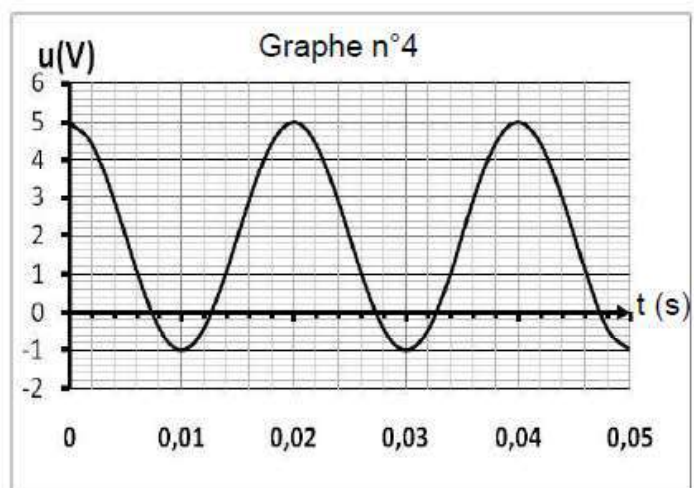
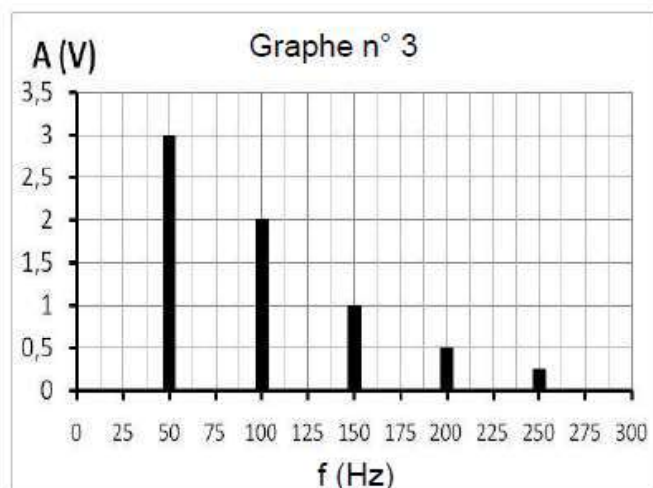
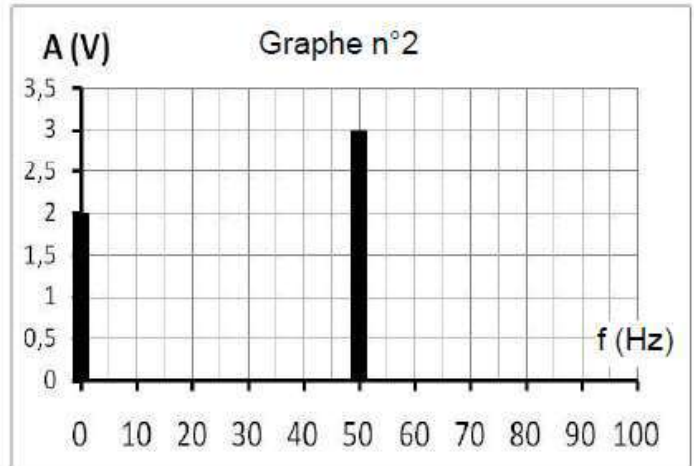
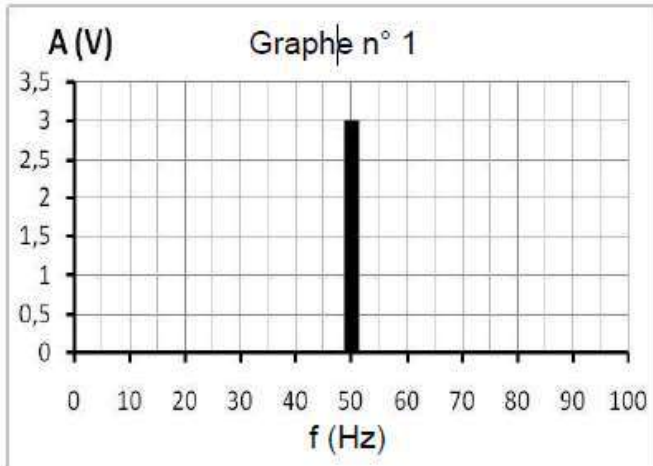


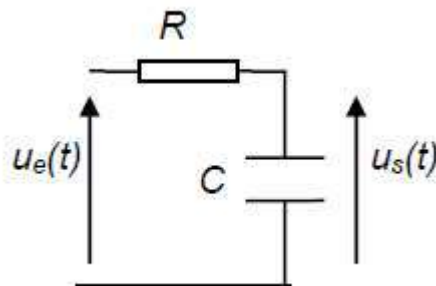
Premier problème : filtrage

Soit la tension $u_e(t) = 2 + 3\cos(2\pi \cdot 50 \cdot t)$ avec u_e en V et t en s générée par un capteur de température.

Q1. Indiquer, parmi les graphes suivants, celui qui représente le spectre en amplitude de $u_e(t)$. Préciser pourquoi les autres graphes ne conviennent pas.



La partie de la tension $u_e(t)$ variable périodiquement en fonction du temps est due à des parasites électriques, de fréquence 50 Hz. Il faudrait garder uniquement la composante continue de ce signal car elle seule contient l'information dépendante de la température. On utilise pour cette fonction le circuit ci-dessous :



Q2. À l'aide des équivalents en haute et basse fréquences des composants, déterminer la nature du filtre réalisé avec le circuit précédent. Justifier si ce circuit permet d'isoler la composante continue du signal.

Q3. Montrer que la fonction de transfert du montage peut se mettre sous la forme :

$$\underline{H} = \frac{\underline{u}_s}{\underline{u}_e} = \frac{H_0}{1 + j \frac{\omega}{\omega_c}}.$$

Exprimer H_0 et ω_c en fonction de R et C . Quel nom donne-t-on à H_0 ?

Q4. Rappeler la définition de la fréquence de coupure à -3 dB. Donner l'expression de cette fréquence de coupure, notée f_c , en fonction de R et de C pour ce circuit.

Q5. Préciser la valeur du gain en décibel, G_{dB} , lorsque $\omega \ll \omega_c$.

Q6. Exprimer, en fonction de ω / ω_c , le gain en décibel, G_{dB} , lorsque $\omega \gg \omega_c$.

Q7. Déterminer l'expression numérique de $u_s(t)$ en prenant $f_c = 0,5$ Hz. Conclure.

Deuxième problème : Expérience de Rüchardt

Ce sujet propose une étude de l'expérience de Rüchardt. Elle consiste à placer un gaz dans un récipient étanche muni d'un tube (figure 1). On ferme le tout par un piston qui peut librement coulisser dans le tube. Le diamètre du piston est du mieux possible égal à celui du tube, ce qui assure une étanchéité (pas de fuite de gaz).

Sous l'action de son poids, le piston commence à descendre. Ceci fait augmenter la pression dans le récipient, ce qui finit par arrêter la descente du piston, et par le faire remonter. Il s'en suit une série d'oscillations, comme on peut le voir sur la figure 2.

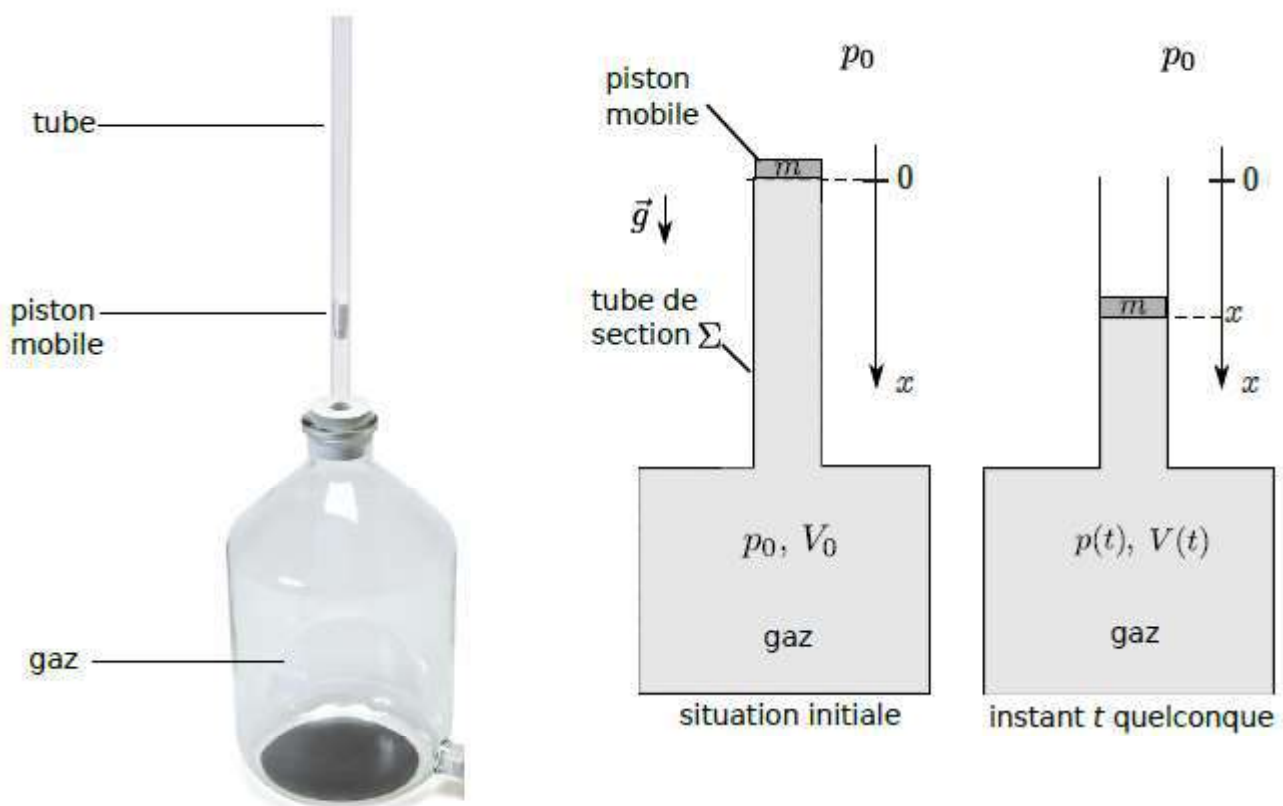


Figure 1 : photographie et schéma de l'expérience.

Proposée par Rüchardt en 1929, perfectionnée à plusieurs reprises, cette expérience et ses variantes ont permis des mesures extrêmement précises du coefficient adiabatique $\gamma = C_p/C_v$ de divers gaz.

I Détermination de la période des oscillations

On utilise les notations de la figure 1. En particulier :

- V_0 est le volume initial de l'ensemble du gaz (récipient + partie dans le tube sous le piston).
 $V(t)$ est le volume de ce même gaz, mais à un instant t quelconque. La pression du gaz est notée $p(t)$ et sa température $T(t)$.
 - La pression atmosphérique est p_0 . C'est aussi la pression dans le récipient à l'instant initial.
 - La section du tube est notée Σ .
 - La masse du piston est m et l'intensité de la pesanteur est g .
 - $\vec{e}_x$ est un vecteur unitaire descendant.
- 1** - La loi de Laplace pour le gaz s'écrit $p(t) \times V(t)^\gamma = p_0 V_0^\gamma$, avec $\gamma = C_p/C_V$ l'exposant adiabatique du gaz. On suppose dans toute cette partie I que cette loi s'applique.
Rappeler les hypothèses nécessaires pour que la loi de Laplace s'applique.
- 2** - Établir une relation entre le volume $V(t)$, V_0 , la section Σ et l'abscisse x du piston (telle que définie sur la figure 1).
- 3** - On admet que la résultante des forces de pression qui s'exercent sur le piston s'écrit :

$$\vec{F} = p_0 \Sigma \vec{e}_x - p(t) \Sigma \vec{e}_x.$$

En utilisant la loi de Laplace et un développement limité valable pour $\Sigma x/V_0 \ll 1$, montrer que la résultante des forces de pression qui s'exercent sur le piston se met sous la forme :

$$\vec{F} = -\gamma k x \vec{e}_x, \quad (1)$$

avec k une constante à exprimer en fonction des données du problème.

Le candidat pourra admettre cette relation (1) pour poursuivre.

I.1 Méthode de Rüchardt

- 4** - En plus de $\vec{F}$, la seule autre force prise en compte comme agissant sur le piston est la force de pesanteur.
À l'aide d'une étude mécanique, établir une équation différentielle portant sur $x(t)$.
- 5** - L'écrire sous une forme canonique en faisant intervenir la pulsation propre ω_0 . Donner l'expression de ω_0 en fonction de k , γ et m .
- 6** - Établir l'expression de la solution $x(t)$ de cette équation différentielle, en fonction de ω_0 , t , m , g , γ , k , ainsi que de deux constantes A et B qu'on ne cherchera pas à déterminer.
- 7** - Pour l'expérience considérée ici, $m/k = 4,01 \times 10^{-2} \text{ s}^2$. Le récipient étant rempli d'air, on mesure une période des oscillations $T_0 = 1,08 \text{ s}$. Exprimer γ en fonction de m/k et de T_0 .

Pour information, l'application numérique donne $\gamma = 1,36$, et la valeur théorique est 1,4.

I.2 Méthode de Rinkel

Une seconde méthode, exploitée par Rinkel en 1929, consiste à mesurer la distance maximale L parcourue par le piston avant qu'il ne remonte pour la première fois. Le piston est lâché en $x = 0$ sans vitesse initiale.

On utilise ici une méthode énergétique afin de déterminer l'expression de L .

- 8 - Donner, en faisant intervenir les grandeurs m , g , x et $\dot{x}$, les expressions de l'énergie cinétique E_c du piston et de son énergie potentielle de pesanteur $E_{p,pes}$.
- 9 - Donner (sans démonstration) l'expression de l'énergie potentielle associée à la force $\vec{F} = -\gamma k x \vec{e}_x$. On pourra raisonner par analogie avec l'énergie potentielle élastique associée à la force de rappel d'un ressort.
- 10 - En utilisant ce qui précède, déterminer l'expression de la distance L en fonction de g , k , γ et m .

II Étude mécanique avec frottements

Un pointage vidéo réalisé sur une expérience est montré sur la figure 2. L'amortissement de la courbe $x(t)$ montre qu'il y a présence de dissipation (frottements solides ou fluides, échanges thermiques entre le gaz et le récipient, non uniformité de la pression, amortissement d'ondes acoustiques...). L'objectif de cette partie est de modéliser cette courbe, sans chercher à comprendre le détail du processus de dissipation.

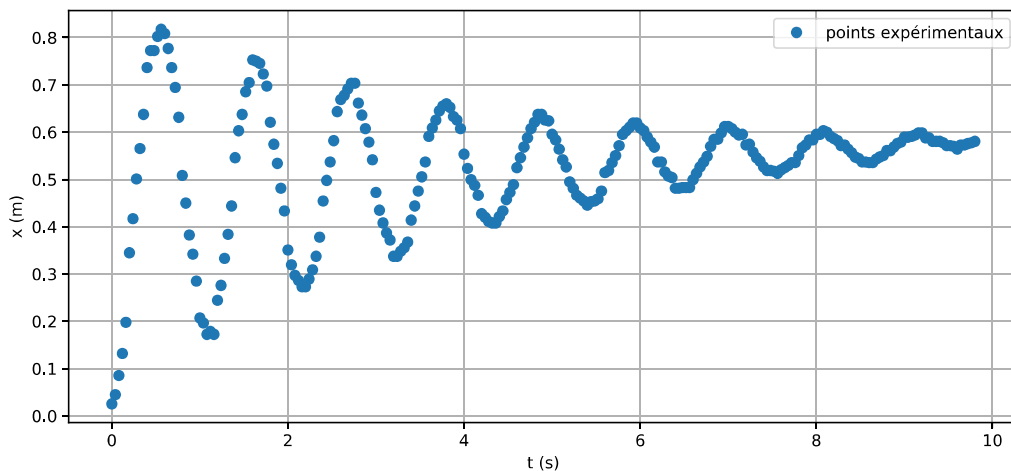


Figure 2 : données issues d'un pointage vidéo. L'échelle des x est approximative, celle des t est précise.

Nous supposons que l'équation du mouvement du piston s'écrit sous la forme suivante, et nous allons tester si ceci permet une description correcte de l'enregistrement $x(t)$:

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{x} + \omega_0^2 x = g. \quad (2)$$

La pulsation propre de ce système est ω_0 , son expression théorique reste la même que précédemment. Le facteur de qualité Q traduit la présence plus ou moins forte de dissipation. Le second membre g est constant.

- 11 - En vous aidant de la figure 2, et sans faire de calculs, donner en justifiant une valeur approchée de Q .

Comment se nomme le type de régime dans lequel se trouve le système ?

12 - On écrit la forme générale des solutions de l'équation homogène ainsi :

$$x_H(t) = (A \cos \Omega t + B \sin \Omega t) e^{-\mu t}.$$

Établir les expressions de Ω et de μ en fonction de ω_0 et Q .

13 - Donner la forme générale des solutions $x(t)$ de l'équation (2).

14 - On suppose que la masse est lâchée en $x = 0$ sans vitesse initiale. Déterminer alors les expressions des constantes A et B en fonction de Ω , μ , ω_0 et g .

15 - Déterminer l'expression de la position d'équilibre, x_{eq} .

16 - Tracer l'allure de la solution $x(t)$. On fera apparaître sur le graphique : la position initiale $x(0)$, la position d'équilibre x_{eq} , et la pseudo-période $T = 2\pi/\Omega$.

17 - Y a-t-il une différence significative entre la période propre T_0 et la pseudo-période T ? Justifier.

18 - Un modèle des données est représenté figure 3. En utilisant une de vos expressions précédentes, et les valeurs numériques en légende de la figure, en déduire une valeur approchée de Q .

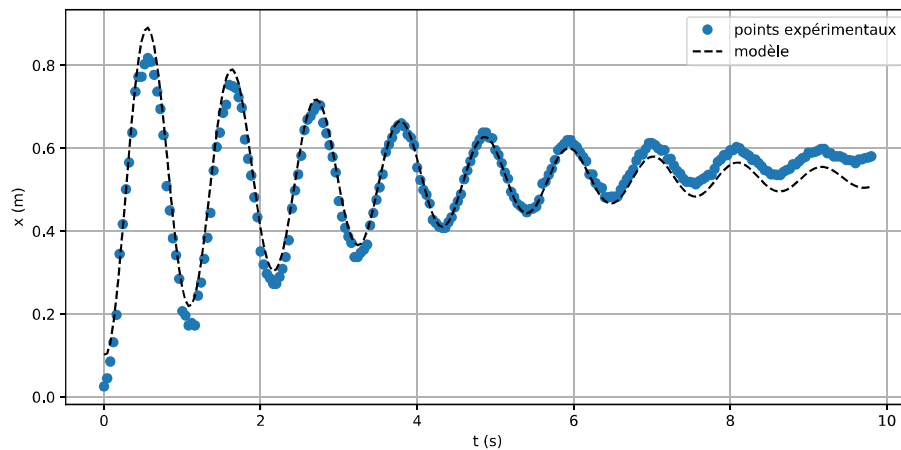


Figure 3 : données et modèle du type $C + (A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t)) \exp(-\mu t)$.

Le programme retourne, en unités cohérentes SI :

$\Omega = 5.83$, $\mu = 0.30$, $A = -0.43$, $B = -0.059$, $C = 0.53$.

19 - Un second modèle, présenté figure 4, est en meilleur accord avec les données. Proposer une cause physique possible à l'existence du terme supplémentaire en $D \times t$.

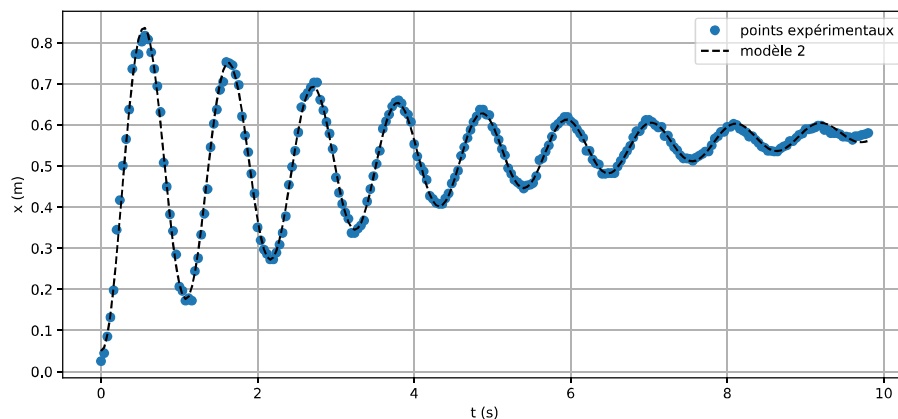


Figure 4 : données et modèle du type

$C + (A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t)) \exp(-\mu t) + D \cdot t$.

Le programme retourne, en unités cohérentes SI :

$\Omega = 5.82$, $\mu = 0.29$, $A = -0.42$, $B = -0.037$, $C = 0.47$, $D = 0.011$.

III Étude en régime sinusoïdal forcé

En 1940, Clark et Katz modifient la méthode de Rüchardt afin d'en améliorer la précision. Ils obtiennent des valeurs de γ associées à des incertitudes relatives de l'ordre de 0,1 %, et qui serviront de référence pour la dizaine d'années qui suivent.

Par rapport à la méthode de Rüchardt, ils procèdent à deux modifications principales :

- Le piston mobile sépare maintenant, de façon étanche, deux compartiments. Son oscillation n'est plus verticale, mais horizontale.
- Un électroaimant exerce une force $\vec{F}_E(t) = F_0 \cos(\omega t) \vec{e}_x$ sur le piston mobile.

On admet que sous certaines hypothèses, tout ceci modifie l'équation du mouvement pour donner :

$$m\ddot{x} = -\gamma k x - \lambda \dot{x} + F_E(t), \quad (3)$$

avec λ un coefficient de frottement, k une constante de raideur qui dépend, comme dans le cas précédent, de la géométrie du système et de la pression du gaz au repos, et $F_E(t) = F_0 \cos(\omega t)$ un forçage à la pulsation ω imposée.

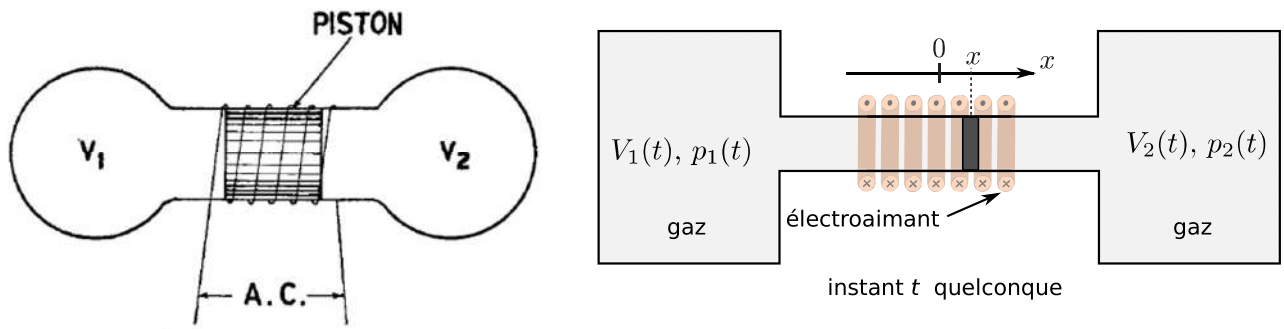


Figure 5 : schéma de la manipulation, à gauche issue de l'article original (source : doi.org/10.1139/cjr40a-002), à droite retravaillée.

III.1 Mise en équation

Clark et Katz exploitent le phénomène de résonance. Pour le mettre en évidence, nous utilisons la notation complexe (avec j le nombre complexe tel que $j^2 = -1$) :

- le signal $F_E(t) = F_0 \cos(\omega t)$ est représenté par $\underline{F}_E(t) = F_0 e^{j\omega t}$;
- la position de la masse est du type $x(t) = X_0 \cos(\omega t + \varphi)$, représentée par $\underline{x}(t) = \underline{X}_0 e^{j\omega t}$, avec l'amplitude complexe $\underline{X}_0 = X_0 e^{j\varphi}$.

20 - À partir de l'équation (3), établir une expression de l'amplitude complexe $\underline{X}_0$. L'écrire sous la forme

$$\underline{X}_0 = \frac{A}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + \frac{j}{Q} \frac{\omega}{\omega_0}}. \quad (4)$$

On donnera les expressions de A , ω_0 et Q en fonction de F_0 , λ , k , γ et m .

Le candidat pourra admettre cette relation (4) pour poursuivre.

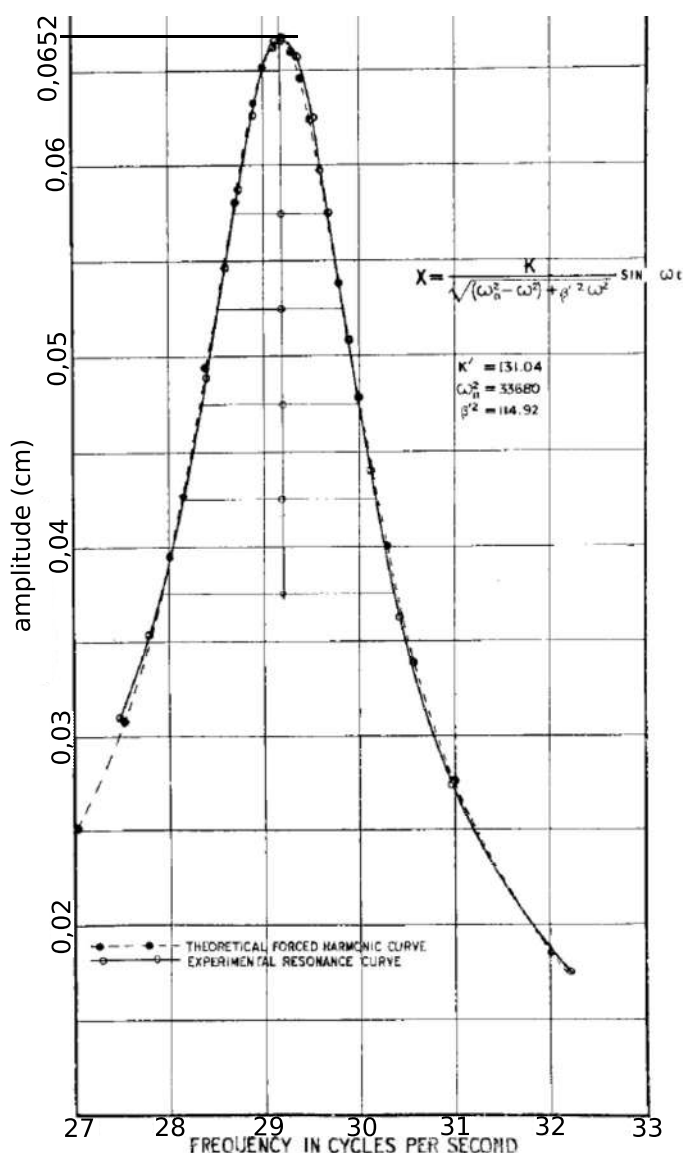
21 - Donner l'expression de l'amplitude X_0 du signal $x(t)$, en fonction de ω , ω_0 , Q et A .

22 - Indiquer vers quoi tend X_0 lorsque la pulsation du forçage ω tend vers 0, puis lorsqu'elle tend vers $+\infty$.

- 23 - On pose $u = \omega/\omega_0$. Expliquer pourquoi la recherche d'un maximum de la fonction $X_0(\omega)$ est équivalente à la recherche d'un minimum pour la fonction $f(u) = (1 - u^2)^2 + u^2/Q^2$.
- 24 - Montrer que $f(u)$ admet un minimum en $u \neq 0$ seulement si $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$. Donner alors l'expression de u , noté u_r , pour lequel $f(u)$ est minimale.
- 25 - On note ω_r la pulsation non nulle pour laquelle $X_0(\omega)$ est maximale, lorsque $Q > 1/\sqrt{2}$. Donner l'expression de ω_r en fonction de ω_0 et de Q .
Que dire du rapport ω_r/ω_0 lorsque $Q \approx 10$ comme ici ?
- 26 - En partant de l'expression (4), donner l'expression de X_0 en $\omega = \omega_0$.
En déduire les valeurs de X_0 et de φ pour la pulsation ω_0 .
- 27 - Tracer l'allure de la courbe $X_0(\omega)$, en précisant les expressions en $\omega = 0$ et $\omega = \omega_0$.
- 28 - Établir l'expression de φ lorsque ω tend vers 0, puis lorsque ω tend vers $+\infty$.
- 29 - Tracer alors l'allure de la courbe $\varphi(\omega)$.

III.2 Exemples de résultats

Clark et Katz exploitent la mesure de ω_r pour remonter à celle de γ . Ils prennent en compte diverses corrections non abordées ici (écart aux gaz parfaits, mise en mouvement du gaz, non adiabaticité...). La figure 6 montre des exemples de valeurs obtenues.



July 15, 1938:	1.401 ₆
	1.401 ₄
	1.401 ₃
Feb. 24, 1939:	1.401 ₃
	1.400 ₈
	1.401 ₀
March 7, 1939:	1.401 ₂
	1.400 ₉
Average	1.401 ₂

Figure 6.

Gauche : courbe de X_0 en fonction de la fréquence (en Hz) obtenue par Clark et Katz.

Droite : valeurs obtenues pour du diazote, sous 1 bar, lors de différentes répétitions de l'expérience.

(source : doi.org/10.1139/cjr40a-003)

- 30** - On note γ_i la valeur numéro i de γ obtenue par Clark et Katz sur la figure 6 (droite). Il y a $N = 8$ valeurs. "Average" est la moyenne de ces 8 valeurs.

Quelle opération effectuer pour évaluer l'incertitude-type sur cette valeur moyenne ?

- 31** - On souhaite estimer la valeur du facteur de qualité Q pour l'expérience de la figure 6 (gauche). On rappelle que les fréquences de coupures $f_{c,1}$ et $f_{c,2}$ sont définies comme celles pour lesquelles $X_0(f) = (X_0)_{\max}/\sqrt{2}$. Pour une résonance assez piquée comme ici, on a la relation

$$|f_{c,1} - f_{c,2}| \approx \frac{f_r}{Q}$$

avec f_r la fréquence de résonance. On donne $\sqrt{2} \approx 1,4$.

Exploiter la figure 6 (gauche) pour en déduire une valeur de Q . Expliquer votre démarche, par exemple à l'aide d'une reproduction de l'allure de la figure 6 sur votre copie. On arrondira raisonnablement les valeurs pour faire les applications numériques.

On s'intéresse ensuite aux valeurs de γ obtenues. La valeur prédite par la théorie, pour un gaz parfait diatomique, est $\gamma = 1,4$.

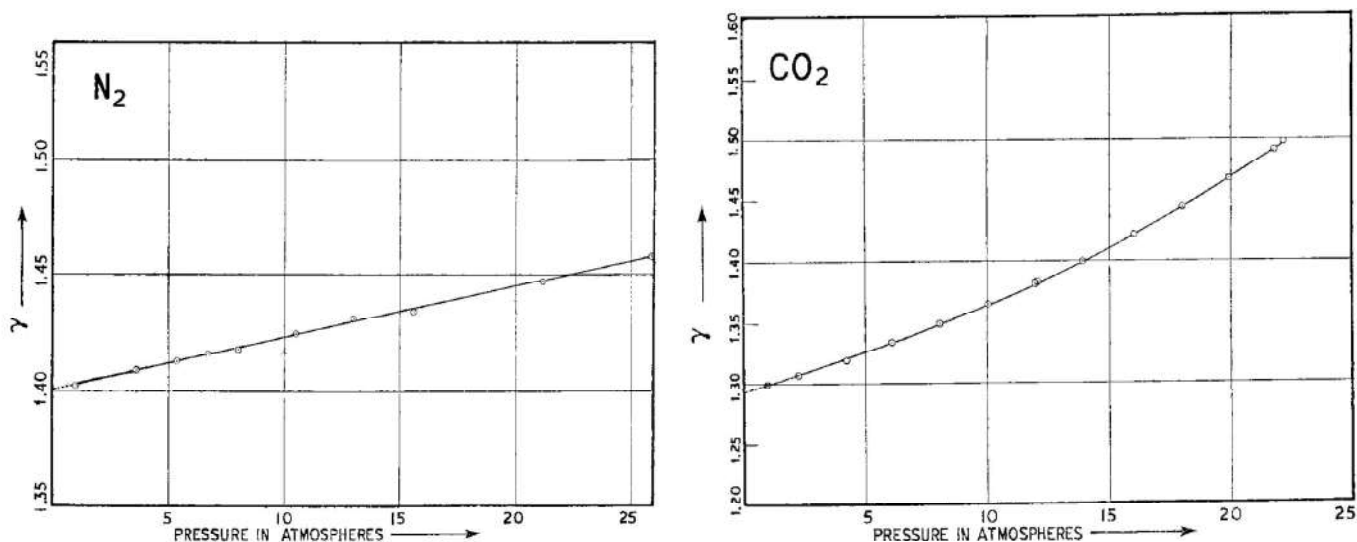


Figure 7 : valeurs de γ obtenues par Clark et Katz, à différentes pressions.

Gauche : pour N_2 . Droite : pour CO_2 .

- 32** - On considère les résultats pour le diazote N_2 (figure 7, gauche). Qu'est-ce qui explique les écarts de plus en plus importants à la valeur 1,4 à mesure que la pression augmente ?
- 33** - On considère les résultats pour le CO_2 (figure 7, droite). Qu'est-ce qui explique les écarts importants à la valeur 1,4, même à basse pression ?

IV Étude de l'origine de la dissipation

Plusieurs phénomènes physiques contribuent à l'amortissement des oscillations constaté sur la figure 2. Une étude expérimentale plus élaborée qu'ici¹ montre que dans les conditions de la figure 2, le phénomène dominant est la non adiabaticité de la transformation. Nous étudions cet aspect dans cette partie.

Du fait de sa masse importante, le verre du récipient est à la température T_0 constante. Il joue, pour le gaz, le rôle d'un thermostat. Pendant une durée dt , le gaz reçoit de la part du verre un transfert thermique :

$$\delta Q = -h\Sigma_t(T - T_0)dt, \quad (5)$$

avec $T(t)$ la température du gaz supposée uniforme, Σ_t la surface du verre au contact du gaz, et h un coefficient conducto-convectif.

34 - Justifier le signe moins dans cette expression.

On considère le système {gaz}. On admet que le premier principe de la thermodynamique, appliqué à ce système, s'écrit entre deux instants proches :

$$dU = -pdV + \delta Q, \quad (6)$$

avec p la pression du gaz supposée uniforme, U son énergie interne, dV la variation de son volume. On rappelle également la première identité thermodynamique pour un système de composition constante :

$$dU = TdS - pdV, \quad (7)$$

avec dS la variation d'entropie du système.

35 - En utilisant la première identité thermodynamique et (6), montrer que la variation d'entropie du gaz vérifie : $TdS = \delta Q$, avec T la température du gaz.

36 - En utilisant le second principe appliqué au même système, entre deux instants proches, établir une expression de la création d'entropie δS_c en fonction de δQ , T et T_0 .

37 - En déduire une expression de δS_c en fonction de T , T_0 , h , Σ_t et dt , et montrer que $\delta S_c > 0$ si $h \neq 0$ et $T \neq T_0$.

Ce qui précède montre que la non adiabaticité de la transformation produit de l'entropie, et contribue donc à amortir les oscillations.

1. Par ex. Bulletin de l'Union des Physiciens n° 808, p.1615.