PSI* 2026/2027	DEVOIR EN TEMPS LIBRE N° 4 obligatoire pour PSI* ; facultatif pour PSI A rédiger par groupe de 2 ou 3 A rendre au plus tard pour le mardi 17 novembre 2026

« Mesure du vide » : les jauges de pression UHV

Pour limiter les chocs et les impuretés, on doit imposer une pression dans l'enceinte très faible de l'ordre de $10^{-8} Pa$. On se propose d'étudier ici un appareil de mesure des faibles pressions : la jauge de Bayard-Alpert.

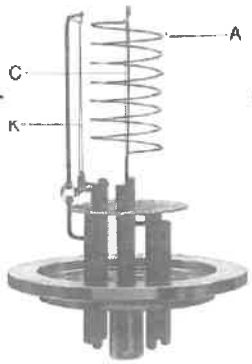


Figure B.4 : Sonde de Bayard-Alpert

Principe de la jauge de Bayard-Alpert :

Une jauge de Bayard-Alpert est dite de type « ionique ». Son principe est basé sur l'accélération d'électron émis par un filament (K) au moyen d'une grille (A) plongée dans le gaz à analyser. Les électrons accélérés, en heurtant les molécules du gaz les ionisent. Les ions ainsi formés sont récoltés par un collecteur (C) situé au centre de la grille. Le nombre d'ions collectés et donc le courant générer dans le collecteur est proportionnel au nombre d'électrons émis et au nombre de particules du gaz, donc indirectement à la pression.

Pour maximiser le nombre de particules heurtés par les électrons, on construit la grille de manière à confiner les électrons dans un mouvement oscillant au sein du gaz : ils sont ainsi certains de finir par heurter une particule du gaz. On se propose ici d'étudier le champ électrique de confinement ainsi créé.

Modèle pour le calcul du champ électrique intérieur à la grille :

La géométrie réelle étant relativement complexe, on utilisera ici le modèle simplifié suivant :

- la grille (A) est un cylindre de longueur infinie et d'épaisseur négligeable et de rayon R_g. Elle est porté au potentiel $V_g = +180\text{V}$ uniforme
- le collecteur (C) est un cylindre infini plein de rayon R_c porté au potentiel $V_c = 0\text{V}$ uniforme.
- Une enceinte métallique extérieure (E), cylindrique de rayon R_2 est maintenue au potentiel $V_{ext} = 0\text{V}$ uniforme.
- L'ensemble (A), (C), et (E), formés des cylindres coaxiaux, possède une symétrie cylindrique.
- un filament rectiligne K est positionné parallèlement à l'axe $\vec{e}_z$ des cylindres, à la distance R_K du centre. On admet que sa présence conserve à l'ensemble {A,C,E,K} la symétrie cylindrique.
- À l'intérieur se trouve un gaz raréfié : le milieu est assimilable au vide.

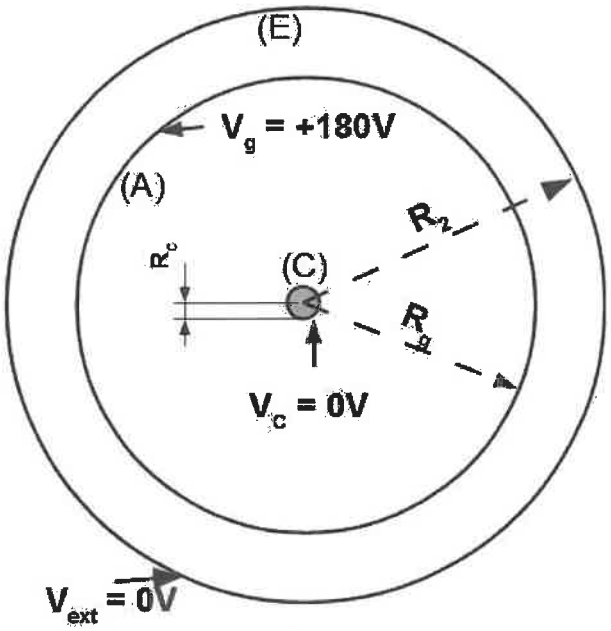


Figure B.5 :

On notera Oz l'axe de symétrie des cylindres (orienté par $\vec{e}_z$)

Q26. On s'intéresse au champ électrique $\vec{E}(M)$ et au potentiel V(M) en un point M repéré par ses coordonnées cylindriques (r, θ, z).

Q26.a. Faire apparaître sur un schéma les vecteurs unitaire $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_z})$ de la base cylindrique.

Q26.b. Expliquer, par des arguments qualitatifs précis, pourquoi on a V(M) = V(r) et $\vec{E} = E(r)\vec{e_r}$.

Q27. On cherche à déterminer les grandeurs électrostatiques entre C et A.

Q27.a. Donner l'équation de Maxwell-Gauss.

Q27.b. En déduire l'équation différentielle que vérifie le potentiel V(r) dans cette zone. (On pourra faire intervenir l'expression du laplacien fourni en fin d'énoncé).

Q27.c. Exprimer V(r) en fonction de r, R_g, R_c et V_g.

Q28. Déduire de la question précédente l'expression du champ $\vec{E}(M)$ entre A et C.

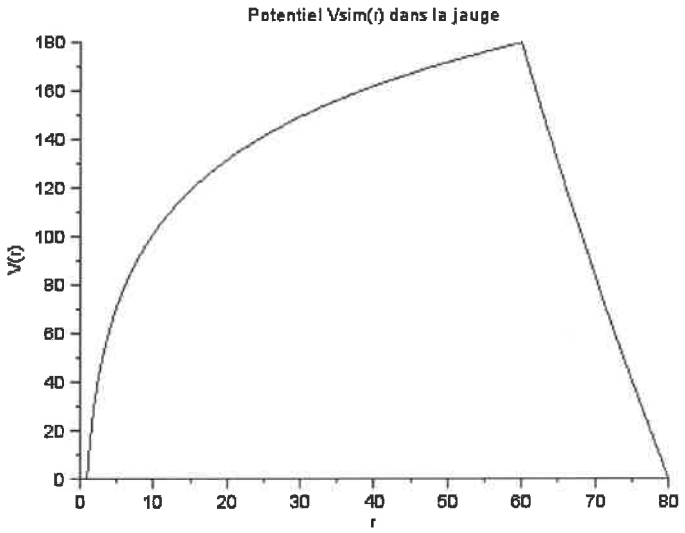


Figure B.6 : Potentiel $V_{sim}(r)$. (r est en mm)

Q29. L'allure du champ électrique en tout point intérieur de la jauge est donné sur la Figure B.6. représentant $V_{sim}(M) = V_{sim}(r)$ en fonction de r.

Q29.a. A partir de ce graphique, donner une estimation de R_c et R_g.

Q29.b. Donner l'équation littérale du potentiel V(r) entre G et E.

Q29.c. En déduire l'expression littérale du champ électrique $\vec{E}$ entre G et E.

Q29.d. Reproduire la Figure B.5 et représenter les lignes de champ électrique en précisant leur orientation.

On s'intéresse à présent, au comportement des électrons émis par K. Ils sont libérés avec une vitesse très faible, K étant au potentiel $V_K = 80\text{V}$.

Q30. Estimer numériquement la position R_K du filament (situé entre G et E).

Q31. On fait l'hypothèse d'une émission d'électrons à vitesse initiale nulle ($v_K = 0$). On suppose de plus que l'électron n'est soumis qu'à l'action du champ électrique étudié précédemment.

Q31.a. Montrer que la trajectoire de l'électron est rectiligne.

Q31.b. Donner l'expression de l'énergie potentielle $E_p(r)$ d'un électron dans le champ électrique $\vec{E}$.

Q31.c. Montrer que l'énergie mécanique de l'électron émis se conserve.

Q31.d. Représenter graphiquement $E_p(r)$ puis reporter sur un même graphique E_m

Q31.e. En déduire que l'électron est piégé dans une portion d'espace comprise entre deux cylindres de rayons r_{min} et r_{max}. Estimer les valeurs de r_{min} et r_{max}.

Tournez la page S.V.P.

Q32. En réalité, l'électron est émis avec une vitesse faible mais non nulle. On s'intéresse aux électrons émis avec une vitesse perpendiculaire à Oz.

Q32.a. Tant qu'ils ne subissent pas de choc (sur un atome ou sur la grille), les électrons ne sont soumis qu'à l'action du champ électrique. Montrer que le moment cinétique de l'électron sur l'axe Oz, noté L_z, est conservé. On pourra utilisé la grandeur L_z pour la suite.

Q32.b. Montrer que l'énergie mécanique peut s'écrire sous la forme : $E_m = \frac{1}{2} m_e \dot{r}^2 + E_{peff}(r)$ où $E_{peff}(r)$ est une fonction ne dépendant que de la position radiale r de l'électron qu'on exprimera en fonction de r, L_z, m_e et $V_{\text{sim}}(r)$

Q32.c. Au moyen d'un traitement énergétique approprié, montrer soigneusement que l'électron va rester confiné autour de l'anode tant qu'il ne subit pas de choc. On ne demande pas de déterminer l'équation de la trajectoire de l'électron.

Q33. Projeter le principe fondamental de la dynamique appliqué à un électron sur l'axe Oz. Quel est le mouvement de l'électron suivant Oz ? *Pour palier à ce problème, on peut rajouter une grille aux extrémités du cylindre.*