

**Devoirs surveillé n° 3**  
**8h00 – 11h00 3 heures**

**Calculatrice NON autorisée**

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

Toutes les interprétations seront comptabilisées

Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

**RAPPEL DES CONSIGNES**

- Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.
- Ne pas utiliser de correcteur.
- Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.

**Le devoir se compose de 3 problèmes dont les parties sont indépendantes entre elles.**

**1<sup>er</sup> problème : Quelques aspects relatifs au système vasculaire**

Masse volumique du sang  $\rho_s = 1,1 \cdot 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$

Viscosité du sang :  $\eta = 4,0 \text{ mPa.s}$

**1. Modélisation du cœur**

On utilise une description simplifiée dans laquelle le cœur est modélisé par une pompe (figure3). On cherche à évaluer la puissance mécanique associée. On considère une pulsation cardiaque de 70 pulsations par minute. Le volume de sang expulsé à chaque pulsation est de  $75 \text{ cm}^3$ . On suppose que la section  $S$  de l'aorte (artère qui chemine le sang depuis le cœur vers le système artériel) est égale à  $3,0 \text{ cm}^2$ .

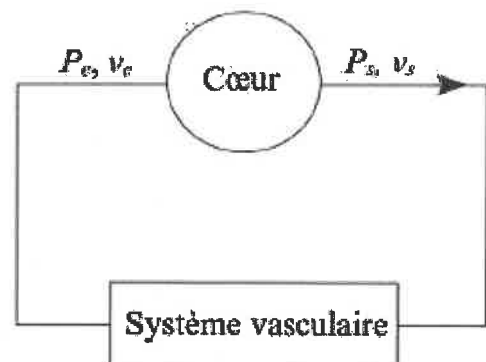
On donne les caractéristiques suivantes :

- différences entre pressions d'entrée et de sortie :  $P_s - P_e = 100 \text{ mbar}$ ;
- lien entre vitesses d'entrée et de sortie :  $v_e = v_s / 2$

**Q 1.** Déterminer la valeur numérique du débit volumique sanguin moyen  $D$ . En déduire la valeur numérique de la vitesse  $v_s$  du sang dans l'aorte.

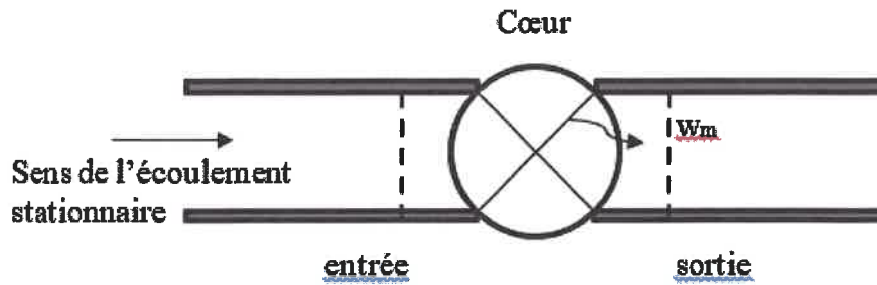
Sur le schéma ci-dessous sont représentées les frontières d'entrée et de sortie d'un système ouvert qui inclut le cœur.

**Q 2.** Reproduire ce schéma sur votre copie. Y représenter un système fermé à l'instant  $t$  formé par le sang qui traverse la frontière d'entrée pendant  $dt$  et le sang dans l'ouvert à l'instant  $t$ .



**FIGURE 3 – Cœur et système vasculaire**

Représenter ce même système à l'instant  $t + dt$  formé par le sang dans l'ouvert à  $t + dt$  ainsi que le sang qui a traversé la frontière de sortie pendant  $dt$ .



Q 3. Montrer qu'en régime stationnaire, un bilan d'énergie sur le système fermé précédent s'écrit :

$$E_{\text{fermé}}(t+dt) - E_{\text{fermé}}(t) = \rho_s \cdot D(e_s - e_e)$$

Où  $e_e$  (respectivement  $e_s$ ) est l'énergie massique du sang qui traverse la frontière d'entrée (respectivement de sortie) pendant  $dt$

Q 4. Enoncer le théorème de l'énergie mécanique.

Q 5. Déterminer la puissance fournie par le cœur au sang.

## 2 - Écoulement sanguin

On veut décrire l'écoulement du sang dans un vaisseau sanguin. Le vaisseau considéré est de forme cylindrique de longueur  $L$  et de rayon  $R$ . La longueur  $L$  est supposée très grande devant  $R$ . On assimile le sang à un fluide visqueux, incompressible et homogène. On note  $\eta$  la viscosité dynamique du sang et  $\rho$  sa masse volumique. On se place en régime permanent et on suppose que l'écoulement est laminaire. L'influence de la pesanteur est supposée négligeable. En notant  $Ox$  l'axe du cylindre, et en adoptant les coordonnées cylindriques, le champ de vitesses s'écrit  $\vec{v}(M) = v(r, \theta, x)\vec{u}_x$ .

Q 6. À quelle condition sur le nombre de Reynolds l'hypothèse d'un écoulement laminaire est-elle vérifiée ?

On considère une portion cylindrique de fluide, de rayon  $r$  et de longueur  $L$ . On note  $P_1$  la pression à l'entrée de cette portion de fluide et  $P_2$  la pression en sortie.

Q 7. Montrer que la vitesse ne dépend que de la variable  $r$ . Que vaut la vitesse du fluide en contact avec la paroi ?

Q 8. La force par unité de surface s'exerçant sur l'élément de fluide considéré a pour expression :  $\eta \frac{dv}{dr} \vec{u}_x$ . Donner l'expression des forces de viscosité exercées sur cet élément de fluide.

Q 9. Donner l'expression des forces de pression s'exerçant en amont et en aval du système.

Q 10. Montrer que le champ de vitesse vérifie l'équation :  $\frac{dv}{dr} = -\frac{P_1 - P_2}{2\eta L} r$ .

En déduire l'expression littérale du champ de vitesse  $\vec{v}(M)$  dans le fluide.

Q 11. Montrer que le débit volumique du fluide  $D_v$  vérifie :  $D_v = \frac{\pi R^4}{8\eta L} (P_1 - P_2)$ .

En déduire l'expression littérale de la vitesse moyenne  $v_m$  de l'écoulement en fonction de  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $\eta$ ,  $L$  et  $R$ .

- Q12. On considère que les vaisseaux capillaires sont assimilables à des cylindres de longueur  $L = 1,0 \text{ cm}$  et de rayon  $R = 5,0 \mu\text{m}$ . On supposera par ailleurs que la perte de charge le long d'un capillaire est typiquement de  $10 \text{ kPa}$ . Vérifier que l'hypothèse d'un écoulement laminaire est validée.
- Q13. En supposant que l'ensemble des capillaires sont en dérivation et que la vitesse du sang dans un capillaire est de l'ordre de  $1 \text{ mm}\cdot\text{s}^{-1}$ , donner une estimation du nombre de capillaires présents dans le système vasculaire.

### 3. Etude d'un matériau biocompatible

#### Données

- Nombre d'Avogadro :  $N_A = 6,0 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
- Numéro atomique du titane :  $Z = 22$
- Rayon de l'atome de Titane :  $R = 150 \text{ pm}$
- Le titane ( $\alpha$ ) possède une maille dont la géométrie correspond à un prisme droit à base losange. Les quatre atomes situés à la base du prisme sont tangents les uns les autres. L'atome au milieu de la maille est au contact avec les trois atomes situés au-dessus et les trois atomes situés au-dessous.

	H	O	Ti
Masse molaire en $\text{g}\cdot\text{mol}^{-1}$	1,0	16,0	47,9

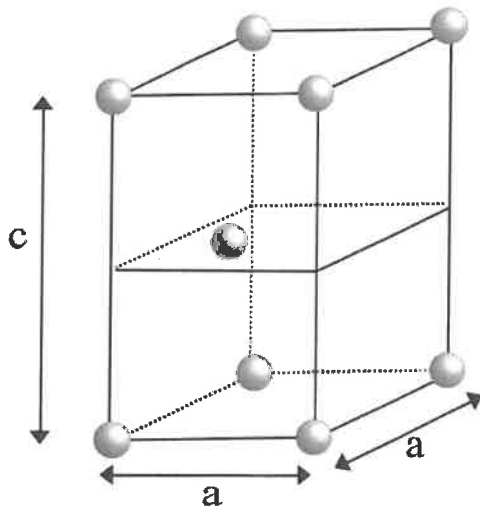


FIGURE 6 – Maille du titane ( $\alpha$ )

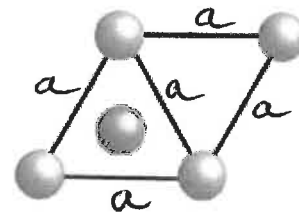


FIGURE 7 – Maille du titane ( $\alpha$ ) - vue de dessus

Les éléments biocompatibles sont des matériaux dont la présence est bien tolérée par l'organisme. Ils n'engendrent pas de réaction du système de défense immunitaire. Le titane, le niobium et le zirconium sont des exemples de biomatériaux couramment utilisés.

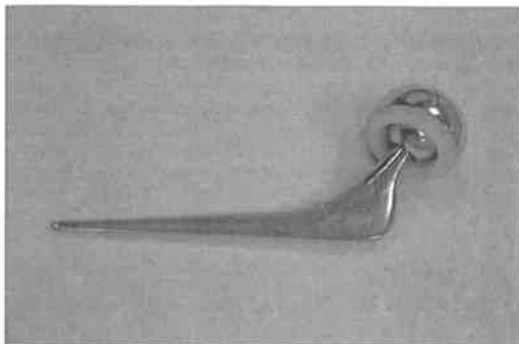


FIGURE 4 – Prothèse de hanche en titane [3]



FIGURE 5 – Radiographie après pose de la prothèse [4]

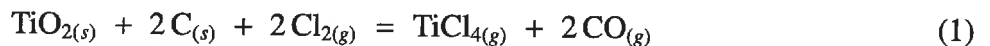
## Propriétés du titane

Q14. Indiquer la position du titane (numéro atomique  $Z = 22$ ) dans le tableau périodique des éléments. Préciser les numéros de la période (ligne) et de la colonne. Dans quel bloc se situe-t-il ?  
Le titane ( $\alpha$ ) est l'une des variétés allotropiques du titane. La maille du titane ( $\alpha$ ), représentée **figure 6**, est caractérisée par deux paramètres  $a$  et  $c$ .

Q15. Donner la population de la maille. On indique que la hauteur  $c$  de la maille a pour expression  $c = 2\sqrt{\frac{2}{3}}a$ . En déduire la valeur de la masse volumique du titane.

## Production du titane

On trouve le titane dans de nombreux minerais sous forme de dioxyde de titane. Le procédé pour obtenir le titane a été développé dans les années 1930 et est encore utilisé aujourd'hui. Le dioxyde de titane est introduit sous forme de poudre dans un réacteur à une température de 1 100 K. Il se forme alors du tétrachlorure de titane par l'action du chlore gazeux sur le dioxyde de titane selon la réaction :



Le tétrachlorure de titane est ensuite réduit à température élevée par du magnésium liquide.

Q16. Donner les schémas de Lewis de  $\text{TiCl}_4$  et de  $\text{TiO}_2$ . On indique que, dans ces structures, la valence du titane est identique à celle du carbone.

## Problème II . Alimentation en eau

### Données

#### Enthalpie de formation à 298 K

$$\Delta_f H^\circ(\text{Ca}^{2+}) = -542,83 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$$

$$\Delta_f H^\circ(\text{CO}_3^{2-}) = -677,14 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$$

$$\Delta_f H^\circ(\text{CaCO}_3) = -1\,207,6 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$$

#### Constantes d'acidité à 298 K

$$\text{pKa}(\text{CH}_3\text{COOH}/\text{CH}_3\text{COO}^-) = 4,7$$

$$\text{pKa}(\text{H}_2\text{CO}_3/\text{HCO}_3^-) = 6,4$$

$$\text{pKa}(\text{HCO}_3^-/\text{CO}_3^{2-}) = 10,3$$

La dureté de l'eau correspond à la quantité de calcium et/ou de magnésium dissous dans l'eau. Plus cette quantité est faible, plus l'eau est dite douce ; plus cette quantité est élevée, plus l'eau est dite dure ou calcaire. La dureté de l'eau s'exprime en degré hydrotimétrique français. Un degré hydrotimétrique français (F) correspond à 0,1 mole d'ion  $\text{Ca}^{2+}$  ou d'ion  $\text{Mg}^{2+}$  par  $\text{m}^3$  d'eau.

### II.1 - Dosage des ions $\text{Ca}^{2+}$ et $\text{Mg}^{2+}$

L'EDTA (ion éthylènediaminetétraacétate) est une tétra-base notée  $\text{Y}^{4-}$  dont les  $\text{pK}_a$  à 298 K sont donnés dans le tableau suivant :

Couples	$\text{Y}^{4-}/\text{HY}^{3-}$	$\text{HY}^{3-}/\text{H}_2\text{Y}^{2-}$	$\text{H}_2\text{Y}^{2-}/\text{H}_3\text{Y}^-$	$\text{H}_3\text{Y}^-/\text{H}_4\text{Y}$
$\text{pK}_a$	10,3	6,2	2,7	2

Q17. En présence d'EDTA, les cations  $\text{Ca}^{2+}$  et  $\text{Mg}^{2+}$  forment des complexes suivant les réactions bilan (1) et (2) de constantes d'équilibre respectives  $K_1$  et  $K_2$  :



Ces réactions peuvent-elles être considérées comme quasi-totales ou non ?

Le dosage des ions  $\text{Ca}^{2+}$  et  $\text{Mg}^{2+}$  par l'EDTA en présence de Noir Eriochrome T (NET) est un dosage colorimétrique. Il repose sur le fait qu'une solution de NET en présence d'ions  $\text{Ca}^{2+}$  ou  $\text{Mg}^{2+}$  donne un complexe de couleur rouge, alors qu'en absence d'ions  $\text{Ca}^{2+}$  ou  $\text{Mg}^{2+}$  la solution est bleue.

Le protocole expérimental est le suivant :

- dans un erlenmeyer de 250 mL, on introduit un volume  $V_1 = 20$  mL d'eau à étudier, un volume  $V_2 = 50$  mL d'une solution tampon ammoniacal de  $\text{pH} = 10,3$  de concentration  $C_2$  et deux à trois gouttes de NET ;
- parallèlement, on prépare une solution témoin en introduisant dans un erlenmeyer 70 mL d'eau distillée, la même quantité de NET que dans la solution précédente et 10 mL d'EDTA à la concentration  $C_3 = 0,01 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ .

Q18. Faire un schéma légendé du dispositif de dosage.

Q19. Justifier le rôle de la solution tampon ammoniacal.

Q20. Quelle est la couleur de la solution témoin ? Quelle est son utilité ?

Le volume de solution d'EDTA de concentration  $C_3$ , versé à l'équivalence, repéré par le changement de couleur est noté  $V_{\text{eq}}$ .

Q21. Exprimer littéralement le degré hydrotimétrique  $d$  de l'eau étudiée, en fonction des données utiles à choisir parmi : les volumes  $V_1$ ,  $V_2$ ,  $V_{\text{eq}}$  exprimés en mL et les concentrations  $C_2$ ,  $C_3$  exprimées en  $\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$ .

## II.2 - Dépôt de calcaire

Dans l'eau, ce qu'on appelle communément le calcaire est essentiellement du carbonate de calcium solide  $\text{CaCO}_{3(\text{s})}$ . Son dépôt nuit aux installations sanitaires.

Le calcaire est soluble dans l'eau suivant la réaction bilan (3) :



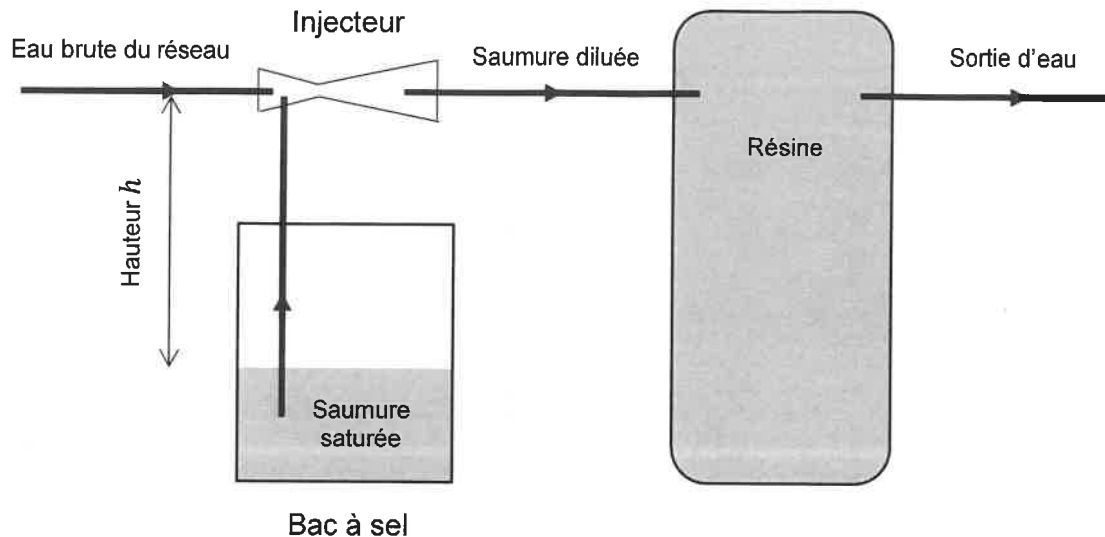
Q22. Déterminer l'enthalpie standard  $\Delta_r H^\circ_3$  de la réaction (3), supposée indépendante de la température. Justifier que le calcaire se dépose davantage sur les canalisations d'eau chaude que sur les canalisations d'eau froide.

Q23. Justifier que le vinaigre blanc ( $\text{CH}_3\text{COOH}$  acide acétique) permet de dissoudre les dépôts de calcaire. Vous appuierez votre raisonnement sur l'utilisation des domaines de prédominance et vous écrirez les bilans des réactions chimiques qui se produisent.

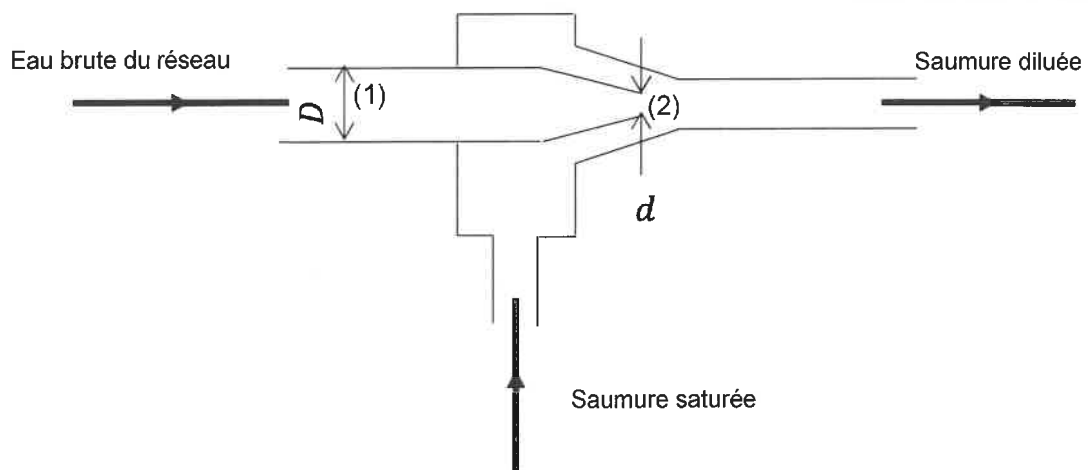
### II.3 - Phase de régénération dans un adoucisseur d'eau domestique

Un adoucisseur d'eau élimine physiquement le calcaire présent dans l'eau par un échange d'ions calcium avec des ions sodium. Cet échange est rendu possible par l'utilisation de résines cationiques chargées de sodium.

Le schéma synoptique général de l'installation hydraulique est décrit sur la **figure 5**.



**Figure 5** - Synoptique général de l'installation hydraulique de l'adoucisseur



**Figure 6** - Injecteur

Dans un adoucisseur d'eau, la phase de régénération des résines (**figure 6**) se fait par injection d'eau salée (saumure saturée) qui provient du bac à sel. L'eau brute venant du réseau en (1) circule ensuite dans un Venturi, qui provoque la montée de cette saumure dans le col (2).

Le mélange eau brute + saumure traverse alors la résine échangeuse d'ions.

### Grandeurs physiques utiles

Hauteur  $h$  entre le niveau de saumure saturée et l'injecteur en l'absence de pompage.

Diamètres de l'injecteur :  $D$  en entrée et  $d$  en sortie.

Pression effective de l'eau dans le réseau :  $P_{rés}$ .

Pression à la surface libre de la saumure  $P_{atm}$ .

Masse volumique de la saumure :  $\rho_S$ .

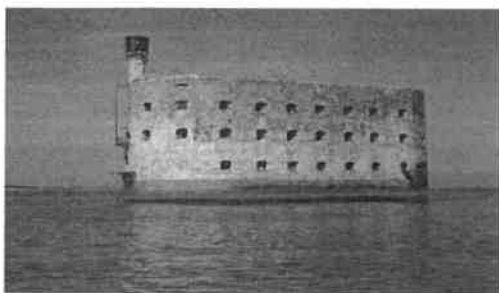
Masse volumique de l'eau brute :  $\rho_b$ .

Dans la question suivante les candidats devront faire preuve d'autonomie. Toute démarche même partielle de résolution sera prise en compte.

**Q.24.** Déterminer, en fonction des grandeurs physiques précédentes, l'expression littérale du débit volumique minimal d'eau brute pour que la saumure saturée remonte jusqu'au niveau de l'injecteur.

### **3<sup>e</sup> problème : Escale à Fort Boyard**

Situé au large de la Charente-Maritime, le Fort Boyard est édifié sous l'impulsion de Napoléon afin de protéger la rade, l'embouchure de la Charente, le port et surtout le grand arsenal de Rochefort des assauts de la marine anglaise. Construit entre 1804 et 1857, il est transformé en prison quelques années à peine après son achèvement. Cet imposant vaisseau de pierre est dorénavant connu dans le monde entier grâce au jeu télévisé du même nom, tourné depuis 1990, dans lequel une équipe généralement constituée de six candidats réalise diverses épreuves physiques et intellectuelles afin de gagner un trésor en boyards. Ce sujet s'intéresse à certains aspects du jeu.



**Figure 1 – Fort Boyard**



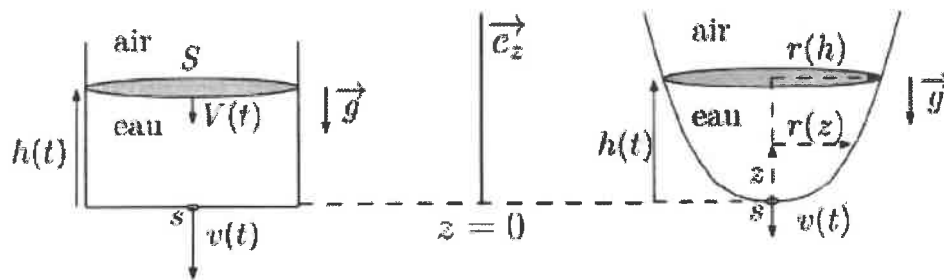
**Figure 4 – Clepsydre**

#### **I- Mesure du temps : la clepsydre**

On prendra  $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$  et  $s = 1,0 \text{ cm}^2$

Les candidats réalisent des épreuves en durée limitée, mesurée à l'aide d'une clepsydre. Utilisée depuis l'Antiquité, la clepsydre est une horloge reposant sur la vidange d'un récipient contenant de l'eau colorée qui s'écoule à travers un petit orifice sous l'effet de la gravité.

On considère tout d'abord un écoulement d'eau dans un récipient cylindrique, percé d'un orifice en  $z = 0$  et placé dans l'air atmosphérique à pression  $P_0$  (voir figure 5, à gauche). On note  $S$  la section du cylindre,  $s \ll S$  la section de l'orifice,  $h(t)$  la hauteur d'eau dans le récipient à l'instant  $t$ ,  $\rho$  la masse volumique de l'eau,  $\vec{g}$  l'accélération de la pesanteur,  $V(t)$  la vitesse de l'interface eau/air dans le cylindre et  $v(t)$  la vitesse de l'eau s'écoulant à travers l'orifice.



**Figure 5** – À gauche : vidange d'un récipient cylindrique. À droite : schéma de la clepsydre

**Q25.** Rappeler la relation de Bernoulli ainsi que ses conditions d'application. On suppose ces conditions remplies dans la suite.

**Q26.** En exploitant l'hypothèse  $s \ll S$ , établir l'expression de  $v(t)$  en fonction de  $g$  et de  $h(t)$ .

**Q27.** L'écoulement étant supposé incompressible, en déduire l'expression de  $V(t)$  en fonction de  $S$ ,  $s$ ,  $g$  et de  $h(t)$ . Préciser **qualitativement** le sens d'évolution de  $V(t)$  lors de la vidange.

On attend d'une horloge à eau que le niveau d'eau baisse à vitesse constante dans le récipient, malgré la diminution du débit dans le temps. On souhaite adapter la forme du récipient afin de satisfaire cette condition (voir figure 5, à droite). Le profil de la clepsydre, à symétrie de révolution, s'écrit :

$$\forall z > 0, \quad r(z) = K z^{1/n} \quad \text{avec} \quad K > 0 \quad \text{et} \quad n \in \mathbb{N}^*. \quad (1)$$

**Q28.** En supposant que l'expression de  $v(t)$  obtenue à la **question Q11** reste valable, montrer que l'évolution de  $h(t)$  est régie par l'équation différentielle :

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{s \sqrt{2g}}{\pi K^2} \frac{\sqrt{h}}{h^{2/n}}. \quad (2)$$

**Q29.** Sans chercher à résoudre cette équation différentielle, déterminer la valeur de l'entier  $n$  en imposant que  $dh/dt$  ne dépende pas du temps. En déduire l'unité de  $K$ .

**Q30.** Trouver la valeur de  $K$  permettant d'assurer une vitesse constante  $|dh/dt| = 1,0 \text{ mm} \cdot \text{s}^{-1}$ .

## II- Utilisation d'un colorant : la fluorescéine

On prendra masse volumique de l'eau  $\rho = 1,0 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  et viscosité dynamique de l'eau  $\eta = 1,0 \cdot 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$

Dans l'épreuve de la caserne, le candidat est amené à décrocher un seau rempli d'eau, courir sur un tapis roulant puis vider le contenu du seau dans un réservoir. À chaque remplissage du réservoir, la clé monte dans un tuyau. Si le candidat parvient à récupérer suffisamment d'eau, il peut attraper la clé. Pour rendre l'épreuve plus visuelle à l'écran, l'eau contient un colorant fluorescent vert, la fluorescéine.



Il est possible de mettre en évidence le phénomène de diffusion de la fluorescéine dans l'eau en microfluidique. Pour estimer quelques ordres de grandeur, on considère tout d'abord un canal microfluidique horizontal de section rectangulaire, de largeur  $\ell = 100 \mu\text{m}$  et de hauteur  $h = 80 \mu\text{m}$ , dans lequel s'écoule de l'eau avec un débit volumique  $Q = 10 \mu\text{L} \cdot \text{min}^{-1}$  (voir figure 10, à gauche).

**Q31.** Calculer numériquement la vitesse débitante  $v_m$  dans le canal, en  $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

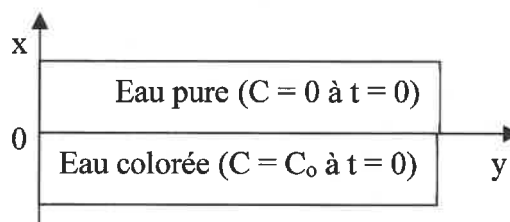
En microfluidique, le mélange entre deux fluides se fait essentiellement par diffusion : on peut donc mesurer un coefficient de diffusion moléculaire. On utilise pour cela un canal comportant une entrée en Y, permettant l'injection collatérale de deux fluides sur une même largeur et au même débit : d'une part, de l'eau pure et, d'autre part, de l'eau colorée par de la fluorescéine (voir figure 10, à droite). Cette configuration permet de réaliser une diffusion des molécules de fluorescéine dans l'eau pure. L'écoulement étant stationnaire et la section constante, il existe une équivalence entre la position  $y$  le long du canal et le temps  $t$ .



**Figure 10** – À gauche : schéma d'un canal de section rectangulaire. À droite : diffusion de la fluorescéine au confluent de deux canaux microfluidiques

De ce point de vue, on note  $C(x, t)$  la concentration volumique de fluorescéine à l'abscisse  $x$  et à l'instant  $t$ , exprimée en molécules par mètre cube, et  $D$  son coefficient de diffusion. L'origine de l'axe  $Ox$  est prise au niveau de l'interface entre les deux fluides à l'instant  $t = 0$  (voir figure 11). À cet instant, la couche d'eau pure est située dans la zone  $x < 0$ ; la couche d'eau colorée, de concentration volumique  $C_0$ , est dans la zone  $x > 0$ . On rappelle la loi de Fick, reliant le vecteur densité de courant volumique de molécules de fluorescéine  $\vec{j}$  à leur concentration volumique  $C$  :

$$\vec{j} = -D \overrightarrow{\text{grad}} C. \quad (6)$$



**Figure 11** – Schéma de la situation à l'instant  $t = 0$

**Q32.** Établir l'équation de diffusion aux dérivées partielles satisfaite par  $C(x, t)$ , pour  $x \in \mathbb{R}$ .

On admet que la solution de cette équation est de la forme :

$$C(x, t) = A + B \int_0^u e^{-s^2} ds \quad \text{avec} \quad u = \frac{x}{\sqrt{4Dt}}. \quad (7)$$

**Q33.** En exploitant les conditions initiales et l'intégrale de Gauss donnée ci-dessous, déterminer les constantes  $A$  et  $B$  en fonction de  $C_0$ . Que vaut  $C(0, t)$  pour  $t > 0$ ?

9/10

**Q34.** Comment relie-t-on simplement  $y$  et  $t$ ? En utilisant la durée typique  $t^*$  du phénomène de diffusion, dont on rappellera l'expression, prévoir l'influence du débit sur la longueur observable de mélange des deux fluides sur la figure 10.

Intégrale de Gauss :

$$\int_{-\infty}^0 e^{-s^2} ds = \int_0^{+\infty} e^{-s^2} ds = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \quad (8)$$