

Devoirs surveillé n° 6
9h00 – 12h00 3 heures

Calculatrice NON autorisée

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

Toutes les interprétations seront comptabilisées

Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.
- Ne pas utiliser de correcteur.
- Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.

Le devoir se compose de 3 problèmes indépendants, dont les parties sont indépendantes entre elles.

1^{er} problème : Chauffage d'une poêle à crêpes par induction

Données :

Force électromotrice : $E = 12 \text{ V}$

Capacité : $C = 100 \text{ nF}$

Inductance propre : $L = 0,25 \text{ mH}$

Résistance $R = 10 \Omega$

Perméabilité magnétique du vide : $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$

Propriétés physiques de la fonte :

- **Perméabilité magnétique relative : $\mu_r = 80$**
- **Conductivité électrique : $\gamma = 1,0 \cdot 10^6 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$**

Plusieurs options sont envisageables pour chauffer les poêles : gaz, résistance chauffante, induction (voir **tableau 1**). Le chauffage par induction permet d'obtenir une bonne saisie de la pâte à crêpes, tout en satisfaisant des exigences de sécurité et en minimisant l'encombrement.

Système / Contrainte	Sécurité	Encombrement	Saisie de la pâte
Gaz	-	-	+
Résistance chauffante	+	-	-
Induction	+	+	+

Tableau 1 . Comparaison des différents modes de chauffage envisagés

Après avoir choisi l'alimentation et l'onduleur, l'objectif de ce problème est de déterminer la nature de la poêle à utiliser.

1 - Onduleur RLC série

Afin de concevoir le module à induction, on choisit une alimentation électrique pouvant fournir 3 A en continu (régime permanent stationnaire) pour une tension maximale de 30 V. De telles puissances nécessitent de dimensionner en conséquence l'onduleur et les câbles, notamment afin d'éviter la détérioration... voire la "cuisson" de composants électroniques !

On étudie un onduleur de tension autonome de période T , à commande symétrique, dont le montage est représenté sur la **figure 2**. Les quatre interrupteurs bidirectionnels K_1 , K_2 , K_3 , K_4 sont supposés idéaux et commandés électriquement de telle façon que :

- pour $nT < t < (n + 1/2)T$, avec $n \in \mathbb{N}$: les interrupteurs K_1 et K_3 sont fermés, les interrupteurs K_2 et K_4 sont ouverts ;
- pour $(n + 1/2)T < t < (n + 1)T$: les interrupteurs K_1 et K_3 sont ouverts, les interrupteurs K_2 et K_4 sont fermés.

Le générateur est une source de tension idéale de force électromotrice E constante. La charge est un circuit RLC série, l'inductance L étant celle de la bobine destinée au chauffage.

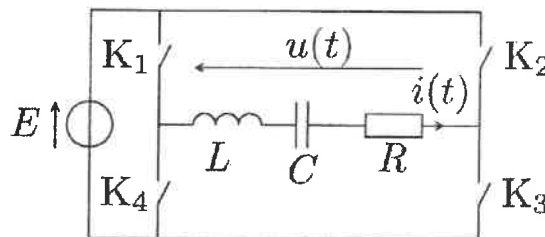


Figure 2 — Onduleur à circuit RLC série : schéma du montage

- Q1.** Rappeler brièvement l'objectif d'un onduleur. Préciser si la charge RLC série est une source de courant ou de tension en justifiant la continuité d'une grandeur électrique dans ce circuit.
- Q2.** Tracer soigneusement la courbe $u(t)$ sur deux périodes.
- Q3.** Écrire l'équation différentielle liant à tout instant t , la tension $u(t)$ et l'intensité du courant $i(t)$ et la mettre sous la forme canonique :

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{di}{dt} + \omega_0^2 i = \frac{1}{L} \frac{du}{dt} \quad (1)$$

On explicitera les expressions de Q (facteur de qualité) et de ω_0 (pulsation propre) en fonction de R , L et C .

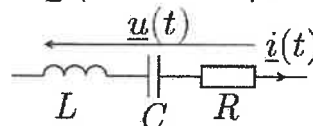


Figure 3 — Association RLC série : analyse fréquentielle

Considérons une tension $u(t)$ sinusoïdale de pulsation ω . On note $\underline{u}(t)$ et $\underline{i}(t)$ les grandeurs complexes respectivement associées aux quantités $u(t)$ et $i(t)$ rappelées sur la **figure 3**. En notant j le nombre complexe tel que $j^2 = -1$, on définit la fonction de transfert :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{i(t)}{\underline{u}(t)} \quad (2)$$

- Q4.** Préciser la dimension de $\underline{H}(j\omega)$, puis l'exprimer en fonction de R , ω , ω_0 et de Q . Caractériser le filtrage réalisé (nature, ordre).
- Q5.** Déterminer littéralement puis numériquement la valeur maximale de G .
- Q6.** Justifier l'intérêt d'ajuster la période du signal de commande afin d'avoir $\omega = \omega_0$. Calculer numériquement la fréquence f associée.

2 - Puissance induite dans la poêle

Le circuit électrique précédent permet de faire parcourir un courant sinusoïdal d'intensité

$$i(t) = I_0 \cos(\omega t) \quad (3)$$

dans une bobine plate enroulée en spirale, schématisée sur la **figure 4**. Le champ magnétique créé par cette distribution de courant est complexe ; on se contente de comprendre le principe du chauffage par induction avec un circuit plus simple : une unique spire circulaire de centre O et de rayon R , parcourue par une intensité $i(t)$. Dans la suite, on travaille dans un système de coordonnées cylindriques (r, θ, z) , muni de la base orthonormée directe $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$.

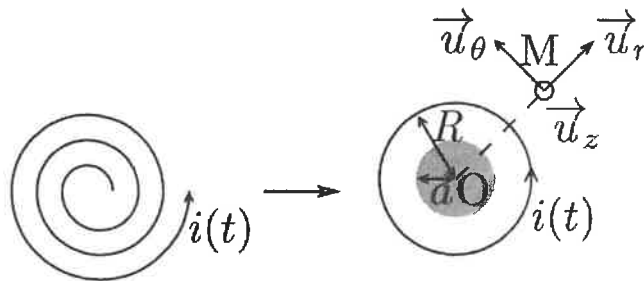


Figure 4 — Bobine : schéma et modélisation

On pose dans le plan de cette spire une poêle, assimilée à un cylindre de rayon $a < R$ et d'épaisseur e , de perméabilité magnétique relative μ_r et de conductivité électrique γ . Dans un souci de simplification, on suppose que le champ magnétique \vec{B} créé par la spire dans la poêle est uniforme. En notant μ_0 la perméabilité magnétique du vide, on donne :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \mu_r i(t)}{2R} \vec{u}_z \quad (4)$$

- Q7.** Rappeler l'équation locale de Maxwell-Faraday. On donne le théorème de Stokes :

$$\oint_{\mathcal{L}} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \iint_S \overrightarrow{rot} \vec{E} \cdot d\vec{S} \quad (5)$$

où S désigne une surface s'appuyant sur le contour fermé \mathcal{L} .

Obtenir une formulation globale de l'équation locale de Maxwell-Faraday.

On cherche le champ électrique induit au sein de la poêle sous la forme $\vec{E} = E(r, t) \vec{u}_\theta$.

- Q8.** Déterminer $E(r,t)$ en fonction de $r, t, R, I_0, \omega, \mu_0$ et de μ_r .
- Q9.** Ce champ électrique induit est responsable de courants de Foucault répartis dans tout le volume du conducteur. Exprimer leur densité de courant volumique \vec{j} en tout point de la poêle, puis la puissance volumique moyenne p dissipée par effet Joule en fonction des données.
- Q10.** En intégrant cette puissance volumique moyenne sur le volume de la poêle, montrer que la puissance moyenne totale induite s'écrit :

$$P_{ind} = \frac{\pi(\mu_0\mu_r)^2\gamma\omega^2 I_0^2 e a^4}{64 R^2} \quad (6)$$

- Q11.** On dispose de poêles en aluminium et en fonte. Bien que l'aluminium soit environ 40 fois plus conducteur électriquement que la fonte, on choisira la poêle en fonte : pourquoi ?

2° problème : Récupération d'or résiduel

Suivant le domaine d'activité, des effluents d'usine traités peuvent contenir de l'or qu'il est économiquement intéressant de récupérer avant l'acheminement vers le décanteur.

Pour cela on détermine dans un premier temps la conductivité σ des effluents à l'aide d'un conductimètre inductif.

Ce capteur est composé de deux bobines toroïdales placées côte à côte. La première bobine, appelée bobine d'excitation, est alimentée par une tension sinusoïdale $u_1(t)$. Sa résistance interne est négligeable et son inductance propre est L_1 . Elle se comporte comme le primaire d'un transformateur dont le circuit secondaire est l'eau qui baigne l'ensemble et que l'on peut assimiler à une boucle conductrice de résistance

R_e , proportionnelle à l'inverse de la conductivité σ de l'eau. Cette boucle se comporte à son tour comme le circuit primaire d'un transformateur dont le secondaire est la seconde bobine, appelée bobine de mesure, de résistance interne négligeable et d'inductance propre L_4 . D'un point de vue électrique, l'ensemble est donc modélisable par le circuit représenté en figure 4, où figure le circuit modélisé par une résistance R_m permettant la mesure de la tension $u_4(t)$ en sortie.

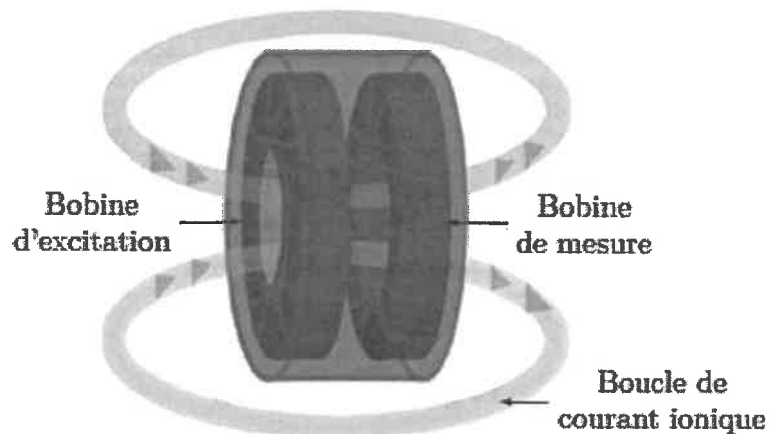


Figure 3 – Schéma d'un conductimètre inductif

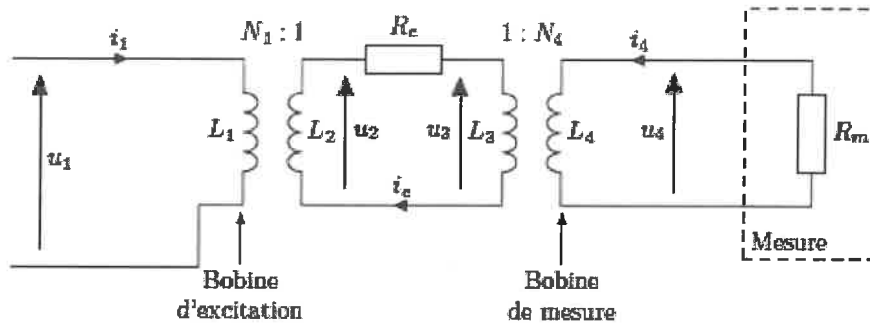


Figure 4 – Schéma électrique équivalent du conductimètre

1- Inductance propre et inductance mutuelle entre deux circuits

On cherche à établir quelques résultats utiles par la suite en considérant deux solénoïdes cylindriques coaxiaux S_a et S_b , de même longueur ℓ , de rayons respectifs r_a et r_b , comportant respectivement N_a et N_b spires. S_a et S_b sont parcourus par des courants notés respectivement i_a et i_b et orientés comme indiqué en figure 5. On admet que les effets de bord sont négligeables, ce qui revient à considérer que S_a et S_b se comportent comme des solénoïdes infinis. L'ensemble baigne dans l'air assimilé à du vide de perméabilité magnétique μ_0 .

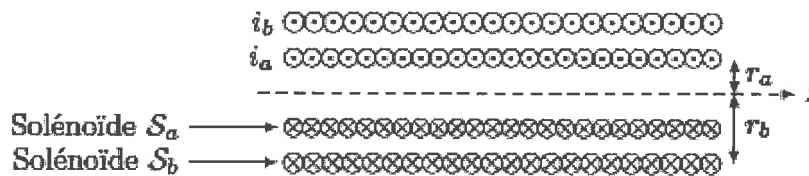


Figure 5 – Schéma en coupe des solénoïdes coaxiaux

On admet que le champ magnétique créé à l'intérieur d'un solénoïde parcouru par un courant i s'écrit $\vec{B} = \mu_0 n i \vec{u}_z$ avec n le nombre de spires par unité de longueur, et que le champ magnétique est nul à l'extérieur du solénoïde.

Q12. Rappeler la définition générale de l'inductance propre L d'un circuit et de l'inductance mutuelle M entre deux circuits.

Q13. Établir l'expression des inductances propres L_a et L_b des solénoïdes S_a et S_b en fonction de N_a , N_b , r_a , r_b , μ_0 et ℓ .

Q14. En admettant qu'il n'y a aucune forme de perte magnétique, établir l'expression de l'inductance mutuelle M entre les solénoïdes S_a et S_b .

Q15. Montrer que l'on a $M = k\sqrt{L_a L_b}$ en donnant l'expression de k en fonction de r_a et r_b .

On considère pour la suite le cas où $r_a = r_b$ pour lequel $k = 1$.

Q16. Montrer que $\frac{L_a}{N_a^2} = \frac{L_b}{N_b^2}$

Les deux solénoïdes S_a et S_b forment le primaire et le secondaire d'un transformateur. On note $u_a(t)$ la tension aux bornes du primaire et $u_b(t)$ la tension aux bornes du secondaire. Les deux tensions sont orientées en convention récepteur.

Q17. En écrivant les équations électriques pour le primaire et le secondaire, montrer que

$$\frac{ua(t)}{Na} = \frac{ub(t)}{Nb}$$

Quel nom donne-t-on à cette loi ?

On admet que les relations démontrées dans la partie précédente sont applicables à tous les transformateurs rencontrés par la suite.

2- Étude de la partie terminale du circuit de mesure

On considère ici la partie terminale du circuit représentée en figure 6, où $u_3(t)$ est une fonction sinusoïdale du temps de pulsation ω et de phase à l'origine nulle. Le solénoïde 3 est formé d'une seule spire et le solénoïde 4 de N_4 spires, notation 1 : N_4 .

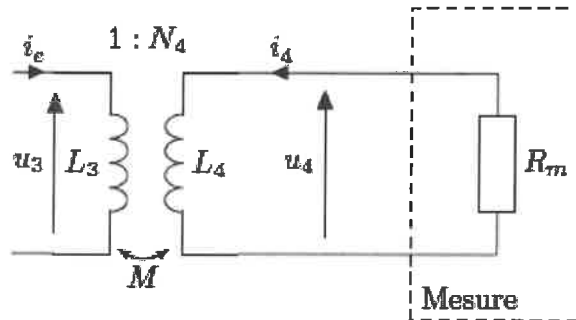


Figure 6 – Schéma électrique de la partie terminale du circuit

Q18. Écrire, en notation complexe, l'expression de $\underline{u}_3(t)$ en fonction de L_3 , M , ω , $\underline{i}_e(t)$ et $\underline{i}_4(t)$

Q19. En déduire la relation $\underline{i}_e = \underline{Y} \cdot \underline{u}_3$ en donnant l'expression de \underline{Y} en fonction de L_3 , N_4 , R_m , M et ω .

Q20. En utilisant les résultats établis dans la partie précédente, montrer qu'on peut réécrire

$$\underline{Y} = \frac{1}{jL_3\omega} + \frac{N_4^2}{R_m}$$

3- Étude du circuit de mesure complet

D'après la relation $\underline{i}_e = \underline{Y} \cdot \underline{u}_3$ établie précédemment, le circuit de mesure complet est équivalent au schéma représenté figure 7 dans lequel $\underline{Z} = 1/\underline{Y}$.

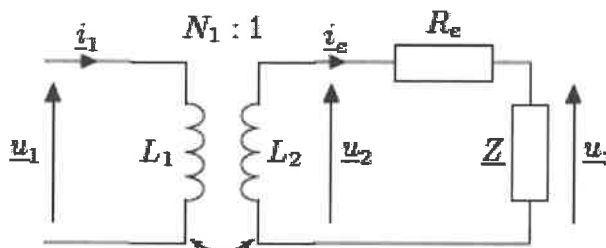


Figure 7 – Schéma électrique équivalent du circuit de mesure complet

Q21. Déterminer la relation entre u_2 , u_3 , R_e et \underline{Y} .

Q22. Montrer à l'aide des résultats précédents que $\underline{u}_1 = -\frac{N_1}{N_4} (1 + Re\underline{Y}) \cdot R_m \underline{i}_4$

Q23. Dans la limite où R_m tend vers 0, montrer que l'intensité $i_4(t)$ tend vers

$$i_{4,\text{lim}}(t) = - \frac{u_1(t)}{N_1 N_4 R_e} \quad \text{Commenter.}$$

4- Traitement chimique de l'eau

Une électrolyse sélective permet de récupérer l'or solide Au(s), par réduction des ions aurocyanure $Au(CN)_2^-$. Le choix du potentiel de la cathode est déterminant et doit être optimisé.

On se propose d'abord de relever la courbe intensité-potential du couple $Au(CN)_2^- / Au(s)$ sur électrode de platine. On réalise alors un montage qui contient un générateur de tension réglable e , un milliampèremètre (mA), un millivoltmètre (mV) et trois électrodes :

- une électrode en platine couverte d'or, aussi dénommée électrode de travail (E.T.), qui travaille ici seulement sur sa branche cathodique. C'est cette électrode qui sera étudiée ;
- une électrode en métal inerte appelée contre électrode (C.E.), qui assure la circulation du courant
- une électrode de référence (E.réf.) de potentiel connu et qui doit être traversée par un courant négligeable.

Q24. Faire le schéma du dispositif expérimental qui permet de relever la courbe intensité-potential du couple $Au(CN)_2^- / Au(s)$ sur électrode de platine.

Q25. Quelle attention particulière faut-il prendre en termes d'impédance quant au choix du millivoltmètre ?

Q26. Préciser la demi-équation rédox qui se produit sur l'électrode de travail en mode cathodique lors de la réduction des ions aurocyanure $Au(CN)_2^-$. Les ions cyanures sont notés CN^- .

Q27. On rappelle que par convention, le courant I est compté positif de l'électrode de travail vers la solution. Préciser, sur votre schéma du dispositif expérimental, comment circule conventionnellement le courant électrique I et préciser son signe.

La **figure 3** représente une partie de la courbe intensité-potential du couple $Au(CN)_2^- / Au(s)$ sur électrode de platine.

On donne $E^\circ(Au(CN)_2^- / Au(s)) = -0,6 \text{ V}$

Q28. Le couple $Au(CN)_2^- / Au(s)$ sur électrode de platine correspond-il à un couple lent ou rapide ? D'un point de vue cinétique, est-il préférable de fortement baisser le potentiel de la cathode en dessous de $-0,6 \text{ V}$ ou non ? Éventuellement, quel est le risque d'imposer une valeur trop faible ?

Q29. L'électrolyse d'un bain est effectuée pendant une durée Δt , en maintenant le potentiel de la cathode à $-1,4 \text{ V}$. On note S la surface de l'électrode de travail et J la densité du courant qui la traverse. On considère le rendement faradique de 100 %. Préciser la valeur numérique de J exprimée en $A \cdot m^{-2}$. Puis, exprimer en fonction de J , S , Δt , de la masse molaire $M(Au(s))$ et de la constante F de Faraday, la masse d'or solide $m(Au(s))$ récupérée.

Q30. Expliquer qualitativement l'impact de la surface S de l'électrode de travail sur le coût énergétique lié à la récupération d'une masse d'or donnée.

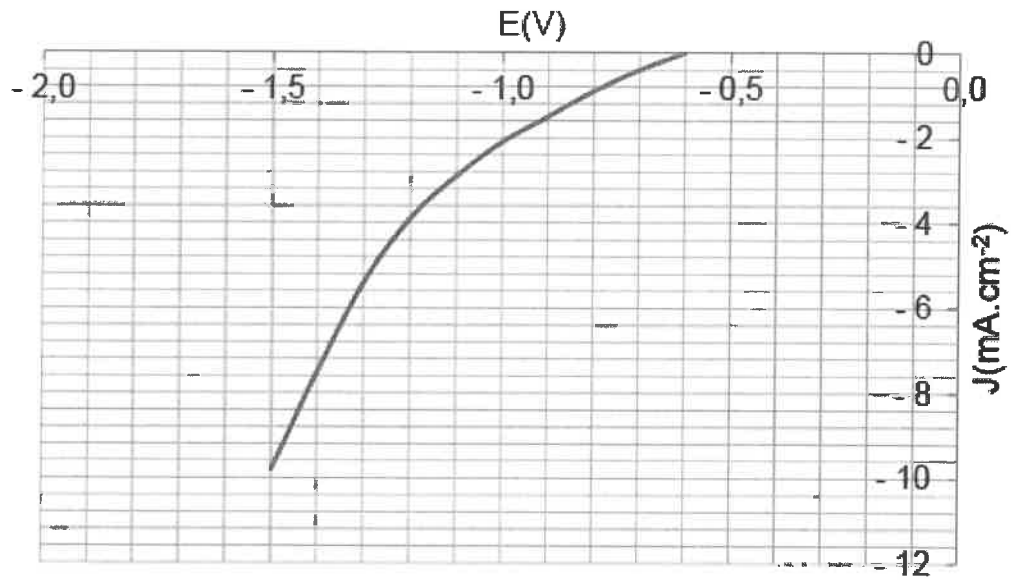


Figure 3 - Courbe intensité-potentiel du couple $\text{Au}(\text{CN})_2^-/\text{Au}(\text{s})$ sur électrode de platine

PAS de Q31

3è problème Machine synchrone

La machine synchrone est constituée d'un rotor en fer massif et d'un stator en fer feuilleté. Le rotor et le stator sont séparés d'un entrefer de très faible largeur. Ce circuit magnétique amplifie et canalise le champ magnétique.

Dans la machine diphasée, le stator se compose de deux enroulements décalés spatialement d'un angle de $\frac{\pi}{2}$.

On s'intéresse ici à un seul des deux enroulements du stator.

On a représenté, sur la **figure 7**, les lignes de champ magnétique \vec{B} créé par une spire du stator, de vecteur normal \vec{n}_1 , parcourue par un courant $i_1(t)$. La spire est représentée en coupe par son conducteur " aller " et son conducteur " retour ".

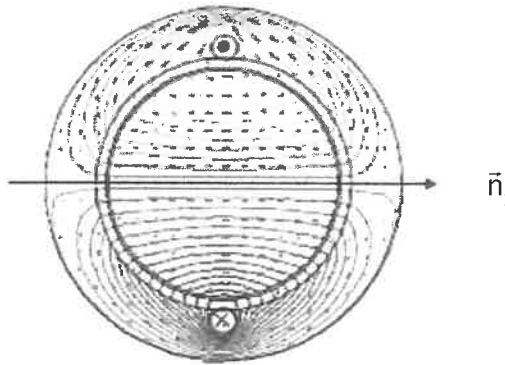


Figure 7 - Champ magnétique créé par une spire d'un enroulement du stator

Q32. La norme du champ magnétique est-elle uniforme dans le circuit magnétique ? Sinon, préciser les zones où le champ magnétique est le plus intense et est le moins intense.

L'air est assimilé magnétiquement à du vide de perméabilité magnétique μ_0 . Le fer est assimilé à un matériau magnétique linéaire homogène de perméabilité magnétique relative μ_r . On désigne par e la largeur de l'entrefer et L_{fer} la longueur moyenne d'une ligne de champ dans le fer. Par construction de la machine, on a $\mu_r e \gg L_{\text{fer}}$. La ligne de champ, de longueur L_{fer} dans le fer, est qualifiée de ligne de champ moyenne.

Q33. Pour la ligne de champ moyenne, on note H_{air} et H_{fer} les normes du champ d'excitation magnétique dans l'air (entrefer) et dans le fer. Ces normes sont supposées uniformes le long de cette ligne de champ. Par application du théorème d'Ampère, relier H_{air} , H_{fer} , e , L_{fer} et $i_1(t)$.

Pour la ligne de champ moyenne, on note B_{air} et B_{fer} les normes du champ magnétique dans l'air (entrefer) et dans le fer. Par conservation du flux, on montre que B_{air} et B_{fer} sont très voisins. On assimile ces deux normes à une valeur commune notée B .

Q34. Déterminer l'expression de B en fonction de $i_1(t)$, de e et de μ_0 .

Par la suite, on considère que la norme du champ magnétique B est uniforme dans l'entrefer. On désigne par $\vec{B}_{\text{spire}}(\theta, t) = B_{\text{spire}}(\theta, t)\vec{e}_r$, le champ magnétique créé par cette spire en un point M de l'entrefer repéré (**figure 8**) par sa position θ .

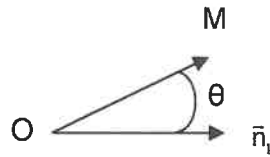


Figure 8 - Repérage de l'entrefer

Q35. Représenter graphiquement en fonction de θ , l'allure de $B_{\text{spire}}(\theta, t)$ pour $i_1(t) > 0$ et $\theta \in [-\pi, \pi]$.

L'enroulement considéré du stator, parcouru par le courant $i_1(t)$, n'est pas constitué d'une seule spire mais de trois spires décalées les unes des autres d'un angle α , comme le montre la **figure 9**. Ces trois spires sont représentées en coupe par trois conducteurs " aller " et trois conducteurs " retour ".

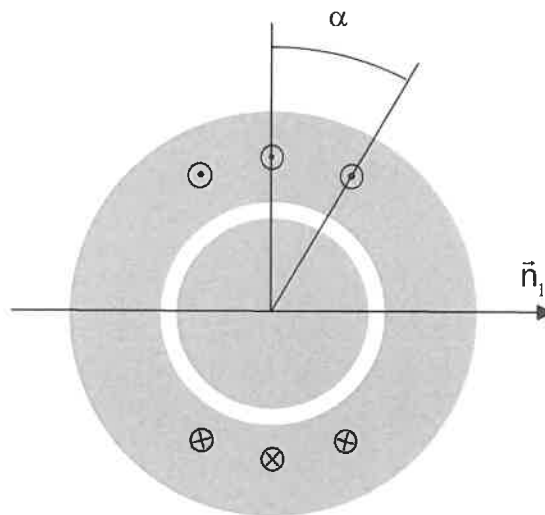


Figure 9 - Enroulement à trois spires décalées

On désigne par $\vec{B}_1(\theta, t) = B_1(\theta, t)\vec{e}_r$, le champ magnétique créé par l'enroulement du stator à trois spires décalées.

Q36. Représenter graphiquement, en fonction de θ , l'allure de la fonction $B_1(\theta, t)$ pour $i_1(t) > 0$ et $\theta \in [-\pi, \pi]$. On prendra $\alpha \approx \frac{\pi}{6}$.

Dans la suite, on admettra que cet enroulement du stator crée dans l'entrefer un champ magnétique $\vec{B}_1(\theta, t) = K i_1(t) \cos(\theta)\vec{e}_r$ et que le second enroulement, parcouru par un courant $i_2(t)$, crée dans l'entrefer un champ magnétique $\vec{B}_2(\theta, t) = K i_2(t) \sin(\theta)\vec{e}_r$.

Une alimentation électrique de pulsation ω_s impose des courants $i_1(t)$ et $i_2(t)$ de la forme :

$$\begin{cases} i_1(t) = I_{\text{max}} \cos(\omega_s t) \\ i_2(t) = I_{\text{max}} \sin(\omega_s t) \end{cases}$$

- Q37.** Déterminer l'expression du champ magnétique \vec{B}_s créé par le stator dans l'entrefer. On posera : $B_{s0} = K I_{max}$.
Justifier que ce champ magnétique \vec{B}_s est un champ tournant à la vitesse angulaire $\vec{\omega}$ qu'on précisera.

Le rotor tourne à la vitesse angulaire $\vec{\Omega} = \Omega \vec{e}_z$. Il possède une bobine comportant plusieurs spires bien réparties. Elle est alimentée par l'intermédiaire d'un contacteur tournant, relié à une source de courant continu I_R . Il crée un champ en un point M repéré par l'angle θ dans l'entrefer :

$$\vec{B}_R(\theta, t) = K_R I_R \cos(\theta_R(t) - \theta) \vec{e}_r = B_{r0} \cos(\theta_R(t) - \theta) \vec{e}_r$$

où $\theta_R(t)$ désigne la position du rotor. On a : $\theta_R(t) = \Omega t + \theta_0$.

- Q38.** Exprimer l'énergie magnétique W_m stockée dans l'entrefer à l'aide d'une intégrale qu'on ne demande pas d'intégrer et faisant intervenir \vec{B}_s et \vec{B}_R .

On admettra, en ne conservant que les termes qui varient le plus lentement avec le temps, que :

$$W_m = \frac{R_e L_e e}{2\mu_0} (\pi B_{s0}^2 + \pi B_{r0}^2 + 2\pi B_{r0} B_{s0} \cos(\omega_s t - \theta_R(t))).$$

- Q39.** Préciser l'unité du produit $R_e L_e e$ et indiquer à quels paramètres du système correspondent chacun des deux termes : R_e et L_e .

On note $\vec{\Gamma} = \Gamma_z(t) \vec{e}_z$, le couple électromagnétique exercé sur le rotor. On rappelle que $\Gamma_z(t) = \frac{\partial W_m}{\partial \theta_R}$.

- Q40.** Préciser l'expression de $\Gamma_z(t)$ en fonction de R_e , L_e , e , μ_0 , B_{r0} , B_{s0} , Ω , ω_s et de θ_0 .

La machine synchrone peut fonctionner en moteur ou en alternateur.

- Q41.** On considère que ω_s est fixé par le réseau électrique extérieur. À quelle condition sur Ω , le couple moyen est-il non nul ? Comment appelle-t-on cette condition ? Préciser, en fonction de R_e , L_e , e , μ_0 , B_{r0} , B_{s0} , et de θ_0 , l'expression de ce couple moyen.

- Q42.** On suppose que cette condition est respectée. À quelle condition sur θ_0 a-t-on un fonctionnement alternateur ? Un fonctionnement moteur stable ?