Au plus tard pour le jeudi 4 décembre 2025

PSI* **DEVOIR EN TEMPS LIBRE N° 8**

2025/2026 Facultatif pour groupe de 2 ou 3

Quelques situations physiques liées aux explosions nucléaires

Les recherches sur le noyau d'uranium ont mis en évidence le phénomène de fission nucléaire en 1939 ; ces travaux ont trouvé leur première application lors de l'explosion de la bombe d'Hiroshima, le 6 août 1945. Il va de soi que l'invention de la « bombe atomique » n'est peut-être pas le plus grand progrès de l'Humanité. Mais en l'état actuel des choses, cette arme existe, et il est souhaitable d'en aborder l'aspect physique pour mieux en saisir les tenants et aboutissants scientifiques. Ce problème comporte deux **parties totalement indépendantes**.

On rappelle par ailleurs les expressions d'analyse vectorielle :

- En coordonnées sphériques :

$$\Delta f(r) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right)$$

- En coordonnées cylindriques :

$$\Delta f(r) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right)$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{U}) = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial U_z}{\partial \theta} - \frac{\partial U_\theta}{\partial z}\right)\vec{e}_r + \left(\frac{\partial U_r}{\partial z} - \frac{\partial U_z}{\partial r}\right)\vec{e}_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (rU_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial U_r}{\partial \theta}\right)\vec{e}_z$$

Partie I - La désintégration de l'uranium 235

L'élément uranium se présente essentiellement sous la forme de deux isotopes ; le plus répandu à l'état naturel, U^{238}, possède 92 protons et 146 neutrons ; l'autre isotope est U^{235} dit isotope « fissile ». Lorsqu'un noyau U^{235} est heurté par un neutron (noté n), il peut « fissionner », suivant la réaction suivante : ${}^{235}U_{92} + n \rightarrow X + Y$ + plusieurs neutrons + énergie, où X et Y sont deux noyaux le plus souvent radioactifs.

Le nombre moyen de neutrons émis dans la désintégration d'un noyau d'U^{235} est $\nu \approx 2,5$. On voit ainsi la possibilité d'une réaction en chaîne, utilisable de manière contrôlée dans une centrale nucléaire, ou de manière explosive dans une bombe. L'énergie libérée par la désintégration d'un noyau d'U^{235} est en moyenne de $170 \cdot 10^6 eV$ $(1 eV = 1,6 \cdot 10^{-19} J)$. Lorsque la masse du bloc d'uranium devient supérieure à une valeur critique, la réaction en chaîne s'emballe et devient explosive.

I.A - Diffusion de neutrons

I.A.1) Quelle serait l'énergie libérée par la désintégration totale d'un kilogramme d'U^{235} ?

I.A.2) L'énergie libérée par l'explosion d'une tonne de trinitrotoluène, un explosif chimique classique encore dénommé TNT, est de $4,2 \cdot 10^9$ Joule. En déduire l'énergie libérée par la désintégration supposée totale d'un kilogramme d'U^{235}, exprimée en équivalent tonnes de TNT. Commenter le résultat.

I.A.3) Soit $N(x, y, z, t)$ le nombre de neutrons par unité de volume, et $\vec{J}$ le vecteur densité de flux de neutrons, tel que $\vec{J} \cdot \overrightarrow{dS}\, dt$ représente le nombre de neutrons traversant la surface $\overrightarrow{dS}$ pendant l'intervalle de temps dt. On donne l'équation fondamentale de la neutronique :

$$\frac{\partial N}{\partial t} = -\text{div}\,\vec{J} + \left(\frac{\nu - 1}{\tau}\right)N(x, y, z, t).$$

On rappelle de plus la loi de Fick $\vec{J} = -D\overrightarrow{\text{grad}}N$ et la relation $\text{div}(\overrightarrow{\text{grad}}N) = \Delta N$.

a) En vous aidant d'analogies avec d'autres domaines de la Physique, pouvez-vous interpréter les deux termes situés à droite de l'égalité ?

b) Quelle interprétation proposez-vous pour la constante τ ?

c) Expliquer, en particulier, pourquoi $\nu - 1$ intervient dans le terme de droite, et pas ν.

I.B - Masse critique

On cherche à déterminer la masse du bloc d'uranium (ou masse critique) pour laquelle la réaction en chaîne peut s'emballer et devenir explosive.

I.B.1) *Calcul de la masse critique dans le cas d'une boule d'uranium 235 pur, de rayon R*

On suppose que le problème est à géométrie sphérique de telle sorte que l'on puisse écrire :

$$N = N(r, t) = N_1(r)e^{\nu' t/\tau} \text{ et } \vec{J}(r,t) = -D\frac{\partial N}{\partial r}\vec{e}_r.$$

Dans cette situation, on a :

$$\Delta N_1 = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dN_1}{dr}\right).$$

a) On pose

$$g(r) = rN_1(r) \text{ et } \alpha^2 = \left|\frac{\nu' - \nu + 1}{D\tau}\right| ;$$

montrer que la fonction $g(r)$ est solution d'une équation différentielle très classique. On recherche une fonction $r \rightarrow N_1(r)$ telle que $N_1(r = R) = 0$, que N_1 ne s'annule pas pour $r \in]0, R[$ et telle que N_1 tende vers une limite finie quand r tend vers zéro. Montrer que c'est possible si

$$\nu' = (\nu - 1) - \frac{\pi^2 D\tau}{R^2}.$$

b) Interpréter le fait que ν' augmente si R croît.

c) Quelle est la différence fondamentale entre les cas $\nu' > 0$ et $\nu' < 0$?

d) Exprimer le rayon minimal R_c tel qu'il puisse y avoir réaction en chaîne, en fonction de D, τ et ν.

e) On donne pour U_{92}^{235} de masse volumique $\rho = 19 \cdot 10^3 \text{kg m}^{-3}$: $\pi^2 D\tau = 2,2 \cdot 10^{-2} \text{m}^2$ et $\nu = 2,5$. Calculer la valeur du rayon critique R_c, ainsi que la masse critique M_c (masse de la boule d'uranium de rayon R_c).

I.B.2) *Mise en œuvre d'une bombe nucléaire*

Pour des raisons évidentes, on ne peut pas stocker sans précautions une masse d'uranium supérieure à la masse critique. Quelle disposition raisonnable pouvez-vous suggérer pour le conditionnement d'une arme nucléaire, embarquée dans un missile ? Comment pourrait-on déclencher l'explosion ?

Partie II - Principe de la séparation isotopique par diffusion gazeuse

L'uranium naturel est à $99,3\%$ sous forme de l'isotope 238, et à $0,7\%$ sous forme de l'isotope fissile 235. Afin d'enrichir l'uranium en son isotope fissile, on peut utiliser des membranes percées de petits orifices, de sorte que les molécules les plus rapides aient plus de chance de traverser cette membrane.

II.A - Diffusion gazeuse à travers une petite ouverture

II.A.1) L'hexafluorure d'uranium UF_6 est assimilé à un gaz parfait.

a) Relier la vitesse quadratique moyenne $V = \sqrt{\langle V^2 \rangle}$ d'une molécule de masse m d'un gaz parfait à la température de ce gaz.

b) On suppose que la paroi du récipient contenant le gaz UF_6 est percée d'un petit orifice, d'aire S. Cet orifice appartient à une paroi perpendiculaire à l'axe $\vec{e_x}$. La pression à l'extérieur du récipient est supposée nulle. Pour simplifier, on considérer que la projection du vecteur vitesse d'une molécule sur un des trois axes (supposés équivalents) $\vec{e_x}$, $\vec{e_y}$ ou $\vec{e_z}$ ne peut prendre que deux valeurs : $\pm V$.

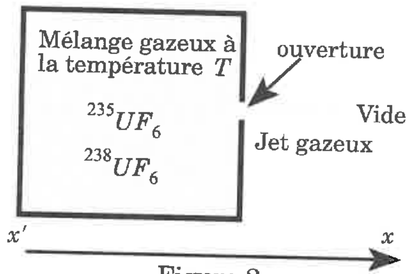

Figure 2

Le récipient contient un mélange des deux gaz $^{235}UF_6$ et $^{238}UF_6$ sous la pression partielle respective P_{235} et P_{238}. Soit δN_{235} le nombre de molécules d'$U^{235}F_6$ qui traversent l'orifice pendant l'intervalle de temps dt, et δN_{238} le nombre de molécules d'$U^{238}F_6$ qui traversent l'orifice pendant le même intervalle de temps. Montrer que

$$\frac{\delta N_{235}}{\delta N_{238}} = \left(\frac{M_{238}}{M_{235}}\right)^{\alpha}\left(\frac{P_{238}}{P_{235}}\right)^{\beta}$$ où M_{235} est la masse molaire du gaz $U^{235}F_6$

et M_{238} est la masse molaire du gaz $U^{238}F_6$. On explicitera les exposants α et β.

c) On donne la masse molaire du fluor : $19 \cdot 10^{-3} \text{kg} \cdot \text{mol}^{-1}$. Le récipient a été rempli avec de l'hexafluorure d'uranium « naturel » ; la proportion d'U^{238} dans ce récipient va augmenter au cours du temps.

Évaluer numériquement le rapport J_{235}/J_{238} des flux de matière sortant du récipient, à l'instant initial de l'ouverture de l'orifice.

d) Pourquoi utiliser de l'hexafluorure d'uranium plutôt que de l'hexachlorure d'uranium ?

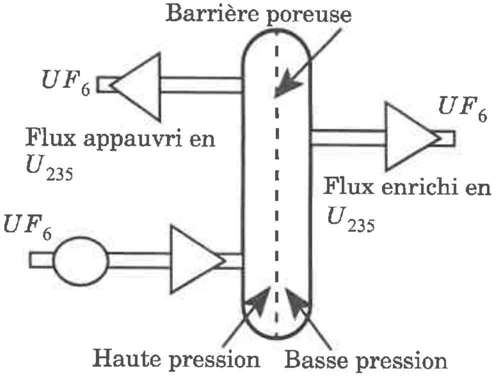

Figure 3

II.B - Mise en cascade de cellules de diffusion gazeuse

Une usine de séparation isotopique par diffusion gazeuse utilise des centaines de cellules élémentaires de diffusion gazeuse ; chaque cellule (figure 3) se compose essentiellement d'une membrane poreuse et d'un système de pompage. On alimente à gauche et on pompe à droite, de sorte que, comme dans la question précédente, on peut considérer que l'espace à droite de la paroi est quasi-vide. La pression à l'entrée est la même pour toutes les cellules. On a le schéma de la figure 3 en régime stationnaire.

On a donc en amont de la cellule un mélange de deux gaz $^{235}UF_6$ et $^{238}UF_6$.

II.B.1) Soit r_{235} le rapport P_{235}/P_{238} à un endroit donné ; à l'entrée de l'usine, on a $r_{235,0} = 0,7\%$. Soit $r_{235,1}$ le rapport P_{235}/P_{238} à la sortie de la première cellule ; justifier que

$$r_{235,1} = r_{235,0}\sqrt{\frac{M_{238}}{M_{235}}}.$$

II.B.2)

a) Une centrale nucléaire typique nécessite un uranium enrichi, tel que $r_{235,nc} = 3\%$. Déterminer n_c, nombre de cellules de diffusion disposées en cascade pour obtenir 3% d'uranium fissile.

b) Une bombe à uranium nécessite de l'uranium hautement enrichi, tel que $r_{235,nb} \approx 90\%$; exprimer n_m, nombre de cellules nécessaires dans une usine d'enrichissement destinée à des fins militaires.

II.B.3) Quels autres principes physiques pourriez-vous proposer pour séparer les deux isotopes de l'uranium ? (on se limitera à 10 lignes au maximum).