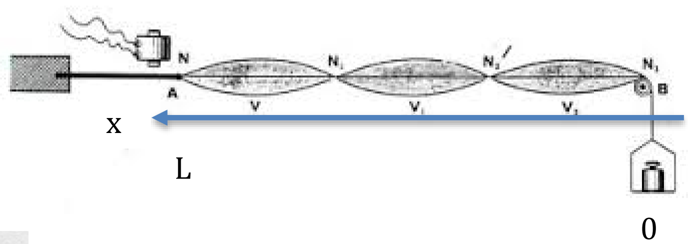
$$y(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n . \sin(k_n x) . \cos(\varphi_n)$$

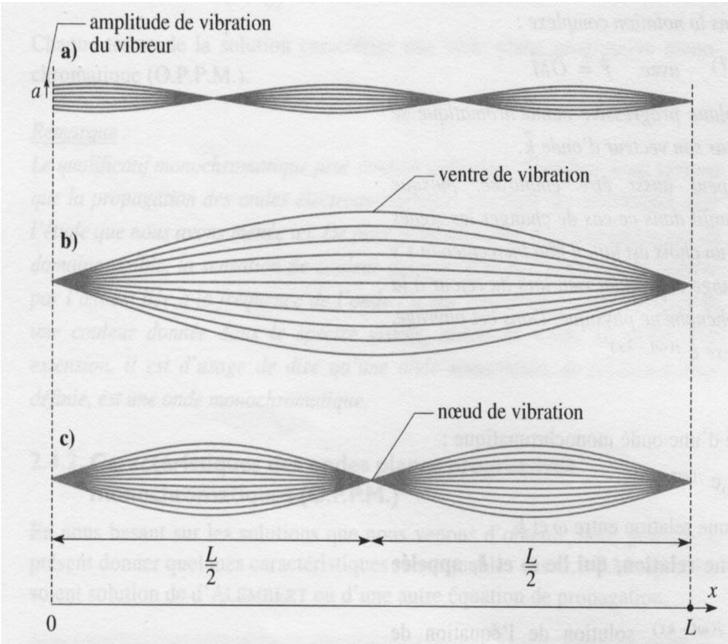
$$\frac{\partial y}{\partial t}(x,0) = -\sum_{n=1}^{\infty} A_n . \frac{n\pi c}{L} \sin(k_n x) . \sin(\varphi_n) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n . \sin(k_n x)$$

On reconnait les développements en série de Fourier de deux fonctions impaires de période 2L ; la connaissance de y(x, 0) et (∂y/∂t) (x,0) sur l'intervalle [0,L] est donc suffisante pour en obtenir le développement en série de Fourier, si l'on prolonge ces fonctions en les rendant périodiques de période 2L.

2. Régime forcé : corde de Melde :

Corde de Melde (1852) : la corde de Melde est une corde dont les extrémités sont considérées comme fixes, animée par un vibreur de pulsation ω variable.





Doc. 9. *Corde de* MELDE *excitée par une fréquence variable à tension et longueur constantes.*
a. *Fréquence quelconque.*
b. *Première résonance.*
c. *Deuxième résonance.*

Nous pouvons observer que ces oscillations se font sur place et ne se propagent pas : nous dirons que la corde est le siège d'*ondes stationnaires.*

La corde entre en résonance lorsque l'amplitude des ventres est maximale.

Expérimentalement, on observe que le phénomène de résonance se produit lorsque la pulsation ω du vibreur est l'une des pulsations propres de la corde, soit :

$$\boldsymbol{\omega = \omega_n = \frac{n\pi c}{L} = \frac{n\pi}{L}\sqrt{\frac{T_0}{\mu}}}$$

Démontrons que le modèle des ondes établi permet de retrouver que la résonance a lieu pour les pulsations propres.

A cause de la présence de condition aux limites on choisit pour y(x,t) une solution stationnaire :

$$y(x, t) = A.\cos(kx + \phi).\cos(\omega t + \varphi)$$

Pour faciliter la résolution on pose les conditions aux limites suivantes :

$y(0,t) = 0$ et $y(L,t) = Y_o.\cos(\omega t)$ imposée par la présence du vibreur en $x = L$

$$y(0, t) = 0 \Rightarrow \cos(\phi) = 0 \Rightarrow \phi = \pm \pi/2, \text{ choisissons } \phi = -\pi/2.$$

$y(L, t) = A.\cos(kL - \pi/2).\cos(\omega t + \varphi) = Y_o.\cos(\omega t)$

$Y_o.\cos(\omega t) = A.\sin(kL).\cos(\omega t + \varphi) \quad \Rightarrow A.\sin(kL) = Y_o$ et $\varphi = 0$

$$\text{d'où } y(x, t) = \frac{Y_o}{\sin(kL)}.\sin(kx).\cos(\omega t)$$

La résonance est obtenue lorsque l'amplitude $A = \frac{Y_o}{\sin(kL)}$ est maximale donc pour $\sin(kL) = 0$.
On obtient dans ce modèle une amplitude infinie à la résonance, car dans ce modèle on a négligé les frottements de l'air.

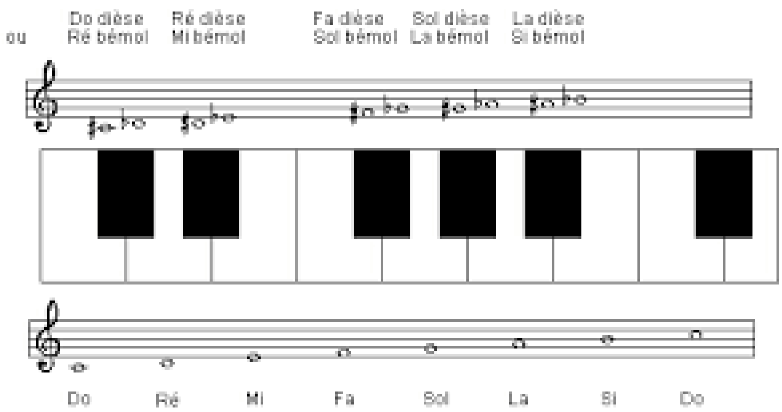
$\sin(kL) = 0$ donc $k_nL = n\pi$ soit $\frac{\omega_n}{c} = \frac{n\pi}{L}$ d'où $\boldsymbol{\omega_n = \frac{n\pi c}{L}}$

CQFD : Les fréquences de **résonance** de la corde de Melde (régime forcé) sont les fréquences **propres** de la corde pincée (régime libre)

3. Notions musicales :

Une octave est l'intervalle de fréquence f, 2f.
Deux notes à l'octave sonnent de manière semblable, aussi portent-elles le même nom ; on les différencie par un numéro d'octave placé en indice.

Une octave est divisée en 12 demi-tons formée des notes successives :



DO-DO♯-RE-RE♯ (= MIb)-MI-FA-FA♯-SOL-SOL♯-LA-LA♯ (= SIb)-SI-DO

♯ = dièse : élève la note d'un demi-ton ;

b = bémol : abaisse la note d'un demi-ton.

Dans la gamme tempérée, deux demi-tons successifs ont un rapport de fréquence constant et égal à $2^{1/12}$.

La relation « nom-fréquence » nécessite une référence : le La_3 de fréquence f = 440 Hz.

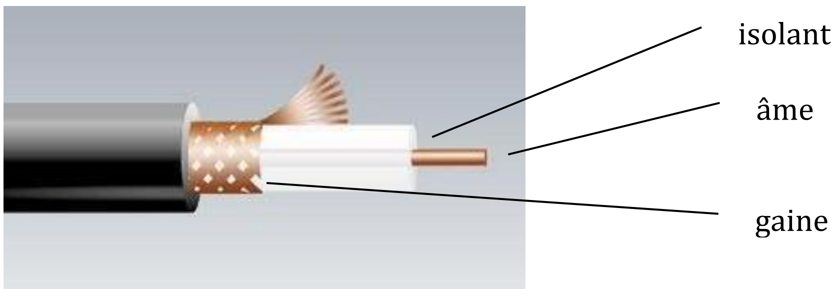
Certains intervalles sonnent de manière plus harmonieuse que d'autres :
- l'octave ;
- la quinte correspondant à 7 demi-tons : exemple : do-sol $f_2 / f_1 = 2^{7/12} \approx 3/2$ (à 0,1 % près) ;
- la tierce majeure correspondant à 4 demi-tons : exemple : do-mi.

Un son musical n'est pas composé que d'une seule fréquence, mais comporte en général de nombreux harmoniques ; on le caractérise par 3 grandeurs :
- l'intensité, liée à l'amplitude des vibrations ;
- la hauteur, liée à la fréquence fondamentale du son ;
- le timbre, lié au spectre du son.

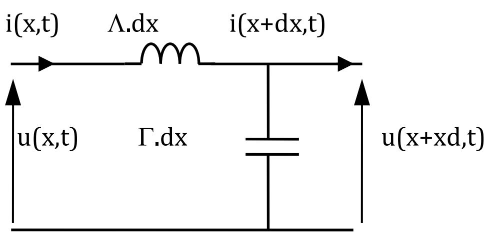
IV. Onde dans une ligne à constantes réparties, câble coaxial

1. Equation de propagation

Le câble est composé de deux conducteurs cylindriques coaxiaux séparés par un isolant.
Le conducteur central, cylindre de rayon a, constitue « l'âme » du câble, le conducteur extérieur, de rayon b, constitue la « gaine ».



Une tranche infinitésimale d'épaisseur dx d'une ligne électrique bifilaire peut-être modélisée par le schéma ci-contre, comportant une inductance élémentaire $dL = \Lambda dx$ et une capacité élémentaire $dC = \Gamma\, dx$. On traite ce circuit de faible dimension dans le cadre de l'ARQS.



Remarque : dans ce modèle sans pertes on néglige la résistance linéique r du câble et la conductance linéique g entre l'âme et la gaine.

La loi des mailles s'écrit :

$$u(x,t) - \Lambda.\mathrm{dx}.\frac{\partial i}{\partial t} - u(x+dx,t) = 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\partial u}{\partial x} = \Lambda \frac{\partial i}{\partial t} \ (1)$$

La loi des noeuds s'écrit :

$$i(x,t) = \Gamma.\mathrm{dx}.\frac{\partial u}{\partial t} + i(x+dx,t)$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\partial i}{\partial x} = \Gamma \frac{\partial u}{\partial t} \ (2)$$

On cherche à établir les équations d'onde dont u(x,t) et i(x,t) sont solutions, qui s'écrivent forcément sous la forme :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \text{ et } \frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 i}{\partial t^2}$$

On dérive (1) par rapport à x pour former $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ et (2) par rapport à t pour former $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$.
On peut appliquer le critère de Schwartz $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial i}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial i}{\partial x}\right)$ lorsque les variables x et t sont indépendantes. On en déduit alors que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \Lambda\Gamma \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

On dérive (1) par rapport à t pour former $\frac{\partial^2 i}{\partial t^2}$ et (2) par rapport à x pour former $\frac{\partial^2 i}{\partial x^2}$.
On peut appliquer le critère de Schwartz $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$. On en déduit alors que

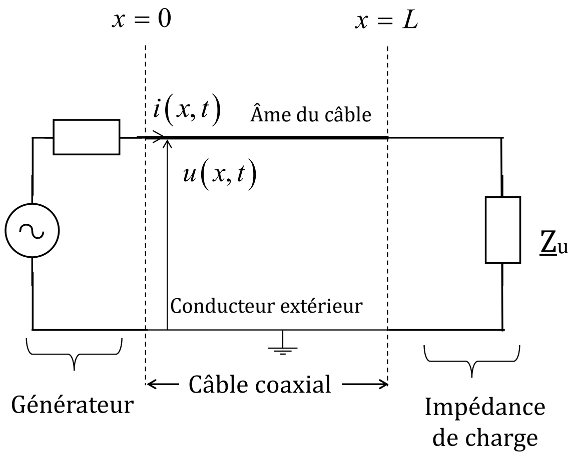
$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = \Lambda\Gamma \frac{\partial^2 i}{\partial t^2}$$

La célérité est :

$$c = \frac{1}{\sqrt{\Lambda\Gamma}}$$

2. Impédance caractéristique

Le câble coaxial est fermé en x = L sur une impédance de charge Z_u. En TP on prend simplement



Mettre une résistance impose apriori une condition à limite, et donc l'apparition d'une onde réfléchie. Cependant, pour une certaine valeur de cette résistance, appelée impédance caractéristique, on n'observe aucune onde réfléchie. Déterminons la valeur de cette impédance caractéristique notée Rc.

La présence de Rc impose en x = L u(L,t) = Rc.i(L,t)
Or pour tout x u(x,t) et i(x,t) sont liés par la relation (1) précédente : $-\frac{\partial u}{\partial x} = \Lambda \frac{\partial i}{\partial t}$

Par hypothèse u(x,t) est une onde progressive se propageant dans le sens x croissant donc u(x,t) = u(t – x/c) = u(α) en posant α = t – x/c et $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \alpha} \cdot \left(-\frac{1}{c}\right)$

De même i(x,t) est une onde progressive se propageant dans le sens x croissant donc i(x,t) = i(t – x/c) = u(α) en posant α = t – x/c et $\frac{\partial i}{\partial t} = \frac{\partial i}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial t} = \frac{\partial i}{\partial \alpha} \cdot 1$

En utilisant la relation (1) : $\frac{1}{c}\frac{\partial u}{\partial \alpha} = \Lambda \frac{\partial i}{\partial \alpha}$ soit $\frac{\partial (u - \Lambda c i)}{\partial \alpha} = 0$ d'où u(x,t) - Λci(x,t) = const.
A priori les fonctions u(x,t) i(x,t) sont toujours de valeur moyenne nulle donc const = 0.
Cette relation est valable en x = L u(L,t) = Λc.i(L,t) et par identification avec la loi d'Ohm en x = L, on trouve

$$Rc = \Lambda c = \sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}}$$

Rc est l'impédance caractéristique de ligne telle qu'il n'existe pas d'onde réfléchie.

Remarque : on peut faire cette démonstration avec des OPH directement en complexe, c'est plus simple…

3. Réflexion en bout de ligne (cf TP)

Lorsque en x = L, on met un court-circuit $R_L = 0$ et u(L,t) = 0.
On observe alors une onde de tension réfléchie inversée par rapport à l'onde incidente.

Lorsque en x = L, on laisse le circuit ouvert $R_L \to \infty$ et i(L,t) = 0.
On observe alors une onde de tension réfléchie non-inversée par rapport à l'onde incidente.