

**Devoirs surveillé n° 2**  
**8h00 – 12h00 4 heures**

**Calculatrice NON autorisée**

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

Toutes les interprétations seront comptabilisées

Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

**RAPPEL DES CONSIGNES**

- Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.
- Ne pas utiliser de correcteur.
- Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.

**Le devoir se compose de 3 problèmes indépendants.**

**Les différentes parties de chaque problème sont indépendantes entre elles.**

**1<sup>er</sup> problème : Chimie**

**A- Etude thermodynamique de l'obtention de tétrafluorouranium**

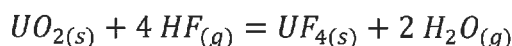
**Grandeurs thermodynamiques considérées comme indépendantes de la température :**

	$UO_{2(s)}$	$UF_{4(s)}$	$HF_{(g)}$	$H_2O_{(g)}$
$\Delta_f H^\circ$ (kJ.mol <sup>-1</sup> )	- 1085	- 1921	- 273	- 242
$S^\circ$ (J.K <sup>-1</sup> .mol <sup>-1</sup> )	77	152	174	189

**Valeurs approchées :**

$$\sqrt{2} = 1,4 ; \sqrt{3} = 1,7 ; \sqrt{5} = 2,2$$

Une des étapes de transformation de l'uranium est l'obtention d'un composé fluoré à partir d'uranite. Cette réaction peut se traduire par le bilan suivant :



A l'état initial, on place dans le réacteur initialement vide à 500 °C,  $HF_{(g)}$  et  $UO_{2(s)}$  (celui-ci étant introduit en excès par rapport à  $HF_{(g)}$ ).

- 1) Calculer la valeur de l'enthalpie standard de réaction à 298 K.
- 2) Calculer et commenter le signe de l'entropie standard de la réaction à 298 K.
- 3) La constante d'équilibre vaut environ  $5.10^2$  à 500 °C. Expliciter la démarche réalisée pour obtenir ce résultat à partir des valeurs calculées lors des questions précédentes.

- 4) Discuter du choix de la température utilisée dans le processus industriel en considérant les aspects thermodynamique et cinétique de la réaction.

On appelle  $\alpha$  le rapport entre la quantité de matière de  $HF$  qui a réagi et la quantité de matière initiale de  $HF$  notée  $n_0$ .

- 5) Ecrire le tableau d'avancement associé à la réaction et exprimer  $\alpha$  en fonction de l'avancement  $\xi$  et  $n_0$ .
- 6) Montrer la relation suivante entre la constante d'équilibre  $K^\circ$ , la valeur de  $\alpha$  à l'équilibre  $\alpha_{eq}$  et la pression totale  $P_T$  dans l'enceinte :

$$K^\circ = \frac{(\alpha_{eq} (2 - \alpha_{eq}))^2}{16 (1 - \alpha_{eq})^4} \left(\frac{P^\circ}{P_T}\right)^2$$

- 7) Déterminer la pression totale du réacteur  $P_T$  pour que la valeur de  $\alpha_{eq}$  soit égale à 0,9 lorsque l'équilibre est atteint à 500 °C.
- 8) Prévoir l'évolution de  $\alpha$  lorsque la pression totale dans le réacteur est augmentée, la température restant constante.

## B - Enthalpie de dissolution du chlorure de sodium dans l'eau

### Expérience 1

On place dans un calorimètre une masse  $m_1 = 300$  g d'eau ainsi qu'un thermomètre et un barreau aimanté. L'ensemble est à température ambiante  $T_1 = 20^\circ\text{C}$ . On ajoute rapidement une quantité  $m_2 = 200$  g d'eau à  $T_2 = 60^\circ\text{C}$ . À l'équilibre, on relève une température  $T_3 = 35^\circ\text{C}$ .

### Expérience 2

On introduit dans le même calorimètre, toujours équipé d'un thermomètre et d'un barreau aimanté, une masse  $m_3 = 500$  g d'eau. Le tout est à température ambiante  $T_1 = 20^\circ\text{C}$ .

Puis on introduit rapidement une masse  $m_4 = 50$  g de chlorure de sodium initialement à la température ambiante  $T_1 = 20^\circ\text{C}$ .

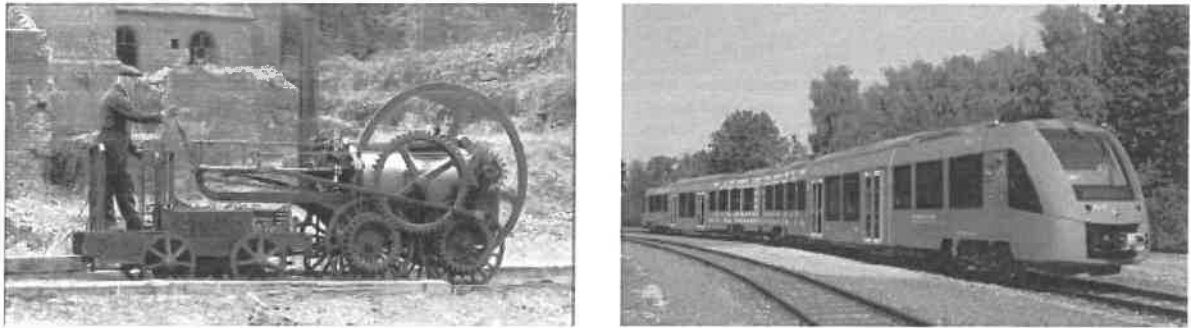
On mesure alors une baisse brutale de température  $\Delta T = -1,5^\circ\text{C}$ .

On note  $c_e$  la capacité calorifique massique de l'eau à pression constante, supposée indépendante de la température. De plus, la capacité calorifique d'une solution sera assimilée à celle de l'eau pure qu'elle contient.

- 9) Exprimer la capacité thermique  $C$  du calorimètre équipé de ses accessoires (thermomètre + barreau aimanté) en fonction de  $c_e, m_1, m_2, T_1, T_2$  et de  $T_3$ .
- 10) Exprimer l'enthalpie massique de dissolution de NaCl dans l'eau, notée  $\Delta_{\text{diss}} h$ , en fonction de  $c_e, C, m_3, m_4$  et de  $\Delta T$ .
- 11) Quel est l'effet d'une augmentation de température, à pression constante, sur la solubilité du chlorure de sodium dans l'eau pure ? Justifier.

## PROBLÈME 2 : Quelques aspects du transport ferroviaire

La première locomotive à vapeur date de 1804, elle a été conçue par un ingénieur des mines anglais Richard Trevithick, comme une application de la machine à vapeur. Depuis, le transport ferroviaire a connu une évolution rapide ; il apparaît aujourd'hui comme une solution écologique au désir et au besoin de mobilité d'une population mondiale qui ne cesse de croître.



**Figure 1** Gauche : La locomotive de Trevithick. Droite : train fonctionnant avec une pile à hydrogène

### I. La motorisation des trains

Le Coradia iLint est le premier train à hydrogène au monde, propulsé par une pile à combustible. Il est basé sur le Coradia Lint 54, un modèle de locomotive diesel produit par Alstom. Ce type de machines thermiques, dédié aux voies non électrifiées, est très largement répandu sur les lignes régionales en Allemagne mais aussi en France.

L'objectif de cette partie est d'étudier un moteur diesel utilisée à bord du Coradia iLint.

Le moteur des locomotives diesel fut inventé en 1892 par l'ingénieur allemand Rudolf Diesel. Les premières locomotives « Diesel-mécanique » où la puissance est transmise par l'intermédiaire d'une boîte de vitesse à pignons furent rapidement remplacées par des locomotives « Diesel-électrique » où le moteur diesel, en tournant, entraîne un alternateur. Ce dernier fournit de l'énergie à plusieurs moteurs électriques de traction.

On modélise le fonctionnement d'un moteur Diesel en considérant un système fermé, constitué de  $n$  moles de gaz parfait diatomique, décrivant le cycle réversible dont les caractéristiques sont décrites ci-dessous.

— *Admission  $A_0A$*  : la soupape d'arrivée de l'air est ouverte, celles d'arrivée de gasoil et celle d'échappement des gaz sont fermées. La pression est  $P_{atm} = 1,00 \times 10^5$  Pa et la température  $T_{atm} = 300$  K. Le volume passe de  $V_{min}$  à  $V_{max}$  de façon isobare.

— *Compression  $AB$*  : les soupapes sont fermées. Le volume de l'air admis passe de  $V_{max}$  à  $V_{min}$  de manière adiabatique et réversible.

— *Injection et combustion  $BC$*  : les soupapes sont fermées, sauf celle d'injection du gasoil. Une petite quantité de gasoil est injectée et la combustion se produit. Le volume augmente jusqu'à  $V_C$ . On modélise cette phase par une évolution isobare.

— *Détente  $CD$*  : les soupapes sont toutes fermées. L'injection cesse en  $C$  et le mélange subit une détente adiabatique et réversible jusqu'à atteindre un volume  $V_{max}$ .

— *Refroidissement  $DA$*  : la soupape d'échappement est ouverte. La pression diminue brutalement jusqu'à  $P_{atm}$ , le volume restant constant.

— *Ejection  $AA_0$*  : la soupape d'échappement est ouverte, les autres fermées. Le volume passe de  $V_{max}$  à  $V_{min}$  de façon isobare.

**Q 12.** Représenter le cycle Diesel  $A_0 - A - B - C - D - A - A_0$  dans le diagramme de Watt ( $P, V$ ).

**Q 13.** On définit le rapport volumétrique de compression  $x = V_{\max}/V_{\min}$ , ainsi que le rapport volumétrique de détente  $y = V_{\max}/V_C$ . Exprimer les pressions  $P_B$  et  $P_D$  en fonction de  $P_{\text{atm}}$ ,  $x$ ,  $y$  et du rapport  $\gamma = C_{pm}/C_{vm}$ , des capacités thermiques molaires à pression et à volume constant du gaz considéré.

Le rendement thermodynamique, noté  $\eta_D$ , pour ce moteur est défini par le rapport du travail cédé par l'air au cours du cycle au transfert thermique reçu au cours de la transformation BC.

**Q 14.** Exprimer le travail cédé par l'air au cours du cycle en fonction des transferts thermiques.

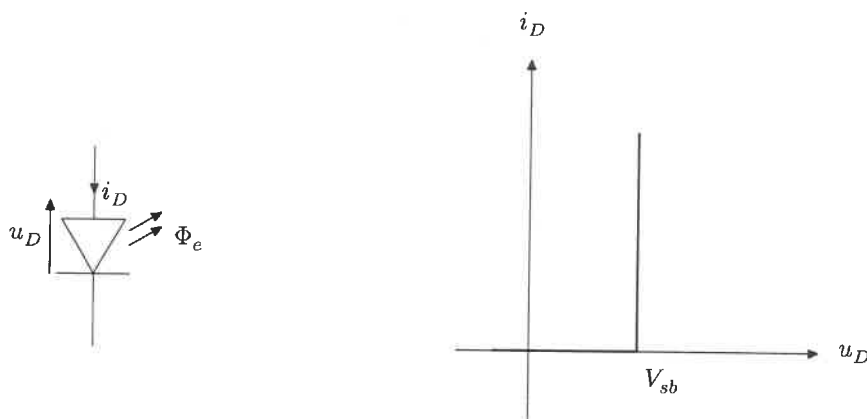
**Q 15.** Exprimer  $\eta_D$  en fonction des températures  $T_A, T_B, T_C, T_D$  et du rapport  $\gamma$  puis en fonction de  $x, y$ , et  $\gamma$ .

## II Connexion à Internet par LiFi

Parmi les nombreux avantages du transport ferroviaire, on peut citer la possibilité d'utiliser le temps du transport comme un temps de travail ou de loisir grâce, notamment, à une connexion Internet individualisée. Dans cette partie est étudiée la technologie LiFi (Light Fidelity), ainsi nommée par analogie avec le WiFi (Wireless Fidelity), une solution innovante pour les connexions Internet individualisées dans des espaces restreints tels que la cabine d'un avion ou un wagon de train. Le LiFi exploite la lumière visible pour transmettre l'information. Son apparition coïncide avec le développement de l'éclairage par les diodes électroluminescentes.

### Document

Comme pour les diodes « simples », les diodes électroluminescentes mettent en jeu une jonction entre deux matériaux semi-conducteurs (jonction PN). Les photons sont émis lorsque le courant direct qui traverse la jonction provoque la recombinaison d'une paire électron-trou. La caractéristique d'une diode électroluminescente varie selon la couleur émise. Dans le cas d'une diode émettrice de lumière bleue, la caractéristique courant-tension a l'allure suivante :



Pour  $i_D > 0$ , la diode considérée émet une lumière bleue de longueur d'onde dans le vide  $\lambda_b = 470 \text{ nm}$  ; la tension à ses bornes est alors égale à  $V_{sb} = 2,90 \text{ V}$ . Le rendement en puissance de la diode électroluminescente, défini comme le rapport de la puissance lumineuse  $\Phi_e$  émise sur la puissance électrique reçue, est égal à  $\eta_{\text{led}} = 33 \%$ . En première approximation, on peut considérer que la puissance lumineuse  $\Phi_e$  est rayonnée de façon isotrope dans le demi-espace qui se situe au-dessus du composant.

Dans ce problème, nous ne considérerons que le flux de données descendant vers l'utilisateur. Le schéma de la figure 8 représente le principe de la transmission d'une information par la lumière. La tension  $u_e$  contient le signal informatif. Elle alimente la diode électroluminescente  $D_1$  émettrice de lumière bleue, de sorte que l'amplitude de l'onde lumineuse émise soit modulée par le signal  $u_e$ . La diode  $D_2$ , polarisée en sens indirect grâce au potentiel  $V_0$  qui est positif, est photoréceptrice. L'intensité  $i_2$  du courant qui parcourt  $D_2$  est proportionnelle au flux lumineux qu'elle reçoit, de sorte que la tension  $u_r$  contient l'information utile.

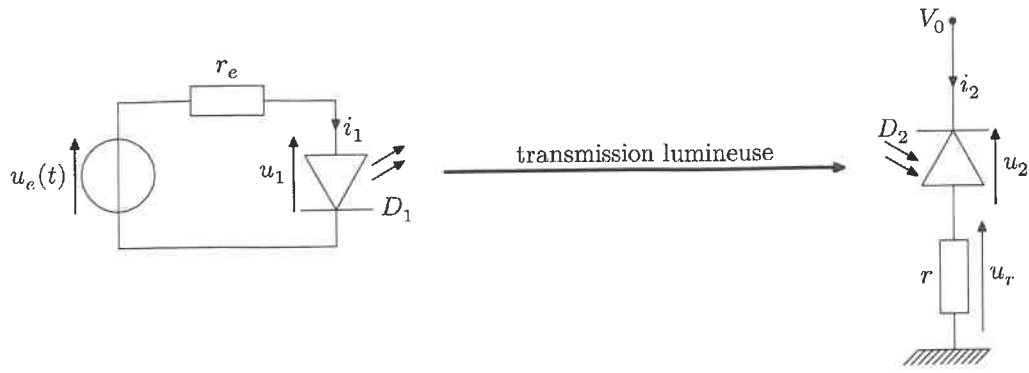


Figure 8 Principe de la transmission d'information par la lumière.

### II.A – Émission du signal lumineux

Dans le circuit émetteur, la résistance  $r_e = 10 \, \Omega$  a pour fonction de commander le passage du courant dans la diode par la tension  $u_e$ , en même temps qu'elle la protège. La diode émet de la lumière lorsque l'intensité du courant  $i_1$  qui la traverse en sens direct est positif ; on notera la puissance lumineuse moyenne émise  $\Phi_e$ . Dans le modèle adopté, la puissance moyenne émise est proportionnelle au courant  $i_1$  avec un coefficient de proportionnalité  $K_e$ , soit  $\Phi_e = K_e i_1$ .

**Q 16.** Déterminer la valeur constante minimale  $U_{\min}$  de  $u_e$  qui permet d'obtenir une émission lumineuse par la diode.

**Q 17.** Calculer la valeur constante  $U_0$  de  $u_e$  qui permet d'obtenir un courant  $i_1$  constant égal à  $i_0 = 0,73 \, \text{A}$  à travers la diode. Calculer la puissance lumineuse moyenne correspondante, notée  $\Phi_{e0}$ , émise par la diode.

Pour transmettre une information par la lumière, la technologie LiFi utilise le principe de la modulation d'amplitude. Le signal porteur correspond au signal lumineux de longueur d'onde  $\lambda_b$  émis par la diode, dont on module l'amplitude à l'aide d'un signal sous-porteur  $p(t)$ . Par la suite, on considère que le signal sous-porteur est sinusoïdal, d'amplitude  $p_m$ , de fréquence  $f_p = \omega_p/2\pi$  et de phase à l'origine  $\alpha_p$  :  $p(t) = p_m \cos(\omega_p t + \alpha_p)$ .

On note  $a(t)$  la tension correspondant au signal contenant l'information ; les fréquences contenues dans le spectre de  $a(t)$ , notées  $f_a$  sont très inférieures à la fréquence  $f_p$ . On génère la tension  $u_e(t)$  du circuit émetteur grâce au circuit de la figure 9, qui contient un bloc multiplieur  $M_1$  et un bloc additionneur  $A_1$ . Le bloc multiplieur  $M_1$  réalise le produit des deux tensions d'entrée, soit dans le cas du circuit considéré  $m_1(t) = k_m \times p(t) \times a(t)$ , avec  $k > 0$ . Les impédances d'entrée des blocs  $A_1$  et  $M_1$  sont infinies.

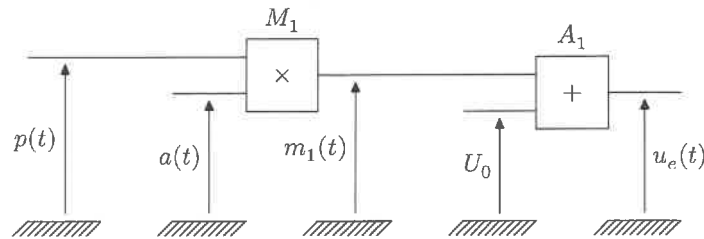


Figure 9 Schéma du circuit de réalisation de  $u_e(t)$

**Q 18.** Exprimer la tension  $u_e(t)$  dans le cas où  $a(t)$  est un signal sinusoïdal d'amplitude  $a_m$ , de fréquence  $f_a = \omega_a/2\pi$  telle que  $f_a \ll f_p$ . Quelle est la valeur maximale du produit  $k \times p_m \times a_m$  qui permet de s'assurer que la diode électroluminescente émet toujours de la lumière ?

**Q 19.** Représenter l'allure du signal  $u_e(t)$ , ainsi que l'allure de son spectre, dans le cas où le signal  $a(t)$  est sinusoïdal de fréquence  $f_a = f_p/10$ .

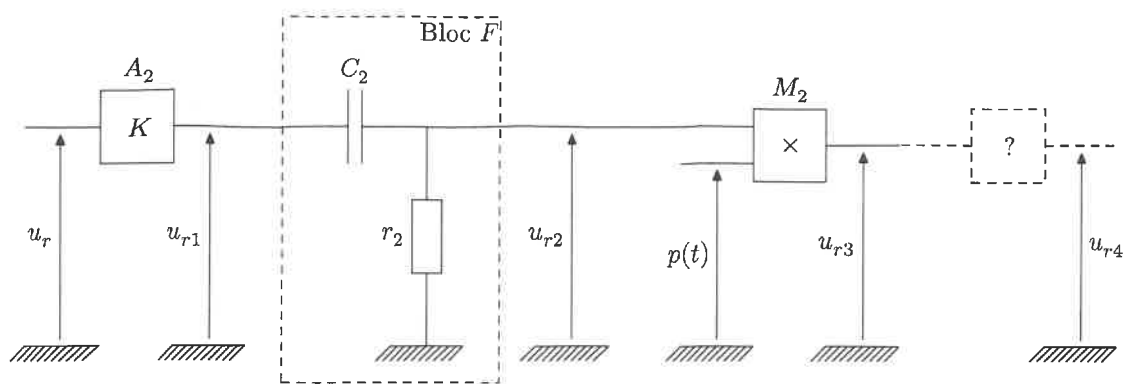
**Q 20.** Représenter l'allure du signal  $u_e(t)$ , ainsi que l'allure de son spectre, dans le cas où le signal  $a(t)$  est un signal créneau variant entre 0 et  $a_m$ , de fréquence  $f_a = f_p/10$ . L'allure d'un spectre d'un tel signal créneau est donné en annexe.

### II.B – Réception du signal lumineux et extraction de l'information

La photodiode réceptrice est située à la distance  $d$  de la diode émettrice et capte le flux lumineux  $\Phi_r$  qui arrive sur sa surface, d'aire  $s_r$ . Lorsqu'elle est polarisée en inverse comme sur le schéma de la figure 8, le courant  $i_2$  qui la traverse en sens indirect est proportionnel au flux  $\Phi_r$  et on note  $i_2 = K_r \Phi_r$ , où  $K_r$  est une constante positive.

**Q 21.** Exprimer la tension  $u_r(t)$  en fonction de  $u_e(t)$ ,  $V_{sb}$ ,  $d$ ,  $r$ ,  $r_e$ ,  $s_r$ ,  $K_e$  et  $K_r$ .

Pour extraire le signal informatif du signal  $u_r$ , on réalise le montage de la figure 10 dans lequel  $A_2$  est un amplificateur de tension, tel que  $u_{r1} = K u_r$ , et  $M_2$  est un multiplieur identique à  $M_1$ . Dans le montage figure également le bloc  $F$  constitué d'une résistance  $r_2$  et d'un condensateur de capacité  $C_2$ .



**Figure 10** Schéma du circuit d'extraction de l'information à partir de la tension  $u_r(t)$ .

**Q 22.** Quelle est la fonction du bloc  $F$ ? Exprimer sa fonction de transfert et préciser sa pulsation de coupure  $\omega_c$  en fonction de  $r_2$  et  $C_2$ .

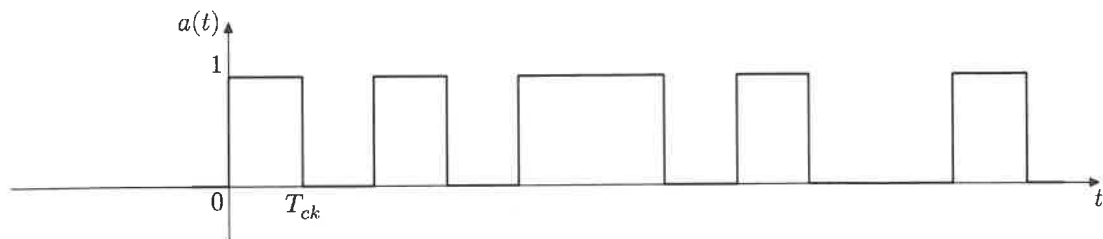
On considère un signal informatif de la forme  $a(t) = a_m \cos(\omega_a t)$ , tel que  $\omega_c \ll \omega_a \ll \omega_p$ .

**Q 23.** Montrer que la tension  $u_{r3}$  peut s'écrire sous la forme  $u_{r3} = U_{3m} \cos^2(\omega_p t + \alpha_p) \cos(\omega_a t)$ ; exprimer l'amplitude  $U_{3m}$  en fonction des données du problème, puis représenter le spectre du signal  $u_{r3}$ .

**Q 24.** On souhaite que la tension  $u_{r4}$  soit proportionnelle au signal informatif. Proposer un montage pour le bloc inconnu, noté « ? » sur la figure 10.

### II.C – Débit binaire du LiFi

En pratique, le signal informatif est un signal binaire, dont l'allure qualitative est présentée figure 11 où  $T_{ck}$  est la période d'horloge. Pour que la modulation décrite dans la sous-partie III.A soit correcte, il faut s'assurer que la fréquence d'horloge  $f_{ck}$  vérifie la condition  $f_{ck} < f_p/100$ .



**Figure 11** Allure d'un signal informatif pour une transmission binaire

**Q 25.** Les liaisons WiFi actuelles procurent un débit descendant de l'ordre de  $10 \text{ Mbit} \cdot \text{s}^{-1}$ , obtenu avec des porteuses dont la fréquence est de l'ordre de quelques GHz. Vérifier que la condition d'une bonne modulation est satisfaite.

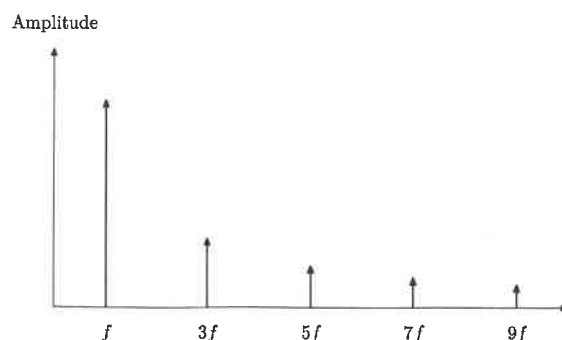
On considère désormais le cas d'une installation LiFi utilisant des diodes électroluminescentes émettant une lumière bleue de longueur d'onde  $\lambda_b = 470 \text{ nm}$  dans le vide.

**Q 26.** Calculer la fréquence de la porteuse lumineuse. En déduire l'ordre de grandeur de la fréquence de la sous-porteuse qui peut être utilisée pour la technologie LiFi, puis estimer l'ordre de grandeur du débit binaire maximal que l'on peut obtenir avec le LiFi. Commenter.

### Données pour la partie II

Vitesse de propagation de la lumière dans le vide  $c = 3,00 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

Spectre en amplitude d'un signal créneau de fréquence  $f$  (premières harmoniques)



### PROBLÈME 3 : Thermodynamique du froid

Les applications numériques seront réalisées avec seulement deux chiffres significatifs. Les données numériques nécessaires et un formulaire, relatif en particulier aux coordonnées sphériques, figurent en fin d'énoncé.

#### I Refroidissement des supraconducteurs

Parmi les applications importantes des basses températures, on compte la supraconductivité : certains métaux ou oxydes métalliques acquièrent, en dessous d'une certaine température critique ( $T < T_{sc}$ ) un caractère supraconducteur, le matériau pouvant conduire un courant électrique permanent sans aucune dissipation d'énergie. Cette propriété est par exemple mise à profit pour la production de champs magnétiques intenses.

Dans tout ce qui suit, le matériau supraconducteur est assimilé à un conducteur thermique de conductivité thermique  $\lambda$  de la loi de Fourier, de masse volumique  $\rho$  et de capacité thermique massique  $c$ . On rappelle que, dans ce cas, l'évolution de la température à l'intérieur du matériau conducteur est donnée par l'équation de diffusion thermique :

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \Delta T \quad \text{où } \Delta \text{ est l'opérateur laplacien.}$$

Les échanges thermiques entre ce matériau et le fluide qui l'entoure seront, dans tous les cas, décrits par la loi de Newton : le transfert thermique pariétal (à la surface ou sur les bords) du solide de température  $T$  vers le fluide de température  $T_f$ , par unité de temps et par unité d'aire, est  $j_{par} = k (T - T_f)$  où  $k$  est une constante.

Les études menées en I.A et I.B sont totalement indépendantes.

#### I.A Refroidissement progressif d'un supraconducteur

Le matériau (supraconducteur) étudié dans cette partie I.A à la forme d'une boule de rayon  $R$ , de température uniforme  $T(t)$ . Il est entièrement plongé dans un liquide réfrigérant qui maintient, à grande distance du matériau, la température uniforme et constante  $T_0 < T_{sc}$  (cf. figure 1).

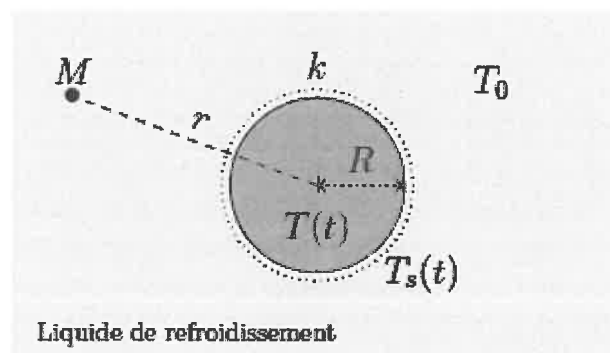


FIGURE 1 – Boule de supraconducteur en cours de refroidissement

**Q 27.** Donner, en les justifiant, les unités (ou les dimensions) de  $k$  et  $\lambda$ .

Établir, dans le cas unidimensionnel, l'équation de diffusion thermique rappelée ci-dessus.

**Q28.** Rappeler l'expression de la diffusivité thermique  $D_{th}$  d'un matériau.

À quelle condition, portant sur la durée  $\Delta t$  du refroidissement, l'hypothèse consistant à considérer la température du matériau comme uniforme est-elle légitime ? On se placera dans ce cas dans la suite.

**Q 28.** Exprimer en fonction des données la capacité thermique  $C_{th}$  de la boule solide, ainsi que la résistance thermique d'isolement  $R_{th}$  associée aux échanges pariétaux convecto-conductifs à sa surface.

Pour l'étude du refroidissement, il faut aussi tenir compte des transferts thermiques au sein du liquide réfrigérant. On admet que la température  $T_f$  en un point M du liquide supposé immobile ne dépend que de la distance  $r$  au centre O de la boule (figure 1). On néglige la capacité thermique massique du liquide réfrigérant ; sa conductivité thermique est notée  $\lambda'$ .

**Q 29.** A partir de l'équation de la diffusion thermique appliquée au fluide réfrigérant montrer que

$$T_f(r,t) = T_o + [T_s(t) - T_o] R/r$$

où  $T_s(t)$  est la température à la surface de la boule de rayon  $R$ .

Indication : on ne développera pas l'expression de  $\Delta T$  en sphérique, et on intégrera progressivement.

**Q 30.** Pourquoi est-il licite de décrire les transferts à travers le fluide en termes de résistance thermique ?

Exprimer la résistance thermique  $R'_{th}$  associée au refroidissement conductif, en fonction de  $\lambda'$  et  $R$ .

On suppose pour finir que  $\lambda' \gg Rk$ .

**Q 31.** Déterminer l'équation d'évolution de la température  $T(t)$  de la boule solide ; on posera  $\tau = \frac{\rho R c}{3k}$ .

**Q 32.** On notera  $T_i = T(t = 0)$  la température initiale du matériau. Tracer l'allure de la courbe  $T(t)$  et exprimer la durée  $\Delta t$  au bout de laquelle le matériau débute la transition conducteur  $\rightarrow$  supraconducteur.

## I.B Refroidissement stationnaire d'un fil supraconducteur

L'absence de résistivité dans les matériaux supraconducteurs n'empêche pas, notamment dans le cadre de régimes transitoires électromagnétiques, l'existence de dissipations de puissance dues au champ électrique induit. Il s'ensuit un chauffage local du matériau supraconducteur.

Le passage éventuel de celui-ci au-dessus de la température critique  $T_{sc}$  a alors un effet catastrophique : l'effet Joule apparaît, la température augmente de plus en plus et la surchauffe du bobinage peut détruire celui-ci : c'est le phénomène de quench (voir figure 2).

On va dans ce qui suit s'intéresser aux conditions de refroidissement propres à éviter le phénomène de quench.

Le matériau supraconducteur étudié a la forme d'un fil cylindrique de rayon  $R$ , de très grande longueur (figure 3). Il est entièrement plongé dans un liquide réfrigérant qui maintient une température uniforme  $T_0 < T_{sc}$ , avec lequel les échanges thermiques se font selon la loi de Newton.



La totalité du fil cylindrique est le siège d'une production de puissance électromagnétique avec la densité volumique supposée uniforme et constante  $p_u$ .

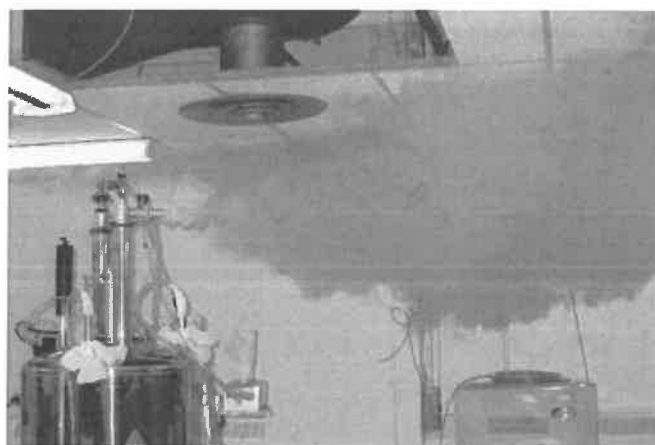


FIGURE 2 – Fuite d'hélium suite à la destruction (*quench*) d'un aimant supraconducteur utilisé pour la RMN. Département de Chimie de l'université de l'Alberta

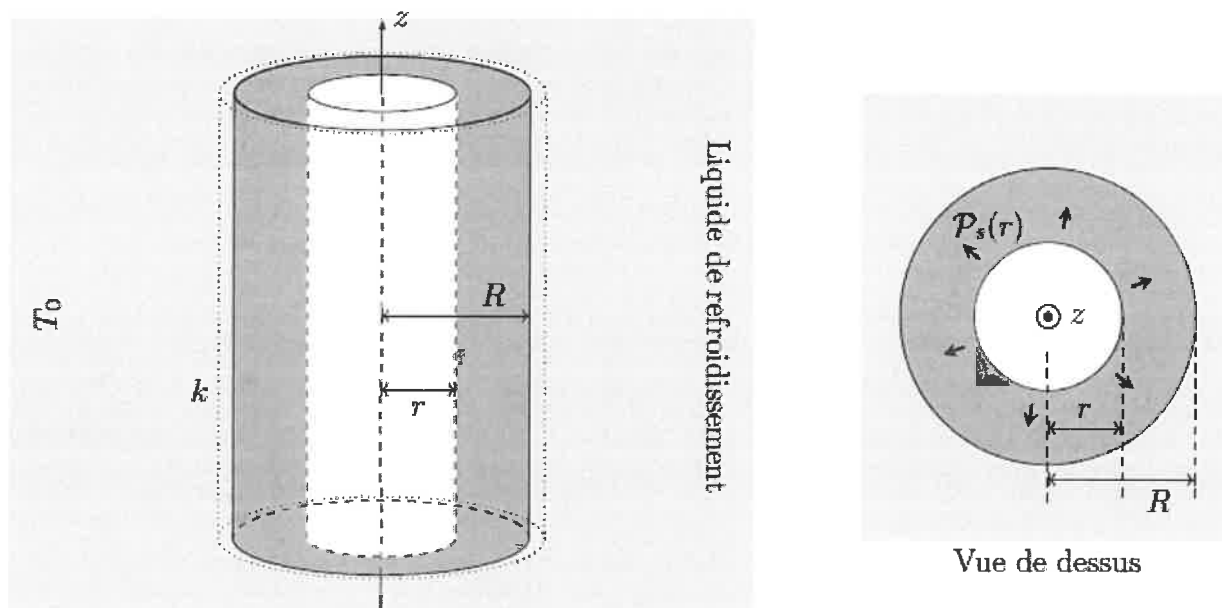


FIGURE 3 – Fil supraconducteur en régime stationnaire

**Q33.** Exprimer la puissance totale  $P_s(r)$  évacuée par une hauteur  $H$  de la partie du fil située au plus à la distance  $r$  de l'axe avec  $0 \leq r < R$ , cf. figure 3.

**Q 34.** En déduire, en régime permanent, l'intensité  $j_{th}(r)$  de la densité volumique de flux thermique conductif dans le fil.

**Q 35.** Déterminer l'expression de la température de surface  $T_s$  en fonction de  $T_0$ ,  $k$ ,  $p_u$  et  $R$ .

**Q 36.** À quel endroit dans le fil la température est-elle maximale ?

Déterminer l'expression de la valeur  $T_{max}$  correspondante.

Montrer que le phénomène de quench ne se produit pas si  $p_u$  est inférieur à une valeur critique  $p_{max}$  que l'on exprimera.

## II Refroidissement par détente adiabatique

Les premières études des propriétés des systèmes physiques à très basses températures, et en particulier la découverte de la supraconductivité, ont été faites en utilisant des réfrigérateurs à détente de gaz, à la suite des travaux des néerlandais van der Waals et Kamerlingh Onnes.



FIGURE 4 – KAMERLINGH ONNES (à gauche) et VAN DER WAALS (à droite) photographiés devant la machine à liquéfier l'hélium, laboratoire de l'Université de Leiden, 1908

On étudie les évolutions d'un fluide F caractérisé par l'énergie interne molaire (admise) :

$$U = \frac{RT}{\gamma - 1} - \frac{A}{V}$$

et par l'équation d'état molaire (également admise) :

$$\left(P + \frac{A}{V^2}\right)(V - B) = RT$$

où A et B sont des constantes strictement positives (leurs valeurs numériques pour N<sub>2</sub> et H<sub>2</sub> figurent en fin d'énoncé) et  $\gamma > 1$ . Enfin, le modèle constitue une correction par rapport au modèle du gaz parfait ; en particulier, on se limitera partout aux corrections du premier ordre en fonction des constantes A et B.

**Q 37.** Montrer que l'enthalpie molaire  $H(T, P)$  du fluide s'écrit  $H = C_P T - KP\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_r}\right)$

Où  $RT_r = \frac{2A}{B}$  et  $C_P > 0$  et  $K > 0$  sont des constantes que l'on exprimera en fonction des données.

**Q 38.** Comment nomme-t-on la détente adiabatique et isenthalpique d'un fluide ?

Exprimer l'identité thermodynamique donnant dH.

La transformation ainsi décrite est-elle réversible ?

À quelle condition une détente de ce type permet-elle un refroidissement ?

Faire l'application numérique pour N<sub>2</sub> et H<sub>2</sub> et conclure.

## Données numériques

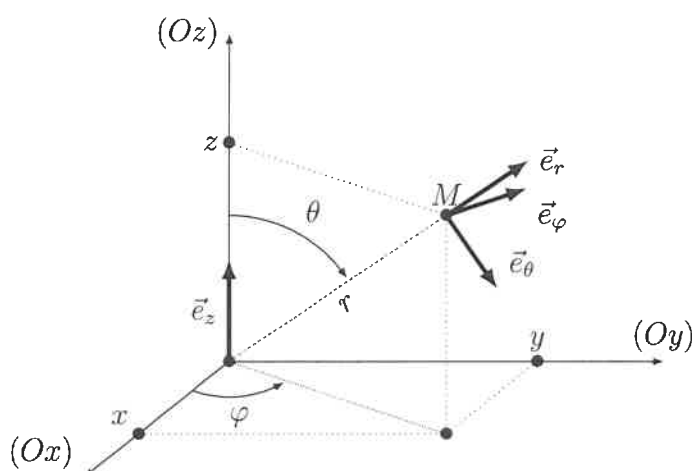
Grandeur	Notation	Valeur numérique
Constante d'Avogadro	$\mathcal{N}_A$	$6,0 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Constante de Boltzmann	$k_B$	$1,4 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$
Constante molaire des gaz parfaits	$R$	$8,3 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$

## Coefficients de l'équation de van der Waals

Pour le diazote $\text{N}_2$	Pour le dihydrogène $\text{H}_2$
$A = 1,4 \cdot 10^{-1} \text{ SI}$ $B = 3,9 \cdot 10^{-5} \text{ SI}$	$A = 2,5 \cdot 10^{-2} \text{ SI}$ $B = 2,7 \cdot 10^{-5} \text{ SI}$

## Repérage sphérique d'un point $M$

Le point  $M$  de coordonnées cartésiennes  $(x, y, z)$  peut aussi être repéré par ses coordonnées sphériques  $r$ ,  $\theta$  et  $\varphi$  rappelées sur le schéma ci-après :



## Formulaire en coordonnées sphériques

Gradient :

$$\vec{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{u}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \hat{u}_\varphi$$

Laplacien scalaire :

$$\Delta f = \frac{1}{r^2} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} \right]$$