

**Devoirs surveillé n° 4
8h00 – 12h00 4 heures**

Calculatrice NON autorisée

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

Toutes les interprétations seront comptabilisées

Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.
- Ne pas utiliser de correcteur.
- Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.

**Le devoir se compose de 3 problèmes indépendants.
Un document réponse est à rendre avec le problème 3.**

1^{er} problème : physique et santé

I - Mesure de l'épaisseur de la cornée

L'œil est l'organe de la vision. Il capte la lumière et transforme celle-ci en signaux électriques transmis au cerveau via le nerf optique. La cornée est la membrane transparente par laquelle la lumière entre dans l'œil. Ce dernier est de forme approximativement sphérique avec un diamètre typique d'environ 25 mm. Il est maintenu dans la cavité orbitaire par un ensemble de muscles qui assure aussi son mouvement. La figure 1 donne une représentation simplifiée de l'œil.

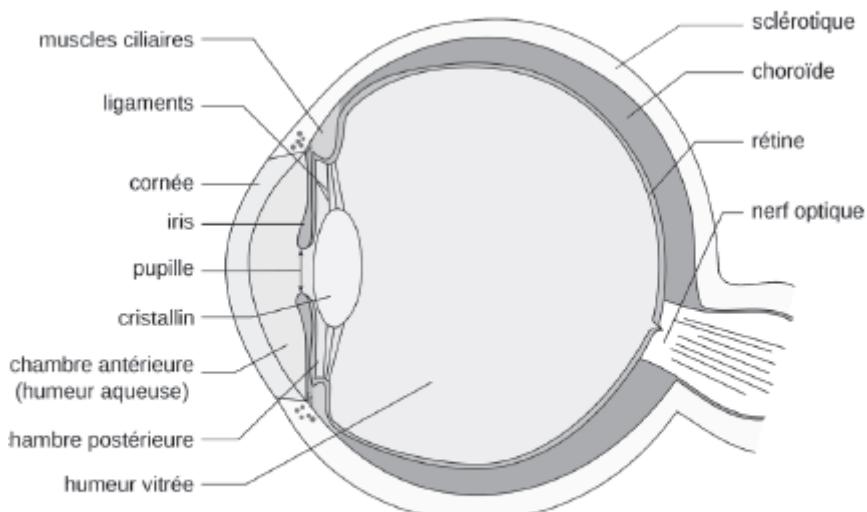


FIGURE 1 – Représentation simplifiée de l'œil [1]

Pour les applications numériques, on assimilera la cornée à de l'eau de masse volumique $\rho_0 = 1,0.10^3 \text{ kg.m}^{-3}$ et de coefficient de compressibilité adiabatique $\chi_s = 3,6.10^{-10} \text{ Pa}^{-1}$

La mesure de l'épaisseur de la cornée, ou pachymétrie, peut s'effectuer à l'aide d'ondes ultrasonores.

On considère la propagation d'une onde plane progressive sinusoïdale ultrasonore dans la cornée. Celle-ci sera considérée comme un fluide sans viscosité de masse volumique ρ_0 , de pression P_0 et de vitesse nulle. L'onde se propage le long de l'axe Ox (de vecteur unitaire \vec{u}_x) dans le sens des x positifs avec une célérité c. Lors du passage de l'onde, on notera la pression $P(x, t) = P_0 + p(x, t)$, la masse volumique $\rho(x, t) = \rho_0 + \mu(x, t)$ et la vitesse du fluide $\vec{v} = v(x, t) \vec{u}_x$.

On supposera que les perturbations associées à l'onde sonore sont de faible amplitude : $P_0 \gg |p|$ et $\rho_0 \gg |\mu|$ (hypothèse de l'approximation acoustique).

On notera $\chi_s = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_S$ le coefficient de compressibilité adiabatique du fluide.

On définit l'impédance acoustique Z comme le rapport de la surpression sur la vitesse. On notera Z_1 l'impédance acoustique de la cornée et Z_2 celle de l'humeur aqueuse, liquide intra-oculaire de la partie antérieure de l'œil.

Q1. Donner l'expression du coefficient de compressibilité adiabatique dans le cadre de l'approximation acoustique.

Q2. Utiliser l'équation associée à la dynamique du fluide appliquée à une particule de celui-ci et simplifier son expression dans le cadre de l'approximation acoustique.

Q3. Écrire l'équation locale de conservation de la masse et simplifier son expression dans le cadre de l'approximation acoustique.

Q4. En déduire l'équation de propagation vérifiée par $p(x, t)$ en fonction de ρ_0 et de χ_s . Donner l'expression de la célérité des ondes sonores. Donner sa valeur numérique dans le cas de la cornée.

Q5. Donner l'expression de l'impédance acoustique dans le cas d'une onde se propageant dans le sens des x positifs, puis dans le cas d'une onde se propageant dans le sens des x négatifs.

Q6. Expliciter les conditions aux limites à l'interface entre la cornée et l'humeur aqueuse. En déduire les expressions des coefficients de transmission et de réflexion en vitesse en fonction des impédances Z_1 et Z_2 . Quelle fraction de la puissance acoustique incidente est réfléchie sur l'interface cornée-humeur aqueuse ? On demande une expression littérale.

Q7. Expliquer comment obtenir la valeur de l'épaisseur de la cornée à l'aide de ce dispositif.

II - Électrocardiogramme

Nous allons d'abord étudier le fonctionnement électrique des nerfs, puis appliquer le modèle du dipôle électrostatique à l'électrocardiogramme.

Fonctionnement électrique d'un nerf

Un neurone est une cellule complexe dont nous allons étudier une partie, l'axone, ou fibre nerveuse, qui conduit le signal nerveux électrique dans le corps humain. On modélise un axone par un cylindre infiniment long d'axe (O, \vec{u}_z) , de rayon intérieur a . Il est constitué d'une membrane d'épaisseur b et de permittivité électrique relative ϵ_r et d'un axoplasme à l'intérieur de cette membrane (voir figure 9.b).

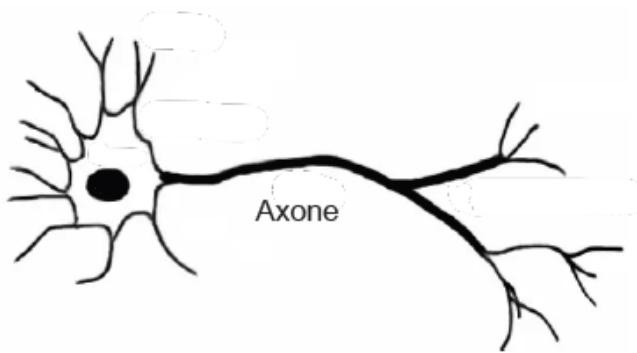


Figure 9.a - Schéma d'un neurone

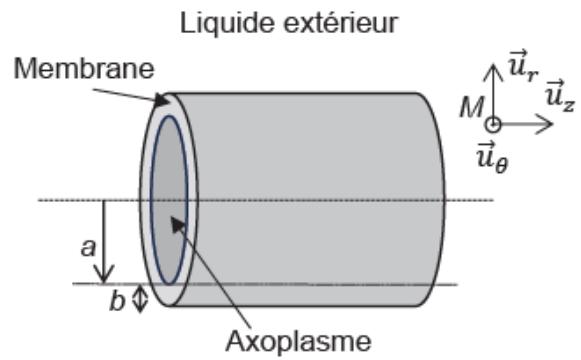


Figure 9.b - Schéma d'un axone

L'axoplasme est au potentiel V_A , tandis que le liquide extérieur est au potentiel V_E . La face intérieure de la membrane porte une charge de densité surfacique σ uniforme. On ne s'intéresse pas à la charge de la face extérieure.

On travaille en régime stationnaire. On utilise la base locale $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ en coordonnées cylindriques (r, θ, z) .

On admet que les calculs de champs dans la membrane sont identiques à ceux du vide, à ceci près qu'il faut remplacer la permittivité du vide ϵ_0 par $\epsilon_0\epsilon_r$, où ϵ_r est la permittivité relative de la membrane.

Données numériques :

Rayon intérieur d'un axone : $a = 5,0 \mu\text{m}$; Épaisseur de la membrane de l'axone : $b = 7,0 \text{ nm}$
 Permittivité relative de la membrane : $\epsilon_r = 8,0$;

Permittivité électrique du vide : $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$

Q8. Montrer que le champ électrique \vec{E} (M) dans la membrane ne dépend que de r et qu'il est porté par le vecteur directeur \vec{u}_r . En appliquant le théorème de Gauss, déterminer l'expression de \vec{E} (M) en fonction de σ , $\epsilon_0\epsilon_r$, a , r et \vec{u}_r .

Q9. Quelle est la relation liant le champ électrostatique \vec{E} (M) et le potentiel $V(M)$?

Déterminer l'expression du potentiel $V(M)$ en fonction de σ , $\epsilon_0\epsilon_r$, a , r et V_A .

En déduire que la charge surfacique σ peut s'écrire $\sigma = \frac{\epsilon_0\epsilon_r(V_A - V_E)}{a \cdot \ln\left(\frac{a+b}{a}\right)}$.

Q10. En utilisant la relation $a \gg b$, simplifier l'écriture de la charge surfacique σ en fonction de σ , $\epsilon_0\epsilon_r$, a , b , V_E et de V_A , puis montrer qu'on peut écrire la norme du champ électrique sous la forme $\|\vec{E}(M)\| = \left| \frac{V_A - V_E}{b} \right|$.

Quelle est la charge Q portée par la face intérieure d'une longueur L de membrane ?

Q11. En utilisant la relation $Q = C(V_A - V_E)$, déterminer l'expression de la capacité de la membrane pour une longueur L , puis sa capacité par unité de surface de membrane c_m .

On trouve dans la littérature médicale $c_m = 1 \cdot 10^{-2} \text{ F.m}^{-2}$.

Vérifier que cette valeur est compatible avec l'expression littérale trouvée plus haut. Sachant que $V_A - V_E = -60 \text{ mV}$, déterminer numériquement σ et le champ électrique \vec{E} (M) dans la membrane.

En réalité, ce potentiel et cette répartition des charges correspondent à une situation où l'axone est au repos. Quand un influx nerveux se propage, le potentiel change suivant des mécanismes biologiques que nous n'expliquerons pas (voir figure 10). On appelle le signal correspondant « potentiel d'action ». Lorsque le cœur bat, il y a un potentiel d'action qui se propage dans le cœur. Par conséquent, on peut considérer qu'une partie du cœur est chargée positivement et une autre partie négativement. Cela ressemble à un dipôle électrostatique. Cette modélisation très simple permet en fait d'expliquer de façon satisfaisante les électrocardiogrammes.

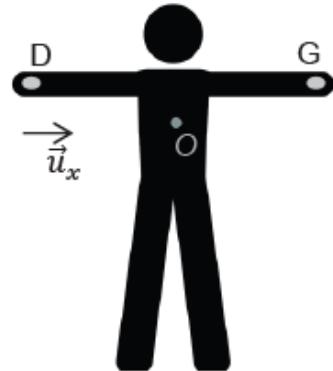
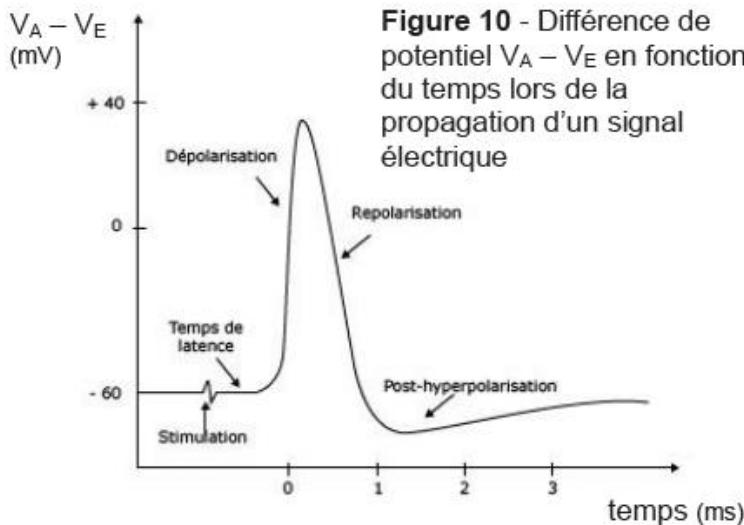


Figure 11 - Position des électrodes

Réalisation et exploitation d'un électrocardiogramme

Dans notre modèle simplifié, le muscle cardiaque se comporte comme un dipôle électrique qui varie suffisamment lentement pour qu'on puisse utiliser les formules de la statique. On rappelle que le potentiel créé au point M de position $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$ par un dipôle électrostatique placé en O de moment dipolaire électrique \vec{p} s'écrit $V(M) = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$.

Un électrocardiogramme est un tracé contenant 12 lignes correspondant à la mesure de 12 tensions mesurées entre différentes électrodes situées sur le corps humain. Nous n'allons nous intéresser qu'à une de ces mesures de tension, entre deux électrodes placées l'une au poignet gauche (G) et l'autre au poignet droit (D). On mesure alors la tension $U_1 = V_G - V_D$ en fonction du temps.

Le cœur O où est situé le dipôle étudié est à égale distance d des électrodes $d = OG = OD$ (voir figure 11).

Q12. En utilisant la formule $V(M) = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$ donnée plus haut, montrer que U_1 est proportionnelle à la projection du dipôle électrostatique du cœur sur la direction \vec{u}_x entre D et G. On notera K la constante de proportionnalité, qu'on exprimera en fonction de ϵ_0 , d et de DG , la distance entre G et D.

Q13. Le tableau ci-dessous représente le dipôle électrique du cœur à différents instants t_i successifs pendant un cycle cardiaque (un point représente un dipôle nul). On précise l'orientation du vecteur \vec{u}_x en bas à droite.

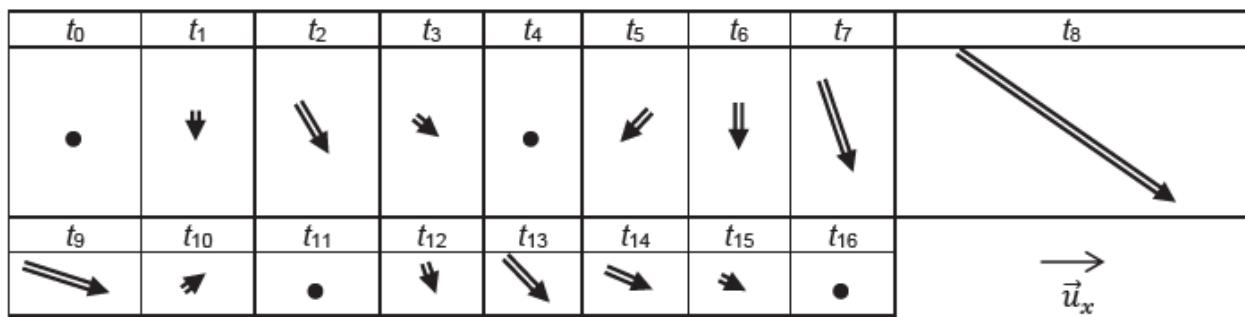


Figure 12 - Évolution du dipôle électrique cardiaque en fonction du temps (avec $t_i < t_{i+1}$)

Auquel de ces 4 graphes (représentant la tension en fonction du temps) l'enregistrement peut-il correspondre ?

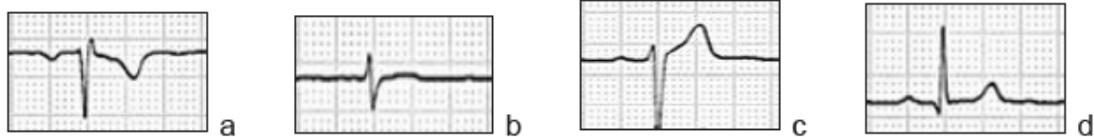


Figure 13 - 4 des 12 enregistrements d'un ECG

Les différents enregistrements de l'électrocardiogramme permettent de mettre en évidence la présence ou l'absence de certains défauts cardiaques.

III-Étude d'un matériau biocompatible

Les éléments biocompatibles sont des matériaux dont la présence est bien tolérée par l'organisme. Ils n'engendrent pas de réaction du système de défense immunitaire. Le titane, le niobium et le zirconium sont des exemples de biomatériaux couramment utilisés.

Stabilité du titane

Le diagramme E-pH du titane est présenté sur la figure 8 ci-dessous. Seules les espèces suivantes ont été prises en compte : $\text{TiO}_{2(s)}$, $\text{Ti}_2\text{O}_3(s)$, $\text{Ti}^{2+}_{(aq)}$, $\text{TiO}_{(s)}$ et $\text{Ti}_{(s)}$.

Q14. Donner le degré d'oxydation du titane dans chacune de ces espèces.

Q15. Identifier les espèces A à E associées aux domaines de la figure 8. Le candidat présentera sa réponse sous forme de tableau.

Q16. Le titane métallique est-il stable dans l'eau ? Le pH a-t-il une influence ?

Q17. Quelle espèce se dismute en milieu acide ? Écrire l'équation de réaction associée en attribuant un coefficient stœchiométrique égal à 1 pour l'espèce qui se dismute.

Q18. Écrire l'équation de réaction associée à la frontière entre B et D. On écrira la réaction dans le sens de la formation de B. Sachant que la constante d'équilibre de cette réaction est $K = 10^{11}$, déterminer la valeur de l'abscisse pH_1 de la figure 8.

- Potentiels standard

Couple Ox/Red	E^0 (V)
$\text{Ti}_{(aq)}^{2+} / \text{Ti}_{(s)}$	- 1,63
$\text{TiO}_{2(s)} / \text{Ti}_{(aq)}^{2+}$	- 0,50
$\text{TiO}_{2(s)} / \text{Ti}_{(s)}$	- 0,86
$\text{TiO}_{2(s)} / \text{Ti}_2\text{O}_{3(s)}$	- 0,56
$\text{H}_2\text{O}_{(l)} / \text{H}_{2(g)}$	0
$\text{O}_{2(g)} / \text{H}_2\text{O}_{(l)}$	1,23

- Diagramme E-pH du titane.

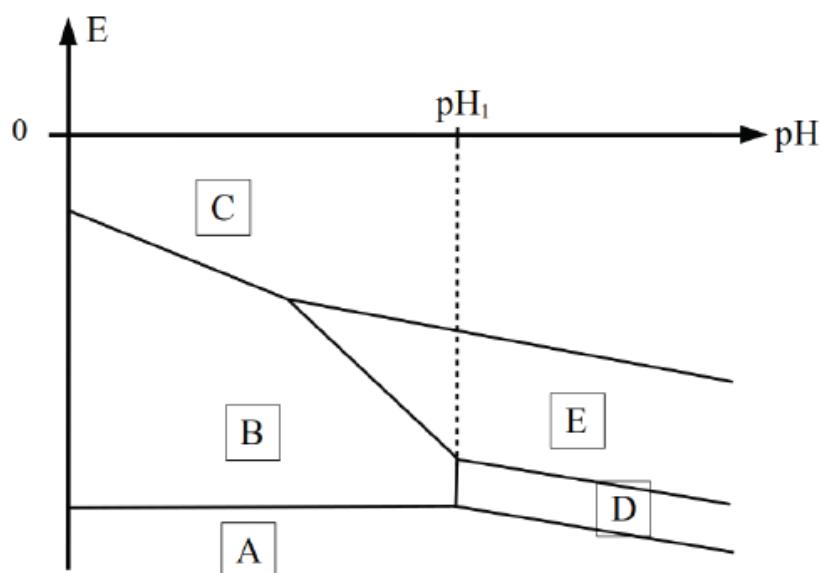


FIGURE 8 – Diagramme E-pH simplifié du titane. Ce diagramme est tracé pour une concentration de travail égale à 10^{-3} mol · L⁻¹.

2^e problème : Synthèse de l'acide phosphorique H₃PO₄

L'un des procédés les plus utilisés pour former de l'acide phosphorique à partir du phosphore blanc, dont la formule brute est P₄ est le procédé thermique. L'acide phosphorique ainsi obtenu présente une haute pureté et peut être utilisé dans les engrains ou pour des applications pharmaceutiques ou alimentaires.

Il se décompose en trois étapes :

i. combustion du phosphore blanc à l'état gazeux au contact de l'air pour former du pentaoxyde de diphosphore (P₂O₅) gazeux selon la réaction (1) qui sera étudiée à la question **Q1**. Cette étape est réalisée dans un réacteur ouvert parfaitement agité continu isochore (RPAC), qui fonctionne en régime permanent stationnaire à une pression de 2 bar et à une température de 1 700 K ;

ii. hydratation du pentaoxyde de diphosphore à l'aide de vapeur d'eau pour former l'acide phosphorique selon la réaction (2) $P_2O_5(g) + 3 H_2O(g) \rightarrow 2 H_3PO_4(aq)$ (2)

iii. refroidissement de l'acide phosphorique obtenu et retraitement des vapeurs issues du réacteur pour en extraire l'acide phosphorique avant de les rejeter vers l'extérieur.

On s'intéressera dans cette partie uniquement à la première étape. Le schéma global du procédé thermique est présenté à la figure 5.

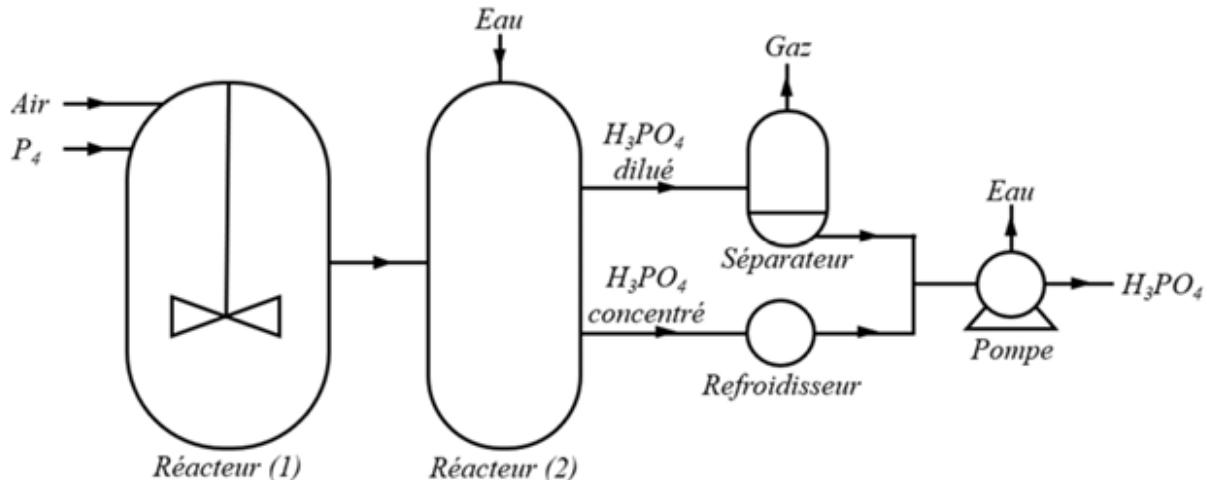


Figure 5 - Schéma du procédé thermique pour la production d'acide phosphorique

Q1. Écrire l'équation de la réaction (1).

Les débits en quantité de matière pour le phosphore blanc dans le réacteur (1) sont notés $F_e(P_4(g)) = 1,1 \text{ mol}\cdot\text{s}^{-1}$ en entrée et $F_s(P_4(g))$ en sortie. Le débit en volume total en sortie de réacteur est $Q_{V,s} = 140 \text{ L}\cdot\text{s}^{-1}$. Le taux de conversion au sein de ce réacteur est $X_s = 99,9 \%$. La loi de vitesse de la réaction (1) peut s'écrire sous la forme : $v = k[P_4]$, avec une constante de vitesse $k = 50 \text{ s}^{-1}$.

Q2. Effectuer un bilan de matière sur le phosphore blanc au sein du réacteur (1). En déduire une relation entre la vitesse de réaction v , le volume V du réacteur et les débits en quantité de matière de phosphore blanc en entrée $F_e(P_4(g))$ et sortie $F_s(P_4(g))$.

Q3. Déterminer la valeur du volume du réacteur (1) pour un fonctionnement avec le taux de conversion souhaité.

Q4. Le taux de conversion obtenu en remplaçant le réacteur (1) par un réacteur RPAC de volume $V' = 6 \text{ m}^3$, le débit sortant étant inchangé, est $X'_s = 99,95 \%$. Commenter.

3^e problème : Pompe à chaleur

Dans le cadre de la rénovation énergétique des bâtiments afin de lutter contre le réchauffement climatique, il est préconisé l'installation de pompe à chaleur. En effet, ce dispositif permet d'effectuer des économies d'énergie pour le chauffage des habitations et la production d'eau sanitaire.

PARTIE A : Modèle ditherme

1. Présenter sous forme de schéma annoté, le principe de fonctionnement d'une pompe à chaleur ditherme fonctionnant entre une source chaude thermostatée (de température T_C) et une source froide thermostatée (de température T_F).
2. On considère comme système thermodynamique le fluide de la pompe à chaleur. Préciser, en justifiant, les signes de Q_C transfert thermique reçu par le système de la part de la source chaude, de Q_F transfert thermique reçu par le système de la part de la source froide et de W travail mécanique reçu de la part du système mécanique sur un cycle de fonctionnement.
3. Définir l'efficacité (ou COP) de cette pompe à chaleur. L'exprimer en fonction uniquement des transferts thermiques Q_C et Q_F .
4. Déterminer l'expression de l'efficacité (ou COP) de la pompe à chaleur en fonction de T_C et T_F respectivement température de la source chaude et température de la source froide, de l'entropie créée au cours d'un cycle de fonctionnement que l'on notera S_c et de W . Donner son ordre de grandeur pour une machine réelle.
5. Représenter graphiquement l'évolution du COP en fonction de S_c (en considérant W , T_C et T_F constants).
6. Interpréter physiquement le cas $S_c = 0$.

PARTIE B : Fonctionnement de la pompe à chaleur à fluide R410A

Le schéma de principe d'une telle installation est présenté dans le document 1.

7. A l'aide du document 1, identifier la source chaude et la source froide ainsi que le système mécanique qui échange un travail avec le fluide de la pompe à chaleur.

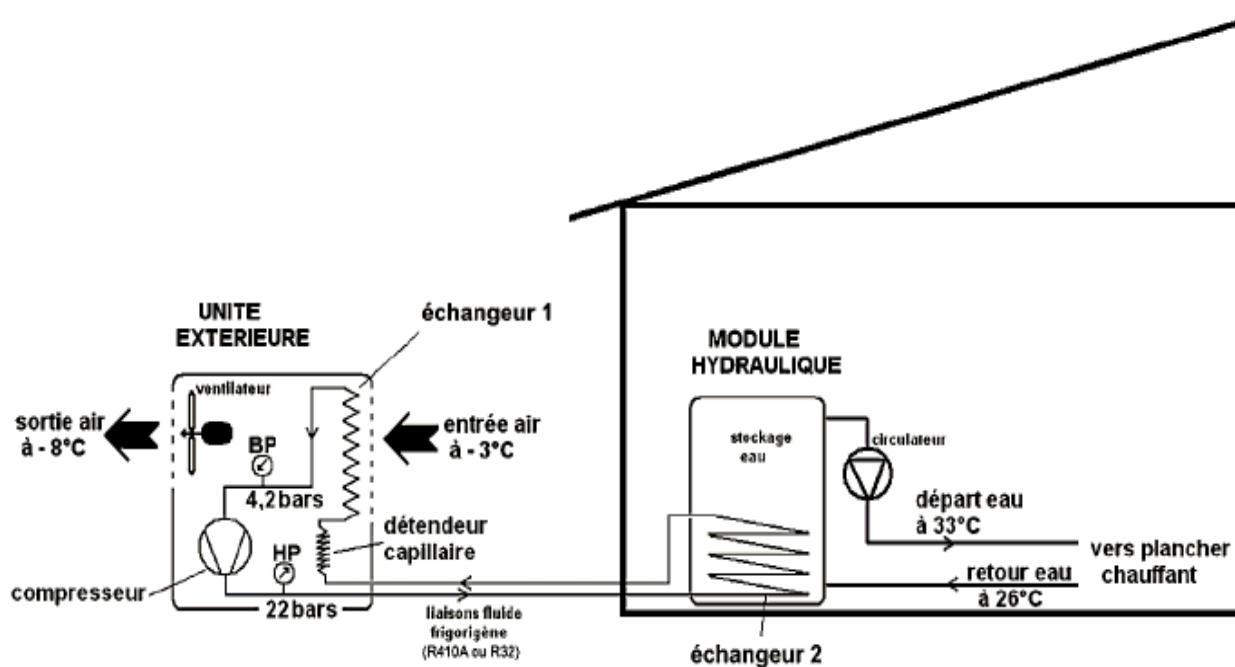
Pour un fluide en écoulement permanent à travers un organe thermodynamique à une entrée et une sortie, on rappelle le premier principe industriel :

$$\Delta_{(e,s)}(h + e_c + e_p) = w_i + q$$

avec h enthalpie massique du fluide, e_c énergie cinétique massique du fluide, e_p énergie potentielle massique du fluide, w_i travail massique reçu par le fluide et q transfert thermique massique reçu par le fluide.

Dans la suite, on négligera les variations d'énergies cinétique et potentielle massiques devant la variation d'enthalpie massique. On négligera les pertes de charge dans les canalisations.

Document 1



On étudie dans cette partie le fonctionnement réel de la pompe à chaleur fonctionnant avec le fluide R410A. Cette pompe à chaleur est composée des organes thermodynamiques suivants : un compresseur, un condenseur (dans lequel a lieu une liquéfaction), un détendeur et un évaporateur. Le fluide R410A subit alors les transformations décrites dans le document 2.

Document 2

En régime permanent d'écoulement, le fluide R410A subit les transformations suivantes :

- 1 → 2 : le fluide à l'état gazeux sous la pression $P_b = 4,2$ bars et à la température de -12°C subit une compression isentropique jusqu'à la pression $P_h = 22$ bars dans un compresseur ;
- 2 → 3 : le gaz entre dans le condenseur où il subit dans un premier temps un refroidissement isobare selon une désurchauffe, pour atteindre un état de vapeur juste saturante ;
- 3 → 4 : toujours dans le condenseur, le fluide subit une liquéfaction jusqu'au liquide juste saturé à la pression P_h ;
- 4 → 5 : le liquide subit alors un sous-refroidissement isobare jusqu'à la température de 30°C et sort du condenseur ;
- 5 → 6 : le liquide entre dans le détendeur (adiabatique et sans partie mobile) pour y subir une détente jusqu'à la pression P_b ;
- 6 → 7 : le fluide entre dans l'évaporateur pour y subir une vaporisation totale à la pression P_b pour se retrouver sous forme de vapeur juste saturante ;
- 7 → 1 : avant de sortir de l'évaporateur, la vapeur juste saturante subit une surchauffe avant de rentrer dans le compresseur.

Sur le document 1 figurent les deux échangeurs (échangeur 1 et échangeur 2) de la pompe à chaleur : l'un est le condenseur, l'autre est l'évaporateur.

8. Au contact de quelle source doit être mis le condenseur ? Identifier l'échangeur, présent sur le document 1, concerné en justifiant la réponse.

9. Au contact de quelle source doit être mis l'évaporateur ? Identifier l'échangeur, présent sur le document 1, concerné en justifiant la réponse.

10. En appliquant le premier principe à l'écoulement permanent à travers le détendeur, en déduire la nature de la transformation subie par le fluide.

11. La transformation subie par le fluide dans le compresseur est considérée isentropique dans un premier temps. Comment peut-on justifier cette hypothèse ?

On fournit le diagramme enthalpique en annexe (à rendre avec la copie) du fluide *R410A*.

12. A l'aide du document 2, représenter les différents points du cycle effectué par le fluide *R410A* notés de 1 à 7 sur le diagramme fourni en annexe. On précisera le sens d'évolution le long de ce cycle.

13. Sans s'aider des isotitres figurant sur le diagramme fourni, déterminer le titre massique du seul point du cycle dans un état diphasique. Commenter.

14. Déterminer à l'aide du diagramme :

- le travail massique indiqué reçu par le fluide de la part du compresseur ;
- le transfert thermique massique reçu par le fluide à la traversée du condenseur ;
- le transfert thermique massique reçu par le fluide à la traversée de l'évaporateur.

15. Quel est l'intérêt de la surchauffe ?

16. Calculer l'efficacité de la pompe à chaleur fonctionnant avec le fluide *R410A* (on donnera le résultat avec deux chiffres significatifs). Quel est l'intérêt d'une pompe à chaleur par rapport à un chauffage électrique ?

17. En réalité, la transformation subie par le fluide à la traversée du compresseur n'est pas isentropique. L'efficacité réelle vaut 90 % de l'efficacité calculée à la question précédente et le reste du cycle est inchangé. Quelle est alors la température en sortie du compresseur ?

ANNEXE A RENDRE EN FIN D'EPREUVE

