

**Devoirs surveillé n° 3  
8h00 – 11h00 3 heures**

**Calculatrice autorisée**

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

Toutes les interprétations seront comptabilisées

Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

**RAPPEL DES CONSIGNES**

- Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.
- Ne pas utiliser de correcteur.
- Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.

**Le devoir se compose de 3 problèmes indépendants.  
Un document réponse est à rendre avec la copie**

**1<sup>er</sup> problème : Canon à eau**

Le canon à eau est un dispositif utilisé par les pompiers pour éteindre les incendies tout en restant à distance des flammes ; on en utilise aussi dans les opérations de police anti-émeutes. Le but du dispositif est de projeter à grande distance, à travers un tube métallique cylindrique de diamètre  $d$  et de longueur  $\ell$ , de l'eau avec une vitesse initiale  $v_0$  élevée (voir figure 1). Un tel canon doit, dans le cas le plus favorable, avoir une portée maximale  $L = 150\text{m}$ . On supposera que l'eau est un liquide incompressible de masse volumique  $\rho_0 = 1,0 \cdot 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$  et peu visqueux,  $\eta = 1,0 \cdot 10^{-3} \text{ Pa.s}$ .

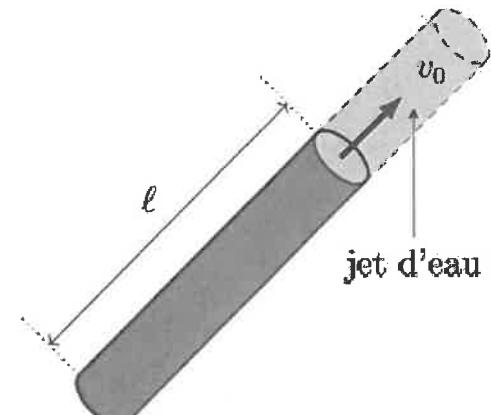


FIGURE 1 — Canon à eau (photo SDIS de la Haute-Loire et Jérémy Rousseau) et son schéma

Après être sorties du canon, les gouttes d'eau sont en mouvement sous la seule action du champ de pesanteur, d'intensité  $g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$

**Q1.** En négligeant tout frottement, montrer que la trajectoire des gouttes est parabolique et que la portée maximale est atteinte lors d'un tir sous un angle de  $45^\circ$  (figure 2).

Exprimer  $v_o$  en fonction de  $g$  et  $L$  puis calculer sa valeur.

En déduire le diamètre  $d$  du canon s'il permet d'assurer un débit sortant de  $6\ 000 \text{ L}.\text{min}^{-1}$  (cas des plus gros canons à eau commercialisés).

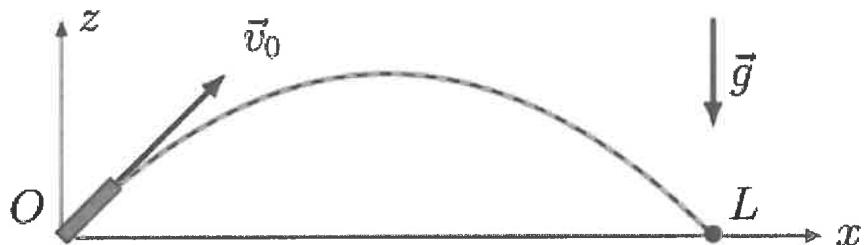


FIGURE 2 - Canon à eau en configuration de portée maximale

**Q2.** Justifier que la totalité du jet est isobare à pression identique à celle  $P_o = 1,0$  bar de l'air.

Peut-on appliquer le théorème de Bernoulli le long de cet écoulement parabolique ?

Quelle est en particulier la vitesse minimale de l'eau entre sa sortie du canon en O et son impact au sol ?

Si la pression de sortie du canon est bien pratiquement identique à  $P_o$ , sa pression à l'entrée du tube, c'est-à-dire juste à la sortie de la pompe qui l'alimente, est plus élevée ; on la notera  $P_o + \Delta P$ . La chute de pression  $\Delta P$  le long du tube est due aux effets combinés de la viscosité de l'eau et de la rugosité relative du matériau formant l'intérieur du tuyau du canon ; cette grandeur mesure le rapport  $\varepsilon/d$  de la hauteur moyenne des aspérités au diamètre du tuyau. La hauteur  $\varepsilon$  des aspérités à l'intérieur d'un tuyau de canon à eau sera comprise entre 0,1 mm et 1,0mm ; sa longueur est  $\ell = 1,0\text{m}$ .

Le diagramme de Moody, en annexe permet alors, à partir du coefficient de perte de charge  $\xi$  de déterminer la chute de pression  $\Delta P$ .

**Q3.** Rappeler l'expression du nombre de Reynolds  $R$  d'un écoulement, puis calculer celui-ci pour l'eau à l'intérieur du canon à eau. Que peut-on en conclure ?

**Q4.** Déterminer les valeurs extrêmes de  $\xi$  puis de  $\Delta P$ . On utilisera le document réponse pour porter les grandeurs mesurées et on le joindra à la copie ; commenter.

La pompe qui alimente un tel canon prélève l'eau dans un réservoir de grande dimension contenu dans le camion, à la même altitude que la pompe, au repos et à pression atmosphérique. Cette pompe accélère donc l'eau (qui atteint la vitesse  $v_o \approx 38 \text{ m}.\text{s}^{-1}$  à l'entrée du canon) et augmente sa pression pour compenser les pertes de charge, elle atteint  $P_e = 6,0$  bar à l'entrée du canon, pour une sortie de celui-ci sous pression atmosphérique.

**Q5.** En négligeant tout frottement mécanique à l'intérieur de la pompe, exprimer la puissance  $P$  qu'elle fournit en fonction de  $v_o$ ,  $P_e$ ,  $P_o$ ,  $\rho_o$  et du débit volumique  $Dv$ . Exprimer aussi le rendement propulsif  $k$  défini comme la fraction de puissance utilisée effectivement pour l'acquisition de puissance cinétique de l'eau en sortie du canon.

**Q6.** Calculer  $P$  et  $k$  ; commenter.

## 2<sup>e</sup> problème : Le carbonate de calcium dans l'eau de mer

Les données numériques nécessaires à la résolution se trouvent en fin de ce problème

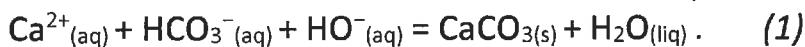
### Composition de l'eau de mer

La composition de l'eau de mer présente des variations géographiques et en fonction de la profondeur. Le tableau 1 donne un exemple de composition d'une eau de mer artificielle commercialisée pour réaliser des expériences scientifiques.

Sel introduit	Formule	$M$ (g·mol <sup>-1</sup> )	Concentration (g·L <sup>-1</sup> )
Chlorure de sodium	NaCl	58,4	26,5
Chlorure de magnésium	MgCl <sub>2</sub>	95,2	2,4
Sulfate de magnésium heptahydraté	MgSO <sub>4</sub> , 7H <sub>2</sub> O	246,5	6,75
Chlorure de calcium dihydraté	CaCl <sub>2</sub> , 2H <sub>2</sub> O	147,0	1,46
Chlorure de potassium	KCl	74,6	0,73
Hydrogénocarbonate de sodium	NaHCO <sub>3</sub>	84,0	0,20
Bromure de sodium	NaBr	102,9	0,30
$\text{pH} = 8,1$			

Tableau 1 – Composition d'une eau de mer artificielle (BS2011).

La formation de carbonate de calcium dans l'eau de mer est modélisée par la réaction d'équation :



**Q7.** Établir le diagramme de prédominance des différentes formes acidobasiques du dioxyde de carbone dissout en fonction du pH. En déduire l'espèce prédominante au pH de l'eau de mer (pH = 8,1).

**Q8.** Calculer la constante thermodynamique d'équilibre de la réaction (1).

L'eau de mer est souvent sursaturée en carbonate de calcium, c'est-à-dire que la formation du sel CaCO<sub>3(s)</sub> est thermodynamiquement spontanée, mais cinétiquement bloquée.

**Q9.** Déterminer si c'est le cas de l'eau de mer dont la composition est décrite dans le tableau 1.

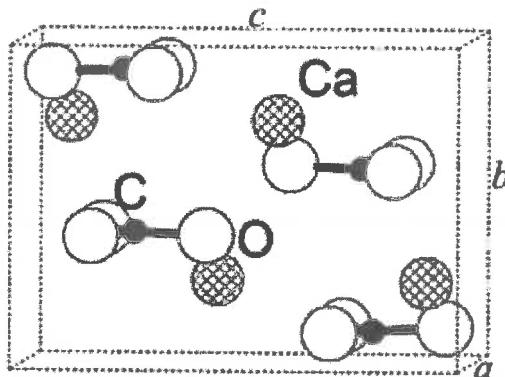
**Q10.** Calculer le pH d'apparition du précipité Mg(OH)<sub>2(s)</sub> lorsqu'on ajoute des ions hydroxyde HO<sup>-</sup> à l'eau de mer étudiée.

### Structure cristalline du dépôt de carbonate de calcium

La structure cristalline du carbonate de calcium dans le dépôt observé est l'aragonite. La maille correspondante est de type rhomboédrique, c'est-à-dire que tous les angles entre les arêtes de la maille sont égaux à 90°. Les arêtes de la maille sont  $a = 496\text{pm}$ ,  $b = 797\text{pm}$  et  $c = 574\text{pm}$ .

L'aragonite est une variété allotropique stable à pression élevée, mais métastable à pression atmosphérique ; la forme la plus stable à pression atmosphérique est la calcite, de masse

volumique  $\rho = 2,7 \text{ g.cm}^{-3}$ . On admettra qu'une élévation de pression favorise thermodynamiquement la structure la plus dense.



Représentation de la maille de l'aragonite.

**Q11.** Donner un schéma de Lewis de l'ion carbonate  $\text{CO}_3^{2-}$ . On rappelle que le carbone et l'oxygène sont situés respectivement dans la quatrième et la sixième colonne de la deuxième période du tableau périodique des éléments.

**Q12.** Préciser la nature des interactions à l'origine de la cohésion de l'aragonite.

**Q13.** Vérifier, en déterminant la masse volumique de l'aragonite, qu'elle est moins stable que la calcite à basse pression.

#### Données numériques

– Constante d'Avogadro :  $N_A = 6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$

– Constantes de solubilité à 25 °C :

$\text{CaCO}_3$	$\text{Mg(OH)}_2$
$\text{pK}_{\text{S}1} = 8,4$	$\text{pK}_{\text{S}2} = 10,9$

– Constantes d'acidité à 25 °C :

$\text{CO}_2(\text{aq})/\text{HCO}_3^- (\text{aq})$	$\text{HCO}_3^- (\text{aq})/\text{CO}_3^{2-} (\text{aq})$
$\text{pK}_{\text{A}1} = 6,1$	$\text{pK}_{\text{A}2} = 10,2$

– Constante d'équilibre de la réaction d'autoprotolyse de l'eau à 25 °C :  $K_E = 10^{-14}$

– Masses molaires :

$\text{CaCO}_3$	$\text{O}_2$
$100,1 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$	$32,0 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$

### 3è problème : Un peu de physique autour des arbres

Ce sujet est composé de trois parties indépendantes. La première s'intéresse à la dispersion des pollens avec l'étude de la vitesse de sédimentation de ces grains. La deuxième aborde la question de la montée de la sève brute depuis les racines vers les feuilles. Enfin, la dernière évalue l'évapotranspiration au niveau des feuilles, responsable de la montée de la sève mais aussi du refroidissement de l'arbre.

Un ensemble de données numériques utiles est disponible au début du sujet.

#### Données numériques utiles

Norme de l'accélération de la pesanteur	$g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$
Coefficient de tension superficielle pour l'interface eau-air à 20 °C	$\gamma = 73 \text{ mN} \cdot \text{m}^{-1}$
Viscosité dynamique de l'air à 20 °C et 1 bar	$\eta = 1,8 \times 10^{-5} \text{ Pa} \cdot \text{s}$
Masse volumique de l'air à 20 °C et 1 bar	$\rho_a = 1,2 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$
Masse molaire de l'eau	$M_e = 18 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$
Enthalpie massique de vaporisation de l'eau à 20 °C	$\ell_{\text{vap}} = 2,4 \times 10^3 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$
Pression de vapeur saturante de l'eau à 20 °C	$P_{\text{sat}} = 2,3 \text{ kPa}$
Coefficient de diffusion de la vapeur d'eau dans l'air	$D = 0,3 \text{ cm}^2 \cdot \text{s}^{-1}$
Constante des gaz parfaits	$R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$
Constante d'Avogadro	$N_A = 6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$

#### I. Dispersion des pollens

Les grains de pollen, libérés par les parties mâles de la plante, permettent la fécondation de la partie femelle et donc la reproduction de la plante. Ils peuvent être transportés par certains insectes ou tout simplement par le vent. Dans le deuxième cas, la détermination de la vitesse de sédimentation des grains de pollen, c'est-à-dire la vitesse limite qu'ils atteignent en chutant dans l'air, est nécessaire pour évaluer la distance à laquelle ils peuvent être transportés dans l'atmosphère. Ceci permet de suivre et contrôler la dispersion des espèces, mais aussi de mieux évaluer les risques sanitaires liés aux allergies.

##### Vitesse de sédimentation

On considère un grain de pollen sphérique, de rayon  $r_p$  et de masse volumique  $\rho_p$ , qui tombe dans l'air de masse volumique  $\rho_a$  et de viscosité dynamique  $\eta$ , en l'absence de vent. Dans ce cas, la force de trainée  $\vec{f}$  associée aux frottements de l'air peut être modélisée par la loi de Stokes, de sorte que

$$\vec{f} = -6\pi\eta r_p \vec{v}$$

Où  $\vec{v}$  est la vitesse du grain de pollen.

**Q14.** En admettant que les grains de pollen sont essentiellement constitués d'eau, justifier qu'il est possible de négliger la poussée d'Archimète devant le poids des grains.

**Q15.** Etablir l'équation différentielle vérifiée par la vitesse  $\vec{v}$  du grain de pollen.

**Q16.** En déduire l'expression d'un temps caractéristique  $\tau$  de sédimentation, ainsi que l'expression de la vitesse limite de sédimentation  $v_s$ . Montrer que  $v_s$  valeur de  $v_s$  est proportionnelle à  $r_p^2$ .

**Q17.** Calculer numériquement  $\tau$  et  $v_s$  pour des grains de pollen de maïs de masse volumique

$\rho_p \approx 1,2 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  et rayon  $r_p = 40 \mu\text{m}$ . On déterminera également la valeur du coefficient de proportionnalité entre  $v_s$  et  $r_p^2$ .

**Q18.** Déterminer littéralement, puis numériquement la distance parcourue par le grain à la fin du régime transitoire.

Le document 1 donne le protocole utilisé pour la mesure de la vitesse de sédimentation de grains de pollen de maïs de masse volumique  $\rho_p \approx 1,2 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ , transposable à des pollens issus d'arbres (Aylor et al., 2002).

#### Document 1 – Vitesse de sédimentation

Source : Settling speed of corn (*Zea mays*) pollen, D. E. Aylor, 2002.

Les mesures de vitesse de sédimentation  $v_s$  dans l'air immobile sont réalisées en chronométrant la durée de chute de grains de pollen dans un tube de décantation. Le diamètre intérieur du tube est de 0,02 m et sa longueur de 2,4 m. Des grains de pollen sont disposés au-dessus du tube sur une fine feuille d'aluminium, percée en son centre d'un trou d'épingle (de diamètre  $\sim 0,2 \text{ mm}$ ). Les mesures sont réalisées dans une pièce sombre. Les grains de pollen sont illuminés pendant leur chute par le dessous avec un éclairage à fibre optique. Le faisceau lumineux quasi-parallèle est centré et aligné avec l'axe du tube de décantation, orienté verticalement. La source lumineuse est située à  $\sim 0,5 \text{ m}$  du tube. Le gradient vertical de température dans la pièce est stable en raison de la convection naturelle. La combinaison d'un gradient stable de température, de l'utilisation d'un tube fermé par le dessus (à l'exception du trou d'épingle) et de faible diamètre élimine toute convection dans le tube. Cette absence de mouvement d'air dans le tube a été vérifiée en introduisant une petite bouffée de fumée (d'un bâton d'encens) dans le tube et en vérifiant qu'il restait stationnaire, ne montant ni ne descendant dans le tube. La fumée est restée stationnaire et visible pendant plusieurs minutes avant de se dissiper par diffusion. Ceci fut répété quelques fois sans qu'aucune convection ne soit détectable.

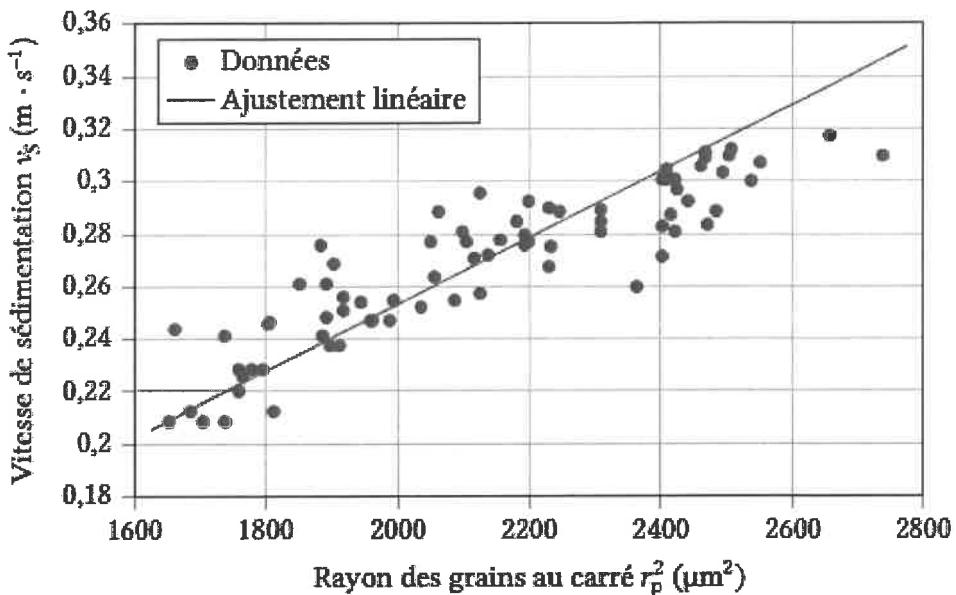
Chaque détermination de  $v_s$  est faite de la manière suivante. On tapote l'extérieur du tube pour causer la chute d'un petit nombre de grains de pollen à travers le trou d'épingle du dessus du tube. On chronomètre ensuite le temps nécessaire au pollen pour chuter d'une distance de 1,0 m. Le repère pour le lancement du chronométrage se situe à 0,4 m sous le trou d'épingle, bien en dessous de la région où les grains accélèrent, contenue dans une zone de moins de 0,05 m sous le trou. [...]

Des valeurs de  $v_s$  allant de  $21 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$  pour des grains de pollen de  $76 \mu\text{m}$  à  $80 \mu\text{m}$  de diamètre, à  $32 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$  pour des grains de  $103 \mu\text{m}$  à  $106 \mu\text{m}$  ont ainsi été mesurées.

**Q19.** Les résultats donnés par le document 1 sont-ils compatibles avec les valeurs numériques déterminées en Q17 et Q18 ?

Le graphe ci-dessous représente l'évolution de la vitesse de sédimentation  $v_s$  en fonction du rayon des grains de pollen au carré  $r_p^2$ .

**Q20.** Le coefficient directeur obtenu par ajustement linéaire est-il en accord avec les données expérimentales ? On justifiera la réponse à l'aide d'un calcul d'écart normalisé. Discuter la pertinence de l'ajustement linéaire réalisé (Fig. 1).



**FIGURE 1 – Vitesse de sédimentation  $v_s$  des grains de pollen de maïs (Aylor et al., 2002) en fonction du carré de leur rayon  $r_p$ . Le coefficient directeur de l'ajustement linéaire  $v_s(r_p^2) = ar_p^2$  réalisé avec Python est  $a = (126,59 \pm 0,85) \times 10^6 \text{ m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$ .**

## II. Comment certains arbres peuvent-il devenir si grands ?

Les plus grands arbres au monde se trouvent actuellement en Californie du Nord, aux États-Unis. Il s'agit de séquoias de Californie, dont la hauteur dépasse les 100 m. Le plus grand d'entre eux atteint 112 m.

Dans les arbres, la sève brute est une solution aqueuse diluée contenant des ions et des acides aminés. Elle est acheminée depuis les racines jusqu'aux feuilles dans les canaux du xylème dont le rayon varie entre 25  $\mu\text{m}$  et 250  $\mu\text{m}$ . On cherche ici à étudier certaines problématiques liées à l'ascension de la sève brute dans l'arbre.

Dans toute cette partie, la sève brute sera assimilée à de l'eau liquide pure, modélisée par une phase condensée incompressible et indilatatable. De plus l'écoulement de la sève est supposé suffisamment lent pour que le fluide soit à l'équilibre mécanique à tout instant.

### Statique des fluides

On considère un fluide de masse volumique  $\rho$  à l'équilibre mécanique dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Soit l'axe Oz vertical ascendant.

**Q 21.** En écrivant la condition d'équilibre mécanique d'un volume élémentaire de fluide de hauteur  $dz$ , établir la relation fondamentale de la statique des fluides vérifiée par la pression  $P(z)$  du fluide.

**Q 22.** En déduire l'expression de la pression  $P(z)$  dans un fluide dont la surface libre à l'altitude  $z = 0$  est à la pression atmosphérique  $P_0$ .

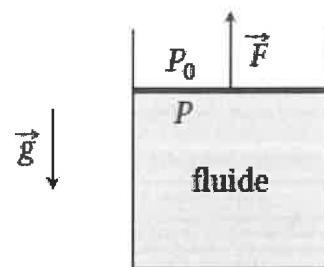
La théorie dite de cohésion (Dixon, 1894) suppose la présence de colonnes d'eau continues entre les racines et les feuilles dans les canaux du xylème pour le transport de la sève brute.

**Q 24.** Justifier que l'existence d'arbres dont la hauteur dépasse 10 m semble impossible.

## Pression négative

Le concept de pression négative peut surprendre mais se comprend aisément en imaginant un fluide réel contenu dans un récipient. Lorsque les particules du fluide poussent sur les parois du contenant, la pression du fluide est positive, lorsqu'elles tirent dessus, elle est négative !

On considère un fluide contenu dans un cylindre de section  $S$ , fermé par un piston mobile sans frottement de masse négligeable. L'ensemble est placé dans l'air à pression ambiante  $P_0$ . Un opérateur tire sur le piston en exerçant une force  $\vec{F} = F \vec{e}_z$ .



**Q 25.** Exprimer la pression  $P$  dans le fluide à l'équilibre en fonction de  $P_0$ ,  $F$  et  $S$ .

**Q 26.** Dans le cas où le fluide est de l'air assimilé à un gaz parfait, exprimer la force  $F_{\max}$  maximale que peut appliquer l'opérateur sans rompre l'équilibre, en fonction de  $P_0$  et  $S$ .

Si l'on remplit le cylindre avec de l'eau dégazée, c'est-à-dire qui ne contient aucun gaz dissous, il est possible d'observer un équilibre, même si l'opérateur applique une force de norme supérieure à  $F_{\max}$ . Cet équilibre est qualifié de métastable : il peut être rompu à la suite d'une petite perturbation, comme un choc.

**Q 27.** Commenter alors le signe de la pression du fluide. Selon vous, quelle différence entre l'air et l'eau permet d'expliquer ce résultat ?

**Q 28.** Évaluer numériquement la pression de la sève brute au sommet du plus grand arbre actuellement existant. Commenter.

Cette valeur explique que l'arbre est sensible au stress hydrique. Si l'eau fait défaut au niveau des racines, des bulles de gaz peuvent se former dans les canaux ce qui empêche l'ascension de la sève. Plusieurs mécanismes, non discutés ici, permettent à l'arbre de s'en protéger dans une certaine mesure. L'existence de telles pressions est possible car une partie de l'eau est évaporée au niveau des feuilles : c'est l'évapo-transpiration.

## III. Évapo-transpiration

La feuille est le lieu de nombreux échanges d'énergie et de matière entre l'arbre et son environnement.

Dans cette partie, on s'intéresse aux échanges d'énergie en considérant tout d'abord une unique feuille. On note  $S$  la surface d'une des deux faces de la feuille,  $T$  la température de la feuille et  $T_0 = 20^\circ\text{C}$  la température de l'air « loin » de la feuille. On négligera l'activité métabolique de la feuille.

Les transferts d'énergie seront comptés algébriquement selon la convention habituelle, c'est-à-dire positifs si le système reçoit de l'énergie de l'extérieur et négatifs sinon.

## Convection et rayonnement

La convection et le rayonnement sont deux modes de transfert thermique qui contribuent au refroidissement de la feuille. Nous allons les étudier successivement.

Les échanges convectifs sont modélisés par une puissance thermique par unité de surface de la forme

$$j_{\text{th},c} = h_c (T_0 - T)$$

où  $h_c = 20 \text{ W} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$  est le coefficient de transfert conducto-convectif.

**Q 29.** Exprimer la puissance thermique  $P_c$  reçue par la feuille par convection.

**Q 30.** En déduire l'expression de la résistance thermique  $R_c$  associée aux échanges convectifs.

Si les températures  $T$  et  $T_0$  sont proches, les échanges radiatifs entre la feuille et son environnement s'expriment sous la forme d'une puissance thermique par unité de surface de la forme

$$j_{th,r} = h_r (T_0 - T)$$

avec  $h_r = 5,7 \text{ W} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$  à  $T_0 = 20^\circ\text{C}$ .

**Q 31.** Exprimer la résistance thermique  $R_r$  associée aux échanges radiatifs.

**Q 32.** En régime permanent et si la feuille ne reçoit aucun autre transfert d'énergie, exprimer puis calculer sa température  $T_1$ . Faire de même pour la température  $T_2$  si la feuille est exposée au Soleil, de sorte que sa face supérieure reçoit une puissance surfacique  $j_{th,s} = 250 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$ .

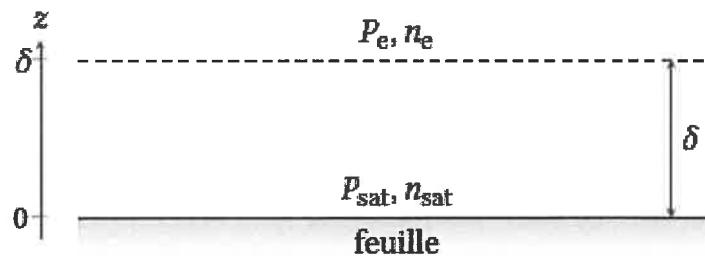
### Transpiration

Aux échanges d'énergie étudiés précédemment s'ajoutent des échanges gazeux par les stomates, les pores de la feuille. En particulier, lorsque l'air ambiant n'est pas saturé en vapeur d'eau, l'eau de la sève brute s'évapore, provoquant ainsi l'ascension de la sève dans les canaux du xylème. Ce mécanisme participe aussi au refroidissement de la feuille.

Lorsque la feuille est soumise à un courant d'air du fait de la convection naturelle ou forcée, il existe au voisinage de la surface de la feuille une fine couche d'air d'épaisseur  $\delta$  appelée couche limite dans laquelle l'écoulement de l'air est laminaire. Les échanges de particules entre l'air « loin » de la feuille et l'air en contact avec la feuille ne se font donc que par diffusion. L'épaisseur de la couche limite dépend de nombreux paramètres. Dans des conditions raisonnables, elle est de l'ordre de quelques millimètres : on prendra  $\delta = 2,0 \text{ mm}$  pour les applications numériques.

Loin de la feuille, c'est-à-dire pour  $z > \delta$ , la pression partielle  $P_e$  en eau et la densité volumique  $n_e$  de molécules d'eau dans l'air sont supposées uniformes. On suppose aussi qu'à la surface de la feuille, l'air est saturé en eau : en  $z = 0$ , la pression partielle en eau vaut  $P_{sat}$  et la densité volumique de molécules d'eau  $n_{sat}$  (Fig. 3). On considère ici que la température de la feuille est suffisamment proche de celle de son environnement, de sorte que  $T = T_0$ .

Dans toute la suite, on suppose que seule la surface supérieure de la feuille présente des stomates, ce qui est le cas chez de nombreuses espèces. On ne considérera donc que cette face de la feuille dans le mécanisme de transpiration.



**FIGURE 3 – Couche limite au voisinage de la surface de la feuille.**

On appelle  $\Phi$  le flux de particules, orienté dans le sens des  $z$  croissants sur une surface d'aire  $S$ .

**Q 33.** Exprimer  $\Phi$  à partir de la loi de Fick, en faisant intervenir  $n(z)$ , densité volumique de particules d'eau à la distance  $z$  de la feuille et  $D$  le coefficient de diffusion.

**Q 34.** En régime stationnaire, à l'aide d'un bilan de particules entre les altitudes  $z$  et  $z + dz$ , montrer que  $\frac{dn}{dz}$  ne dépend pas de  $z$ .

**Q 35.** Représenter graphiquement l'évolution de  $n(z)$  pour  $z \in [0; 2\delta]$ . En déduire l'expression de  $\Phi$  dans la couche limite en fonction de  $D$ ,  $n_e$ ,  $n_{sat}$ ,  $S$  et  $\delta$ .

**Q 36.** En supposant que la vapeur d'eau dans l'air se comporte comme un gaz parfait, exprimer  $n_e$  en fonction de  $P_e$ ,  $N_A$ ,  $R$  et  $T_0$ .

**Q 37.** En déduire que le flux de particules d'eau s'écrit

$$\Phi = - \frac{DN_AS}{\delta RT_o} (P_e - P_{sat})$$

**Q 38.** Exprimer la masse d'eau  $\delta m/dt$  qui s'évapore par unité de temps en fonction de  $\Phi$ ,  $N_A$  et de la masse molaire de l'eau  $M_e$ .

**Q 39.** Proposer une estimation raisonnable pour la surface  $S$  d'une feuille de chêne. Toujours dans le cas où  $T \approx T_0$ , en déduire une estimation de l'ordre de grandeur de la masse d'eau qui s'évapore, chaque jour, d'un chêne mature dont le feuillage comporte environ 100 000 feuilles. On supposera que l'humidité relative  $P_e/P_{sat}$  de l'air est de l'ordre de 75 %. Commenter.

**Q 40.** Montrer finalement que la puissance thermique algébriquement reçue par la feuille et liée à l'évaporation s'écrit :

$$P_{vap} = KS(P_e - P_{sat}) \text{ avec } K = \frac{DM_e \ell_{vap}}{\delta RT_o}$$

où  $\ell_{vap}$  est l'enthalpie massique de vaporisation de l'eau.

**Q 41.** En supposant que les résultats précédents restent valables pour de faibles écarts de température entre l'air et la feuille, évaluer la température  $T_3$  d'une feuille exposée au Soleil, recevant une puissance surfacique  $j_{th,s}$  sur sa face supérieure, en tenant compte de tous les transferts d'énergie envisagés dans cette partie. Conclure.

## Diagramme de Moody

