6. Physique des ondes

6.1. Phénomènes de propagation non dispersifs : équation de d'Alembert

6.1.2. Ondes sonores dans les fluides		**CdE**
Approximation acoustique.	Classer les ondes sonores par domaines fréquentiels. Justifier les hypothèses de l'approximation acoustique par des ordres de grandeur. Écrire les équations locales linéarisées : conservation de la masse, équation thermodynamique, équation de la dynamique.	CdE2 : 23.7
Équation de d'Alembert pour la surpression.	Etablir l'équation de propagation de la surpression formulée avec l'opérateur laplacien.	CdE2 : 23.8
Célérité.	Exprimer la célérité en fonction de la température pour un gaz parfait. Citer les ordres de grandeur de la célérité pour l'air et pour l'eau.	CdE2 : 23.3
Densité volumique d'énergie sonore, vecteur densité de courant énergétique. Intensité acoustique, niveau sonore.	Utiliser les expressions admises du vecteur densité de courant énergétique et de la densité volumique d'énergie associés à la propagation de l'onde. Définir l'intensité sonore et le niveau sonore. Citer quelques ordres de grandeur de niveaux d'intensité sonore.	CdE2 : 23.1 ; 23.2
Ondes planes progressives harmoniques. Impédance acoustique.	Décrire le caractère longitudinal de l'onde sonore. Discuter la validité du modèle de l'onde plane en relation avec le phénomène de diffraction. Utiliser le principe de superposition des ondes planes progressives harmoniques. Établir et utiliser l'impédance acoustique définie comme le rapport de la surpression sur le débit volumique ou comme le rapport de la surpression sur la vitesse.	CdE2 : 23.4 ; 23.5
Onde sonore sphérique harmonique divergente.	Commenter l'expression de la surpression générée par une sphère pulsante : atténuation géométrique, structure locale.	
6.3. Interfaces entre deux milieux		
6. 3.1. Cas des ondes sonores		
Réflexion, transmission d'une onde sonore sur une interface plane entre deux fluides : coefficients de réflexion et de transmission en amplitude des vitesses, des surpressions et des puissances sonores.	Expliciter des conditions aux limites à une interface. Établir les expressions des coefficients de transmission et de réflexion en amplitude de surpression, en amplitude de vitesse ou en puissance dans le cas d'une onde plane progressivesous incidence normale. Relier l'adaptation des impédances au transfert maximum de puissance.	CdE2 : 23.6 ; 23.11 ; 23.12 ; 23.13

Ondes : chapitre 2 Ondes sonores dans les fluides

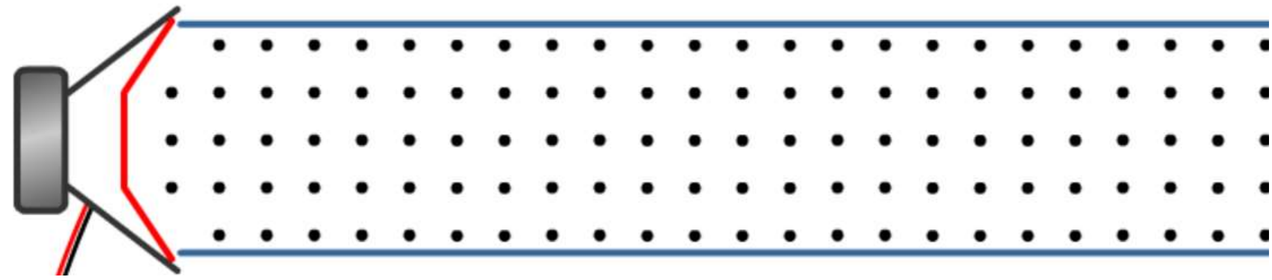
I. Equations de propagation

1. Caractéristiques des ondes sonores

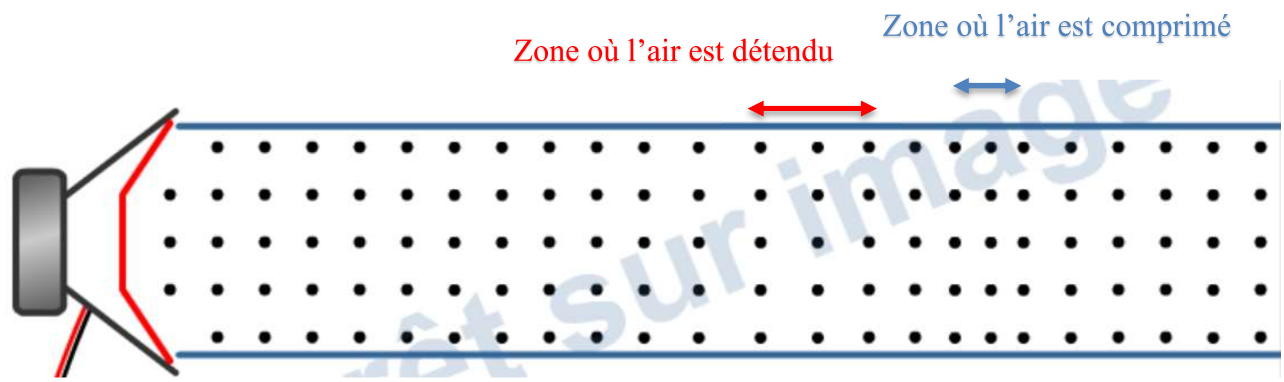
L'onde sonore nécessite un milieu matériel pour se propager.

C'est une onde longitudinale de compression :

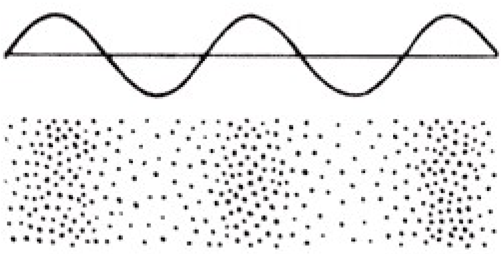
Vidéo : animation Son 01

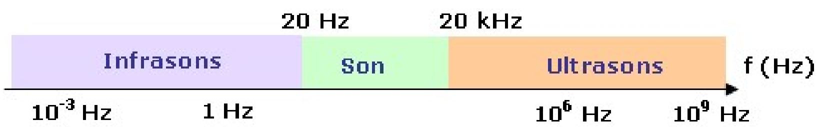


Modèle de l'air au repos



Modèle de l'air lors du passage d'une impulsion sonore





Modélisation d'une onde sonore sinusoïdale par des zones de compressions et détentes successives

L'ordre de grandeur de la célérité du son dans l'air à 25°C est de 340 $m.s^{-1}$.

Les paramètres pertinents permettant de modéliser l'onde sonore sont les paramètres du milieu qui varient lors du passage de l'onde : la pression, la masse volumique, le déplacement donc la vitesse.

2. Approximation acoustique

Une onde sonore est une perturbation mécanique réversible du milieu.

Au passage de l'onde, les paramètres d'état (pression P, vitesse $\vec{v}$, masse volumique μ) ne subissent que de faibles variations.

On considère un fluide dont l'état d'équilibre correspond au point M tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$ à l'instant t à :

$$P(M,t) = P°,\ T(M,t) = T_0,\ \mu(M,t) = \mu_0 \text{ et } \vec{v}(M,t) = \vec{0}.$$

Le passage d'une onde acoustique provoque des variations de ces grandeurs :

$$P(M,t) = P° + p(M,t)\ ;\ T(M,t) = T_0 + \theta(M,t)\ ;\ \mu(M,t) = \mu_0 + \mu_1(M,t) \text{ et } \vec{v}(M,t) \neq \vec{0}.$$

On fait les hypothèses suivantes :

- On néglige le poids devant les forces de pression ;
- L'écoulement est supposé parfait et adiabatique ; il sera donc isentropique.
- le déplacement ξ d'une tranche de fluide par rapport à l'équilibre est petit, ainsi que la vitesse $\vec{v} = \frac{\partial \vec{\xi}}{\partial t}$;
- les variations sont petites : P = P° + p avec p << P° ; p est la **surpression acoustique** ;
  $\mu = \mu_0 + \mu_1$ avec $\mu_1 << \mu_0$; v << c (célérité des ondes acoustiques).
- On se place dans **l'approximation acoustique** :
  * v, p et μ_1 sont des perturbations par rapport à l'état d'équilibre ; on les assimilera, ainsi que leurs dérivées, à des infiniment petits dont on ne conservera dans les équations que le premier ordre ;
  * leurs valeurs moyennes temporelles sont nulles.

Ordres de grandeur : on a couramment $p/P° = \mu_1/\mu_0 = 10^{-3}$.

3. Equations locales dans l'approximation acoustique

a. Pfd appliqué à une particule de fluide – équation de la dynamique

Le système est une particule de fluide de masse dm = μ.dτ qui se trouve au point M tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$ à l'instant t qui n'est soumise qu'à la résultante des forces de pressions

$d\vec{F} = -\overrightarrow{grad}P.d\tau.$

$$dm\vec{a} = -\overrightarrow{grad}P.d\tau$$

$$\mu.d\tau\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}.\overrightarrow{grad})\vec{v}\right) = -\overrightarrow{grad}P.d\tau$$

$$(\mu_0 + \mu_1(M,t))\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}.\overrightarrow{grad})\vec{v}\right) = -\overrightarrow{grad}(P° + p(M,t))$$

Or dans le cadre de l'approximation acoustique

$\mu_0 >> \mu_1(M,t)$

$\vec{v}$ est un infiniment petit d'ordre 1, $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ l'est également, mais $(\vec{v}.\overrightarrow{grad})\vec{v} \sim \frac{v^2}{L}$ est un infiniment petit d'ordre 2 que l'on peut négliger devant l'ordre 1

$$\overrightarrow{grad}(P° + p(M,t)) = \overrightarrow{grad}(P_o) + \overrightarrow{grad}(p(M,t)) = \vec{0} + \overrightarrow{grad}(p(M,t))$$

On en déduit l'expression du pfd (appelé aussi équation d'Euler) appliqué à une particule de fluide dans le cadre de l'approximation acoustique :

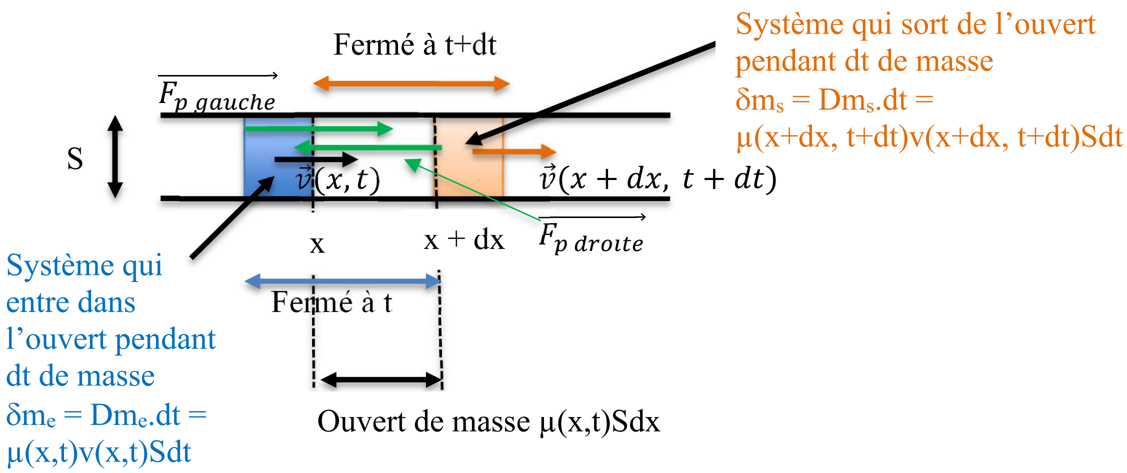
$$\boxed{\mu_0 \frac{\partial \vec{v}(M,t)}{\partial t} = -\overrightarrow{grad}(p(M,t)) \quad (1)}$$

Dans le cas d'une onde longitudinale se propageant selon Ox : $\overrightarrow{OM} = \vec{r} = x\overrightarrow{u_x}$
$\vec{v}(M,t) = \vec{v}(x,t) = v(x,t)\overrightarrow{u_x}$; $P(M,t) = P(x,t) = P° + p(x,t)$; $\mu(M,t) = \mu(x,t) = \mu_0 + \mu_1(x,t)$

$$\boxed{\mu_0 \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial p(x,t)}{\partial x} \quad (1')}$$

La relation obtenue est la projection de la relation vectorielle sur l'axe Ox, c'est donc une relation scalaire.

<u>Remarque</u> : On peut aussi faire un bilan de quantité de mouvement sur l'air en écoulement au passage de l'onde.
Considérons une propagation unidirectionnelle selon l'axe x. Le système ouvert est compris entre x et x +dx



$$\overrightarrow{p_{fermé}}(t+dt) - \overrightarrow{p_{fermé}}(t) = \overrightarrow{p_{ouvert}}(t+dt) + \delta\overrightarrow{p_s} - (\overrightarrow{p_{ouvert}}(t) + \delta\overrightarrow{p_e}) =$$

$$m_{ouvert}(t+dt)\overrightarrow{v_{ouvert}}(t+dt) - m_{ouvert}(t)\overrightarrow{v_{ouvert}}(t) + \delta m_s\overrightarrow{v_s} - \delta m_e\overrightarrow{v_e} =$$

$$Sdx\left(\mu(t+dt)\overrightarrow{v_{ouvert}}(t+dt) - \mu(t)\overrightarrow{v_{ouvert}}(t)\right)$$

$$+ \mu(x+dx, t+dt)v(x+dx, t+dt)Sdt\vec{v}(x+dx,\ t+dt) - \mu(x,t)v(x,t)Sdt\vec{v}(x,t) =$$

$$Sdx\frac{\partial(\mu\vec{v})}{\partial t}dt + \frac{\partial(\mu v\vec{v})}{\partial x}dxSdt$$

En appliquant le principe fondamental de la dynamique projeté sur Ox : $\frac{d\overrightarrow{p_{fermé}}}{dt} = \overrightarrow{F_{ext}}$, la résultante des forces extérieures étant uniquement les forces de pression à gauche $\overrightarrow{F_{p\ gauche}} = P(x)S\overrightarrow{u_x}$ et à droite $\overrightarrow{F_{p\ droite}} = -P(x+dx)S\overrightarrow{u_x}$ où P représente la pression.

$$Sdx\frac{\partial(\mu\vec{v})}{\partial t} + \frac{\partial(\mu v\vec{v})}{\partial x}dxS = (P(x) - P(x+dx))S\overrightarrow{u_x}$$

$$\frac{\partial(\mu v)}{\partial t} + \frac{\partial(\mu v^2)}{\partial x} = -\frac{\partial P}{\partial x}$$

Soit dans le cadre de l'approximation acoustique

$$\mu_o\left[\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial(v^2(x,t))}{\partial x}\right] = -\frac{\partial p(x,t)}{\partial x}$$

On retrouve l'équation d'Euler avec un terme supplémentaire, qui est négligeable devant le premier, ce qui justifie qu'on peut écrire simplement l'accélération sous la forme $\frac{\partial v(x,t)}{\partial t}$ et on retrouve l'équation d'Euler précédente : $\mu_0 \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial p(x,t)}{\partial x}$

b. <u>Equation de conservation de la masse :</u>

$$div(\mu\vec{v}) + \frac{\partial\mu}{\partial t} = 0$$

En utilisant l'approximation acoustique :

$$\boxed{\mu_0 div(\vec{v}(M,t)) + \frac{\partial\mu_1(M,t)}{\partial t} = 0 \qquad (2)}$$

Pour une onde se propageant selon Ox :

$$\boxed{\mu_0 \frac{\partial v(x,t)}{\partial x} + \frac{\partial\mu_1(x,t)}{\partial t} = 0 \quad (2')}$$

c. <u>Evolution isentropique – équation thermodynamique</u>

On définit le <u>coefficient de compressibilité isentropique χ_S</u> (prononcer Ki)

$$\chi_S = \frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial\mu}{\partial P}\right)_S$$

Soit

$$\chi_S \approx \frac{1}{\mu_o + \mu(M,t)}\left(\frac{\mu(M,t) - \mu_o}{P(M,t) - P°}\right)_S = \frac{1}{\mu_o}\frac{\mu_1(M,t)}{p(M,t)°}$$

$$\boxed{\mu_1(M,t) = \mu_0 . \chi_S . p(M,t) \quad (3)}$$

Pour une onde se propageant selon Ox :

$$\boxed{\mu_1(x,t) = \mu_0 . \chi_S . p(x,t) \qquad (3')}$$

4. Equation de propagation de la surpression

Il faut faire intervenir une dérivée seconde de p(M,t) par rapport au temps :

(3) (équation thermodynamique linéarisée) $\mu_1(M,t) = \mu_0 . \chi_S . p(M,t)$

→ (2) (équation de conservation de la masse linéarisée)

$$\mu_0 div(\vec{v}(M,t)) + \frac{\partial \mu_0 . \chi_S . p(M,t)}{\partial t} = 0$$

$$div(\vec{v}(M,t)) + \chi_S \frac{\partial\, p(M,t)}{\partial t} = 0$$

On dérive par rapport au temps :

$$\frac{\partial div(\vec{v}(M,t))}{\partial t} + \chi_S \frac{\partial^2\, p(M,t)}{\partial t^2} = 0$$

On applique le critère de Schwartz :

$$div\left(\frac{\partial \vec{v}(M,t)}{\partial t}\right) + \chi_S \frac{\partial^2\, p(M,t)}{\partial t^2} = 0$$

On utilise (1) (équation d'Euler linéarisée)

$$div\left(-\frac{\overrightarrow{grad}(p(M,t))}{\mu_o}\right) + \chi_S \frac{\partial^2\, p(M,t)}{\partial t^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2\, p(M,t)}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu_o \chi_S} div\left(\overrightarrow{grad}(p(M,t))\right)$$

Par définition du laplacien scalaire $div\left(\overrightarrow{grad}(p(M,t))\right) = \Delta p(M,t)$

$$\frac{\partial^2 p(M,t)}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu_o \chi_S} \Delta p(M,t)$$

Equation de D'Alembert :

$$\boxed{\frac{\partial^2 p(M,t)}{\partial t^2} = c^2\, \Delta p(M,t) \text{ avec } c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \chi_S}}}$$

Il est facile de montrer que μ_1 vérifie la même équation, car proportionnel à p moins facile de montrer que $\vec{v}$ la vérifie, mais c'est aussi le cas ; nous l'admettrons.

Remarque à 1 dimension :

On cherche une équation de propagation de la surpression p selon la direction x à la célérité c :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = c^2 . \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$$

Pour avoir la dérivée seconde temporelle de p : remplacer µ de (2') par (3') puis dériver par rapport au temps.

Pour avoir la dérivée seconde spatiale de p : dériver (1') par rapport à x.

5. Vitesse du son dans les différents milieux

milieu	vitesse du son ($m.s^{-1}$)
gaz	
dioxygène	317
air	331
diazote	339
dihydrogène	1 270
liquides	
eau	1 500
mercure	1 450
solides	
plomb	1 230
cuivre	3 750
fer	5 130
granit	6 000

Doc. 5. *Vitesse du son dans quelque milieux matériels.*

a. Gaz :

Pour un gaz parfait de masse molaire M, de coefficient γ à la température T, à partir de la relation des gaz parfaits on obtient :

$$\rho_0 = \frac{P_0 M}{RT_0}.$$

$\chi_S = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial P}\right)_S$ est le coefficient de compressibilité isentropique.
Une transformation isentropique d'un gaz parfait est régie par la loi de Laplace : PV^γ = const = $P(m/\rho)^\gamma = P.\rho^{-\gamma}$ car on travaille avec un système fermé de masse constante.

Dérivée logarithmique : soit $f(x,y) = A.x^\alpha.y^\beta$ où A, α, β sont des constantes
$\ln(f) = \ln A + \alpha.\ln x + \beta.\ln y$

Différentions cette fonction sachant que d(lnu) = du /u on en déduit que la dérivée logarithmique de la fonction f(x,z) :

$$\frac{df}{f} = \alpha\frac{dx}{x} + \beta\frac{dy}{y}$$

Appliquons la dérivation logarithmique à $P\rho^{-\gamma}$ = constante :

$$\frac{df}{f} = 1\frac{dP}{P} - \gamma\frac{d\rho}{\rho} = \frac{dconstante}{constante} = 0$$

d'où $\frac{d\rho}{dP} = \frac{\rho}{\gamma P}$ valable pour une transformation isentropique, donc $\chi_S = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial P}\right)_S = \frac{\rho}{\rho\gamma P} = \frac{1}{(P_{o+p})\gamma}$ d'où dans le cadre de l'approximation acoustique :

$$\chi_S = 1/\gamma P_0$$

Sachant que $c = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi_S}}$ on en déduit que pour un gaz parfait :

$$c = \sqrt{\frac{\gamma R T_0}{M}}$$

Remarque : attention dans les AN à mettre M en unités SI : $kg.mol^{-1}$

AN : Air à T = 300 K, M_{air}= 0,029 $kg.mol^{-1}$, γ = 1,4 : c = 347 $m.s^{-1}$.

b. Liquides :

Exemple : eau $\chi_S = 5.10^{-10}$ Pa^{-1} ; $\rho_0 = 10^3$ $kg.m^{-3}$ d'où c = 1400 $m.s^{-1}$.

c. Mesure de la célérité du son :

La mesure peut se faire grâce à une impulsion par mesure de temps de vol (figure).

Au labo, on la mesure dans l'air grâce à un couple émetteur récepteur d'ultrasons.

On considère un émetteur E placé en x=0 et relié à un générateur basse fréquence émettant un signal de fréquence f connue ; le signal émis s'écrit :

$$e(t) = E.\cos(\omega t).$$

Le signal reçu par un récepteur placé à l'abcisse x s'écrit :

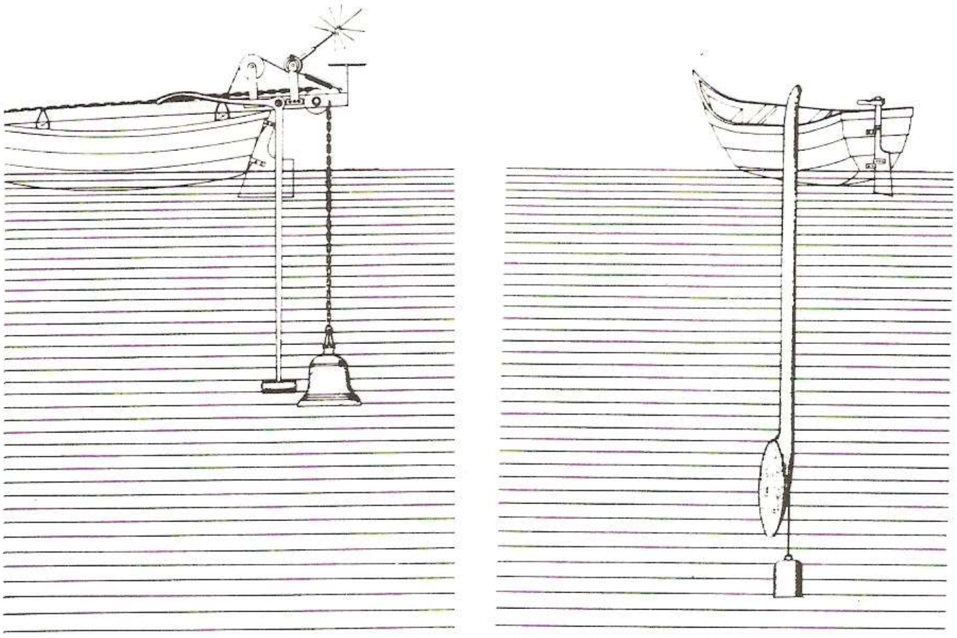
$$s(t) = S.\cos(\omega t - kx).$$

On observe les signaux e(t) et s(t) à l'oscilloscope ; ils sont en phase si :

$$k.x = 2n.\pi \text{ avec } n \in Z$$

$$\Leftrightarrow x = n.\lambda$$

On mesure donc la distance entre deux (ou plus) coincidences de phase successives pour en déduire λ, puis $c = \lambda.f$.



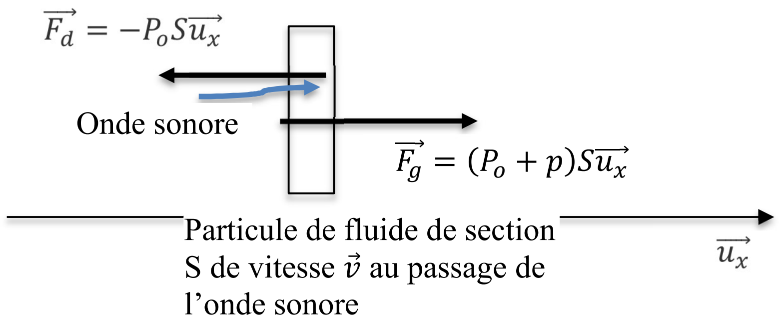
Expérience sur la transmission du son dans l'eau (1827). Les deux bateaux sont ancrés le long des deux rives du Léman. Quand le marteau frappe la cloche (gauche), une lumière est allumée sur l'embarcation. De l'autre côté du lac, des observateurs (droite) mesurent le temps écoulé entre le signal lumineux et l'audition du son.

II. Aspect énergétique

Une onde sonore transporte de l'énergie acoustique.

1. Vecteur densité surfacique de puissance :

Soit une onde sonore progressive qui se propage dans le sens x croissant.
La pression à gauche de la particule fluide est $P_o + p$ où p est la surpression générée par l'onde sonore, la pression à droite de la particule fluide est P_o.



La résultante des actions sur la particule fluide est

$$\boldsymbol{\overrightarrow{F_g} + \overrightarrow{F_d} = (P_o + p)S\overrightarrow{u_x} - P_o S\overrightarrow{u_x} = pS\overrightarrow{u_x}}$$

et la puissance $\mathcal{P} = \boldsymbol{pS\overrightarrow{u_x}.\vec{v}} = \boldsymbol{\vec{\Pi}.S\overrightarrow{u_x}}$ où $\boldsymbol{\vec{v}}$ est la vitesse que la particule fluide acquiert au passage de l'onde sonore.

Définition : le vecteur densité surfacique de puissance est :

$$\vec{\Pi} = p.\vec{v} \text{ en W.m}^{-2}$$

La puissance acoustique est le flux de $\vec{\Pi}$ à travers une surface S :

$$P = \iint \vec{\Pi}.d\vec{S}$$

2. Densité volumique d'énergie sonore :

E = énergie sonore la densité volumique d'énergie sonore est définie par e = $\frac{dE}{d\tau}$ en J.m^{-3}.

Définition : énergie cinétique volumique (J.m^{-3}) :

$$e_c = \frac{1}{2}.\rho_0 v^2$$

Définition : énergie potentielle volumique (J.m^{-3}):

$$e_p = \frac{1}{2}.\chi_S p^2$$

L'énergie volumique totale est donc : $\mathbf{e = e_C + e_P}$

Propriétés : pour une onde progressive $e_C = e_P$; e vérifie l'équation de propagation.

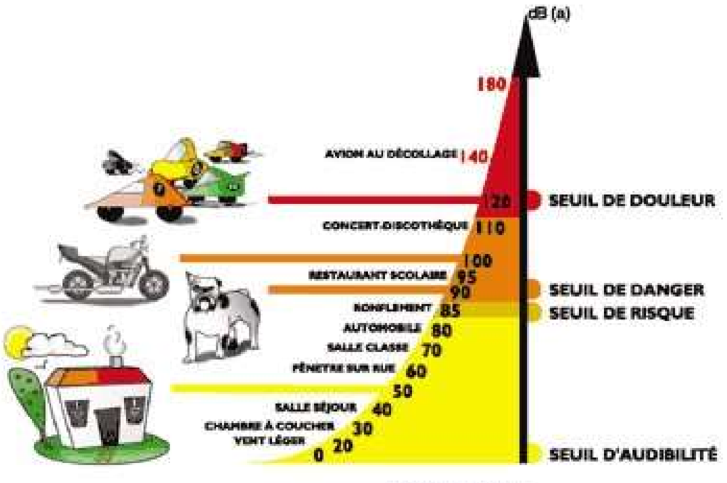
3. Intensité acoustique :

Définition : l'intensité acoustique en $W.m^{-2}$ est la moyenne temporelle de la norme du vecteur densité de puissance sonore :

$$I = \langle \|\vec{\pi}\| \rangle_T$$

Définition : le niveau sonore ou intensité sonore en dB est :

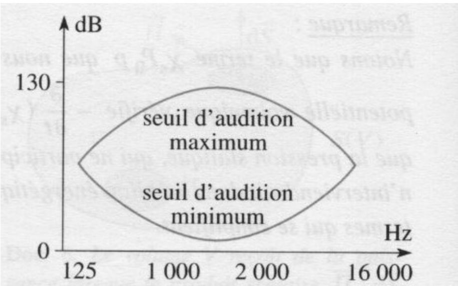
$$I_{dB} = N = 10\log(I/I_0) \text{ avec } I_0 = 10^{-12}\ W.m^{-2}.$$



Echelle du bruit

Conversation normale à 1 m 60 dB

Intensité sonore



Doc. 7a. *Seuils d'audition en fonction de la fréquence.*

	intensité sonore I ($W.m^{-2}$)	amplitude de la surpression (Pa)
seuil d'audition	10^{-12}	$3 \cdot 10^{-5}$
intensité forte	10^{-4}	0,3
seuil de douleur	1	30

Doc. 7b. *L'oreille est sensible à de très faibles variations de pression.*

I_{dB}
0
80
120

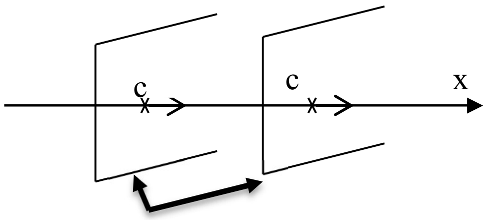
III. Une solution de l'équation de D'Alembert : les Ondes sonores Planes Progressives Harmoniques (OPPH)

1. Notion de surface d'onde :

p(x,t) est une Onde Progressive Harmonique solution de l'équation de d'Alembert
p(x,t) = p_o.cos(ωt - kx + φ) se propage dans la direction Ox dans le sens x croissant.

$\vec{k} = k\overrightarrow{u_x}$ est le vecteur d'onde.

Si t = const, les points tels que p(x,t) = const ont pour équation x = const.
Il s'agit de l'équation d'un plan perpendiculaire à l'axe Ox, direction de propagation.
D'où le qualificatif d'onde **PLANE**. Ce plan s'appelle le **plan d'onde.** Tous les points d'un même plan d'onde vibrent en phase.



plans d'onde

p(x,t) = p_o.cos(ωt - kx + φ) est appelée **OPPH** : Onde Plane Progressive Harmonique se propageant dans le sens x croissant.

Remarque : l'onde progressive harmonique sur la corde est aussi une onde plane.

Par définition, on appelle **surface d'onde** l'ensemble des points qui, à un instant donné vibrent en phase. On montre que la surface d'onde est toujours perpendiculaire à la direction de propagation de l'onde.

2. Ecriture généralisée du champ de pression :

Pour une OPPH se propageant dans le sens x croissant $\vec{k} = k\overrightarrow{u_x}$ où $\overrightarrow{u_x}$ est la direction de propagation de l'onde, on peut écrire que kx = $k\overrightarrow{u_x}\,.\,x\overrightarrow{u_x} = \vec{k}.\overrightarrow{OM} = \vec{k}.\vec{r}$ en posant $\overrightarrow{OM} = \vec{r} = x\overrightarrow{u_x}$ et donc p(x,t)) = p($\vec{r}$,t) = p_o.cos(ωt - $\vec{k}.\vec{r}$ + φ)

Soit une OPPH se propageant dans une direction $\vec{u}$ quelconque, telle que $\vec{u} = \frac{\vec{k}}{k}$

On peut alors écrire, dans la base cartésienne $\vec{k} = k_x\vec{u}_x + k_y\vec{u}_y + k_z\vec{u}_z$

$$\text{et } \overrightarrow{OM} = \vec{r} = x.\overrightarrow{u_x} + y.\overrightarrow{u_y} + z.\overrightarrow{u_z}$$
$$\text{donc } \vec{k}.\vec{r} = k_x.x + k_y.y + k_z.z$$

et p($\vec{r}$,t) = p_o.cos(ωt - $\vec{k}.\vec{r}$ + φ) = p_o.cos(ωt - $(k_x.x + k_y.y + k_z.z)$ + φ) = p(x,y,z,t)

En complexe OPPH : $\underline{p}(\vec{r},t) = \underline{p_o}.\exp(j(\omega t - \vec{k}.\vec{r}))$ avec $\underline{p_o} = p_o.e^{j\varphi}$

$$\underline{p}(\vec{r},t) = \underline{p_o}.\exp(j(\omega t - k_x.x - k_y.y - k_z.z))$$

3. Dérivation formelle pour une OPPH UNIQUEMENT

Soit $\underline{p}(\vec{r},t) = \underline{p_o}.\exp(j(\omega t - k_x.x - k_y.y - k_z.z)) = \underline{p_o}.e^{j(\omega t - \vec{k}.\overrightarrow{OM})} = \underline{p_o}.e^{j(\omega t - k_x.x - k_y.y - k_z.z)}$

$$\overrightarrow{\boldsymbol{grad}}\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \underline{p}}{\partial x} \\ \frac{\partial \underline{p}}{\partial y} \\ \frac{\partial \underline{p}}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \underline{p} = \vec{\nabla}\underline{p} = \begin{pmatrix} -jk_x\underline{p} \\ -jk_y\underline{p} \\ -jk_z\underline{p} \end{pmatrix} = -j\begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{pmatrix}\underline{p} = -j\vec{k}.\underline{p}$$

Opérateur NABLA

On retient que pour une **OPPH UNIQUEMENT** exprimée sous la forme

$$\underline{p}(\vec{r},t) = \underline{p_o}.e^{j(\omega t - \vec{k}.\overrightarrow{OM})}$$

l'opérateur NABLA $\vec{\nabla} \leftrightarrow -j\vec{k}$.

On veillera à respecter l'homogénéité vectorielle et dimensionnelle.

Opérateur LAPLACIEN en complexe :

$$\Delta\underline{p} = \left(\frac{\partial^2 \underline{p}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \underline{p}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \underline{p}}{\partial z^2}\right) = \left((-jk_x)^2\underline{p} + (-jk_y)^2\underline{p} + (-jk_z)^2\underline{p}\right) =$$

$$(-j)^2(k_x{}^2 + k_y{}^2 + k_z{}^2)\underline{p} = (-jk)^2\underline{p}$$

On retient que pour une **OPPH UNIQUEMENT** exprimée sous la forme

$$\underline{p}(\vec{r},t) = \underline{p_o}.e^{j(\omega t - \vec{k}.\overrightarrow{OM})}$$

l'opérateur LAPLACIEN $\Delta \leftrightarrow (-jk)^2$

Application 1 : Déterminer la relation de dispersion dans le cas d'une onde à 3 dimensions :
L'équation d'onde s'écrit en complexe :

$$\Delta\underline{p} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \underline{p}}{\partial t^2} = 0$$

D'où si $\underline{p}(M,t) = \underline{p_o}.e^{j(\omega t - \vec{k}.\overrightarrow{OM})}$ est une OPPH

$$\Delta\underline{p} = (-jk)^2\underline{p} \text{ et } \frac{\partial^2 \underline{p}}{\partial t^2} = (j\omega)^2\underline{p}$$

D'où en remplaçant dans l'équation de D'Alembert

$$(-jk)^2\underline{p} - \frac{1}{c^2}(j\omega)^2\underline{p} = 0 \ soit \ \left(-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right)\underline{p} = 0$$

On retrouve la relation de dispersion $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$

Application 2 :

Déterminer l'expression du champ des vitesses de l'onde, à partir de l'équation d'Euler, en supposant que p(M,t) est une OPPH.

4. Relation entre p et v : impédance acoustique.

Définition : **l'impédance acoustique** d'une onde plane est :

$$Z = p / v$$

Considérons une onde progressive plane monochromatique dont la surpression s'écrit :

$$p(x,t) = p_0.\sin(\omega t - k.x + \varphi).$$

L'équation d'Euler linéarisée s'écrit ici $\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} = -k.p_0.\cos(\omega t - k.x + \varphi)$.

On en déduit $v(x,t) = \frac{k.p_0}{\rho_0 \omega}.\sin(\omega t - k.x + \varphi) = \frac{p_0}{\rho_0 c}.\sin(\omega t - k.x + \varphi)$.

Rappel : la constante d'intégration est nulle, car par hypothèse $\langle v(x,t) \rangle = 0$

On a donc pour une onde progressive suivant les x croissants :

$$\mathbf{Z_+ = \rho_0 c}$$

Pour une onde progressive suivant les x décroissants, on a de même :

$$\mathbf{Z_- = -\rho_0 c}$$

L'**impédance acoustique d'un milieu** est l'impédance d'une onde progressive se déplaçant selon les x croissants (c'est une grandeur positive) :

$$\mathbf{Z = \rho_0 c} = \frac{\rho_o}{\sqrt{\rho_o \chi_S}} = \sqrt{\frac{\rho_o}{\chi_S}}$$

$[Z] = kg.m^{-3}.m.s^{-1} = kg.m^{-2}.s^{-1}$

Ordres de grandeur : (en $kg.m^{-2}.s^{-1}$)

$Z_{air} = 1*340 = 340$; $Z_{eau} = 10^3 *1\,500 = 1,5.10^6$; $Z_{acier} = 7\,800* 5\,000 = 3,9.10^7$

$$Z_{gaz} < Z_{liquide} < Z_{solide}$$

5. Expressions des champs complexes de pression et de vitesse pour une OPPH unidirectionnelle

6. Expression de l'intensité sonore I pour une OPPH

Attention l'intensité sonore $I = \langle \|\vec{\pi}(x,t)\| \rangle = \langle \| p(x,t)\overrightarrow{v(x,t)} \| \rangle$ est une grandeur « quadratique » (produit de deux grandeurs linéaires) on NE peut PAS utiliser les expressions complexes de p(x,t) et $\overrightarrow{v(x,t)}$ pour déterminer $\vec{\pi}(x,t)$.

Pour déterminer $\vec{\pi}(x,t)$, il FAUT utiliser les formes réelles de p(x,t) et $\overrightarrow{v(x,t)}$.

Montrer que

$$I = \frac{p_o v_o}{2}$$

où p_o est l'amplitude de l'onde de surpression et v_o est l'amplitude de l'onde de vitesse pour une OPPH se propageant dans le sens x croissant.

7. Validation de l'approximation acoustique

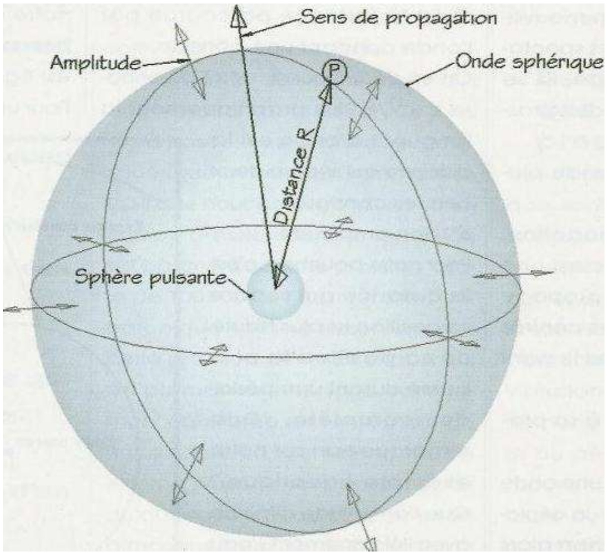
Soit un haut-parleur de 100 W qui rayonne sur une surface de 10 m^2.
Déterminer la valeur de l'intensité sonore, puis celle de l'intensité sonore en dB.

Calculer l'amplitude de l'onde de surpression sonore p_o, de celle de la vitesse v_o, de celle de la « surmasse volumique » μ_o, de celle de déplacement de la particule fluide, ξ_o.

A quelles grandeurs doit-on comparer les valeurs numériques de p_o, v_o, μ_o et ξ_o pour justifier l'approximation acoustique ?

IV. Ondes Sphériques Progressives Harmoniques (OSPH)

Le modèle de l'onde plane ne permet pas d'interpréter la localisation de la puissance sonore, d'où la nécessité d'introduire le modèle de l'onde sphérique.



1. Le modèle de l'onde sphérique

La « sphère pulsante » au centre O de la sphère modélise un haut-parleur qui émet une onde sonore de manière isotrope dans toutes les directions de l'espace.

Soit le point P et p(P,t) la surpression acoustique en ce point.

p(P,t) = p(O, t - τ) où τ est la durée mise par l'onde sonore pour parcourir la distance OP, $\tau = \frac{OP}{c} = \frac{r}{c}$ où c est la célérité de l'onde, donc

p(P,t) = p(r,t) = p(t – r/c).

La surface d'onde est définie par p(t – r/c) = const à t fixé, donc r = const est l'équation de la sphère de rayon r passant par le point P.

Les surfaces d'onde sont des sphères, l'onde est dite sphérique.

Le vecteur d'onde $\vec{k}$ est perpendiculaire à la surface d'onde donc $\vec{k} = k\overrightarrow{u_r}$. Le vecteur d'onde est radial.

Comme l'onde sonore est longitudinale $\vec{v}$ est colinéaire à $\vec{k}$ donc $\vec{v} = v(r,t).\overrightarrow{u_r}$

2. Puissance moyenne rayonnée :

Le milieu étant supposé non-absorbant, la puissance moyenne fluant à travers une sphère de rayon r centrée sur S est :

$$P = \langle \iint_{Sp\quad ère} p(r,t).\vec{v}(r,t).d\vec{S} \rangle \quad = \langle p(r,t).v(r,t) \rangle .4.\pi.r^2 = I.4.\pi.r^2$$

L'intensité acoustique $I = \frac{P}{4.\pi.r^2}$ décroit alors en $1/r^2$.

On peut en déduire que l'amplitude des champs de pression et de vitesse décroit en 1/r

3. Forme de la surpression :

On montre alors qu'une solution harmonique s'écrit :

$$p(r,t) = \frac{A}{r}\cos(\omega t - k.r + \varphi)$$

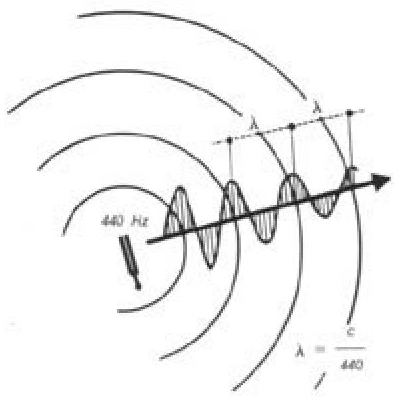


Fig. 4. — Les ondes sphériques rayonnées par le diapason dans l'espace ont une longueur d'onde définie par $\lambda = \frac{c}{N}$, leur amplitude décroit en raison inverse de la distance (et leur intensité en raison inverse du carré de cette distance).

L'amplitude de l'onde de surpression est inversement proportionnelle à la distance.

p(r,t) est une onde de surpression, solution de l'équation de D'Alembert à 3 dimensions :

$$\frac{\partial^2 p(r,t)}{\partial t^2} = c^2\, \Delta p(r,t)$$

En coordonnées sphériques, pour p = p(r,t), le laplacien scalaire s'écrit :

$$\Delta p(r,t) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 (r^2 p)}{\partial r^2}$$

On peut montrer que p(r,t) = $\frac{A}{r}$ f(t – r/c) est solution

4. Forme de la vitesse :

L'équation d'Euler linéarisée s'écrit :

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\frac{\partial p(r,t)}{\partial r}.\overrightarrow{u_r}$$

On calcule :

$$\vec{v} = \left(\frac{A}{\rho_0 r^2 \omega}\sin(\omega t - k.r + \varphi) + \frac{A}{\rho_0 r c}\cos\left(\omega t - k.r + \varphi\right)\right)\overrightarrow{u_r}$$

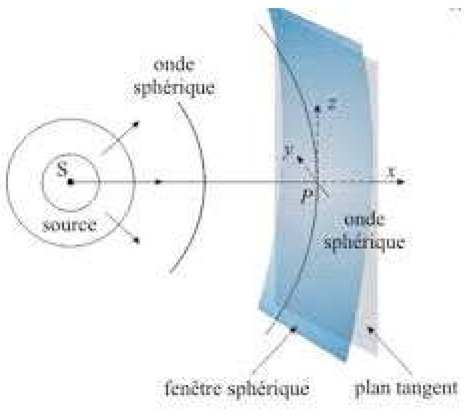
Le second terme est prépondérant dès que :

$$r >> \lambda$$

On est alors dans l'approximation de **champ lointain**.

5. Onde localement plane :

A grande distance de la source, l'onde sphérique peut-être confondue avec son plan tangent, on dit que l'onde est localement plane, et si on s'éloigne peu de ce plan tangent, on peut supposer que l'amplitude de l'onde reste constante.



V. Réflexion et transmission d'une onde sonore à l'interface de deux fluides

1. Position du problème

On considère une onde sonore plane progressive harmonique qui se propage unidirectionnellement dans l'air dans le sens x croissant.

Exprimer l'onde de surpression et de vitesse en fonction des amplitudes, x et t.
Rappeler la valeur numérique c_1 de la célérité de cette onde, ainsi que l'impédance acoustique Z_1 de l'air.

En $x = 0$, l'onde sonore change de milieu qui devient de l'eau.
Rappeler la valeur numérique c_2 de la célérité de l'onde sonore dans l'eau, ainsi que l'impédance acoustique Z_2 de l'eau. Soit k_2 la valeur du vecteur d'onde dans l'eau. A-t-on $k_1 = k_2$?

A l'interface des milieux air-eau, on observe l'apparition d'une onde réfléchie et d'une onde transmise. A quel phénomène ceci est-il analogue ?

Exprimer les champs de pression $\underline{p_i}(x,t)$, $\underline{p_r}(x,t)$, $\underline{p_t}(x,t)$ et vitesses $\underline{v_i}(x,t)$, $\underline{v_r}(x,t)$, $\underline{v_t}(x,t)$ complexes des ondes incidentes, réfléchies et transmises respectivement.
On note p_o (grandeur supposée réelle) l'amplitude de l'onde de surpression incidente
$\underline{p_{or}}$ l'amplitude complexe de l'onde de surpression réfléchie
$\underline{p_{ot}}$ l'amplitude complexe de l'onde de surpression transmise
Exprimer les amplitudes complexes des vitesses incidentes, réfléchie et transmise en fonctions des amplitudes complexes des pressions respectives et de l'impédance acoustique du milieu.

<u>But du problème</u> : déterminer les amplitudes complexes $\underline{p_{or}}$ et $\underline{p_{ot}}$ en fonction des données : p_o, Z_1 et Z_2

La résolution de ce problème est faite à l'aide des questions ci-dessous.

2. Conditions à l'interface x = 0 :

La pression est une fonction continue.
La composante normale de la vitesse est continue.

Dans l'air, milieu 1, coexistent onde incidente et onde réfléchie. Ecrire le champ des pressions et des vitesses en tout point de l'air.

Dans l'eau, milieu 2 il n'y a qu'une onde transmise.

En appliquant les deux conditions à la limite, montrer que $\underline{p_{or}}$ et $\underline{p_{ot}}$ sont solutions du système :

$$\begin{cases} p_o + \underline{p_{or}} = \underline{p_{ot}} \\ \dfrac{p_o}{Z_1} - \dfrac{\underline{p_{or}}}{Z_1} = \dfrac{\underline{p_{ot}}}{Z_2} \end{cases}$$

Résoudre ce système, pour exprimer $\underline{p_{or}}$ et $\underline{p_{ot}}$ en fonction de p_o, Z_1 et Z_2.

3. **Expressions des coefficients de réflexion et de transmission en amplitude**

Définition des coefficients de transmission en pression : $\underline{\tau}_p = \dfrac{\underline{p}_{ot}}{\underline{p}_o}$ **; en vitesse** $\underline{\tau}_v = \dfrac{\underline{v}_{ot}}{\underline{v}_o}$
Définition des coefficients de réflexion en pression : $\underline{\rho}_p = \dfrac{\underline{p}_{or}}{\underline{p}_o}$ **; en vitesse** $\underline{\rho}_v = \dfrac{\underline{v}_{or}}{\underline{v}_o}$

Montrer que $\underline{\tau}_p = \dfrac{2Z_2}{Z_1+Z_2}$; $\underline{\tau}_v = \dfrac{2Z_1}{Z_1+Z_2}$; $\underline{\rho}_p = -\dfrac{Z_1-Z_2}{Z_1+Z_2}$; $\underline{\rho}_v = \dfrac{Z_1-Z_2}{Z_1+Z_2}$

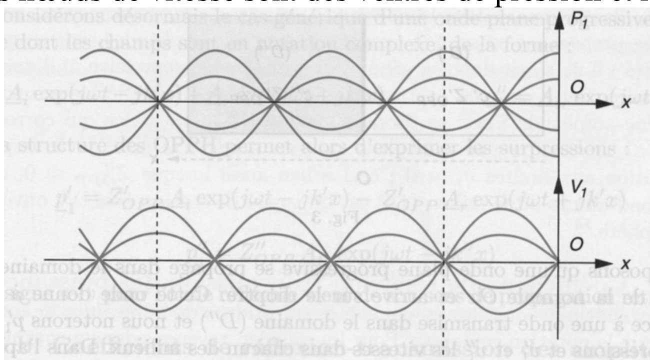
En déduire les expressions des surpressions et vitesse des ondes incidentes, réfléchies et transmises en fonction de x, t, p_o, des coefficients de réflexion ou de transmission et de l'impédance acoustique.

4. **Etude de cas particuliers :**

a) Milieux adaptés $Z_1 = Z_2$: montrer qu'il n'y a pas d'onde réfléchie.

b) $Z_2 << Z_1$ et $Z_2 >> Z_1$: montrer qu'il n'y a pas d'onde transmise et qu'il y a formation d'onde stationnaire dans le milieu 1.

On vérifiera que les nœuds de vitesse sont des ventres de pression et réciproquement.



5. **Coefficients de réflexion et de transmission en puissance**

I_i est le niveau sonore de l'onde incidente ; I_r est le niveau sonore de l'onde réfléchie
I_t est le niveau sonore de l'onde transmise

Définition du coefficient de transmission en puissance : $T = \dfrac{I_t}{I_i}$
Définition du coefficient de réflexion en puissance : $R = \dfrac{I_r}{I_i}$

Montrer que $T = \dfrac{4Z_1Z_2}{(z_1+Z_2)^2}$ et $R = \left(\dfrac{Z_1-Z_2}{Z_1+Z_2}\right)^2$ et que R + T = 1

En déduire que

$I_i = I_t + I_r$ relation de conservation de la puissance sonore à l'interface entre deux fluides