

**Devoirs surveillé n° 6**  
**9h00 – 12h00 3 heures**

**Calculatrice NON autorisée**

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

Toutes les interprétations seront comptabilisées

Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

**RAPPEL DES CONSIGNES**

- Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.
- Ne pas utiliser de correcteur.
- Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.

**Le devoir se compose de 3 problèmes indépendants, dont les parties sont indépendantes entre elles.**

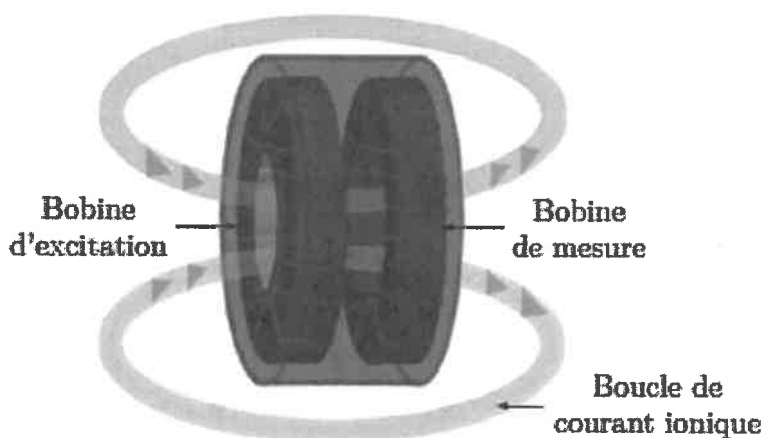
**1<sup>er</sup> problème : Récupération d'or résiduel**

Suivant le domaine d'activité, des effluents d'usine traités peuvent contenir de l'or qu'il est économiquement intéressant de récupérer avant l'acheminement vers le décanteur.

Pour cela on détermine dans un premier temps la conductivité  $\sigma$  des effluents à l'aide d'un conductimètre inductif.

Ce capteur est composé de deux bobines toroïdales placées côte à côte. La première bobine, appelée bobine d'excitation, est alimentée par une tension sinusoïdale  $u_1(t)$ . Sa résistance interne est négligeable et son inductance propre est  $L_1$ . Elle se comporte comme le primaire d'un transformateur dont le circuit secondaire est l'eau qui baigne l'ensemble et que l'on peut assimiler à une boucle conductrice de résistance

$R_e$ , proportionnelle à l'inverse de la conductivité  $\sigma$  de l'eau. Cette boucle se comporte à son tour comme le circuit primaire d'un transformateur dont le secondaire est la seconde bobine, appelée bobine de mesure, de résistance interne négligeable et d'inductance propre  $L_4$ . D'un point de vue électrique, l'ensemble est donc modélisable par le circuit représenté en figure 4, où figure le circuit modélisé par une résistance  $R_m$  permettant la mesure de la tension  $u_4(t)$  en sortie.



**Figure 3 – Schéma d'un conductimètre inductif**

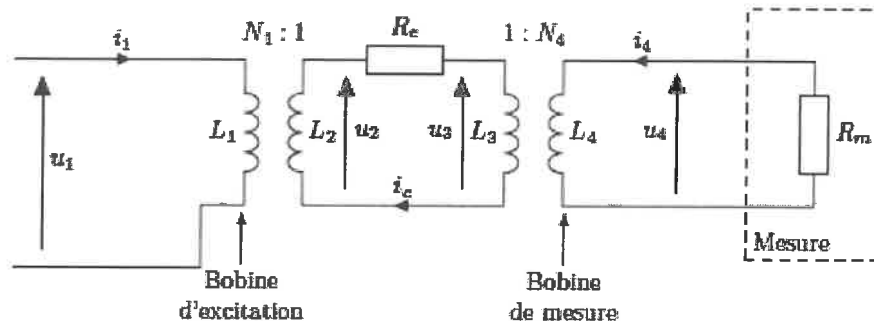


Figure 4 – Schéma électrique équivalent du conductimètre

### 1- Inductance propre et inductance mutuelle entre deux circuits

On cherche à établir quelques résultats utiles par la suite en considérant deux solénoïdes cylindriques coaxiaux  $S_a$  et  $S_b$ , de même longueur  $\ell$ , de rayons respectifs  $r_a$  et  $r_b$ , comportant respectivement  $N_a$  et  $N_b$  spires.  $S_a$  et  $S_b$  sont parcourus par des courants notés respectivement  $i_a$  et  $i_b$  et orientés comme indiqué en figure 5. On admet que les effets de bord sont négligeables, ce qui revient à considérer que  $S_a$  et  $S_b$  se comportent comme des solénoïdes infinis. L'ensemble baigne dans l'air assimilé à du vide de perméabilité magnétique  $\mu_0$ .

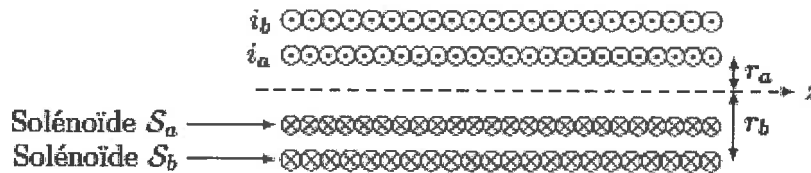


Figure 5 – Schéma en coupe des solénoïdes coaxiaux

On admet que le champ magnétique créé à l'intérieur d'un solénoïde parcouru par un courant  $i$  s'écrit  $\vec{B} = \mu_0 n i \vec{u}_z$  avec  $n$  le nombre de spires par unité de longueur, et que le champ magnétique est nul à l'extérieur du solénoïde.

**Q1.** Rappeler la définition générale de l'inductance propre  $L$  d'un circuit et de l'inductance mutuelle  $M$  entre deux circuits.

**Q2.** Établir l'expression des inductances propres  $L_a$  et  $L_b$  des solénoïdes  $S_a$  et  $S_b$  en fonction de  $N_a$ ,  $N_b$ ,  $r_a$ ,  $r_b$ ,  $\mu_0$  et  $\ell$ .

**Q3.** En admettant qu'il n'y a aucune forme de perte magnétique, établir l'expression de l'inductance mutuelle  $M$  entre les solénoïdes  $S_a$  et  $S_b$ .

**Q4.** Montrer que l'on a  $M = k\sqrt{L_a L_b}$  en donnant l'expression de  $k$  en fonction de  $r_a$  et  $r_b$ .

On considère pour la suite le cas où  $r_a = r_b$  pour lequel  $k = 1$ .

**Q5.** Montrer que  $\frac{L_a}{N_a^2} = \frac{L_b}{N_b^2}$

Les deux solénoïdes  $S_a$  et  $S_b$  forment le primaire et le secondaire d'un transformateur. On note  $u_a(t)$  la tension aux bornes du primaire et  $u_b(t)$  la tension aux bornes du secondaire. Les deux tensions sont orientées en convention récepteur.

Q6. En écrivant les équations électriques pour le primaire et le secondaire, montrer que 
$$\frac{ua(t)}{Na} = \frac{ub(t)}{Nb}$$

Quel nom donne-t-on à cette loi ?

On admet que les relations démontrées dans la partie précédente sont applicables à tous les transformateurs rencontrés par la suite.

### 2- Étude de la partie terminale du circuit de mesure

On considère ici la partie terminale du circuit représentée en figure 6, où  $u_3(t)$  est une fonction sinusoïdale du temps de pulsation  $\omega$  et de phase à l'origine nulle. Le solénoïde 3 est formé d'une seule spire et le solénoïde 4 de  $N_4$  spires, notation 1 :  $N_4$ .

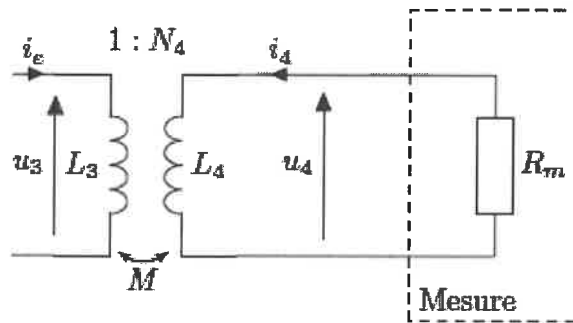


Figure 6 – Schéma électrique de la partie terminale du circuit

Q7. Écrire, en notation complexe, l'expression de  $\underline{u}_3(t)$  en fonction de  $L_3$ ,  $M$ ,  $\omega$ ,  $\underline{i}_\varepsilon(t)$  et  $\underline{i}_4(t)$

Q8. En déduire la relation  $\underline{i}_\varepsilon = \underline{Y} \cdot \underline{u}_3$  en donnant l'expression de  $\underline{Y}$  en fonction de  $L_3$ ,  $N_4$ ,  $R_m$ ,  $M$  et  $\omega$ .

Q9. En utilisant les résultats établis dans la partie précédente, montrer qu'on peut réécrire

$$\underline{Y} = \frac{1}{jL_3\omega} + \frac{N_4^2}{R_m}$$

### 3- Étude du circuit de mesure complet

D'après la relation  $\underline{i}_\varepsilon = \underline{Y} \cdot \underline{u}_3$  établie précédemment, le circuit de mesure complet est équivalent au schéma représenté figure 7 dans lequel  $\underline{Z} = 1/\underline{Y}$ .

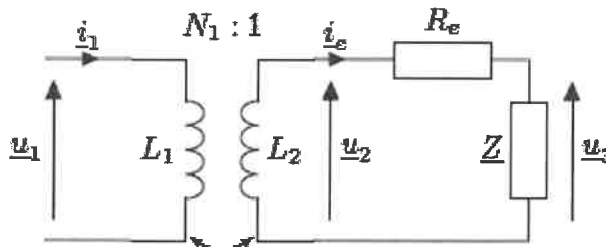


Figure 7 – Schéma électrique équivalent du circuit de mesure complet

Q10. Déterminer la relation entre  $u_2$ ,  $u_3$ ,  $R_e$  et  $\underline{Y}$ .

Q11. Montrer à l'aide des résultats précédents que  $\underline{u}_1 = -\frac{N_1}{N_4} (1 + Re\underline{Y}) \cdot R_m \underline{i}_4$

**Q12.** Dans la limite où  $R_m$  tend vers 0, montrer que l'intensité  $i_4(t)$  tend vers

$$i_{4,\text{lim}}(t) = - \frac{u_1(t)}{N_1 N_4 R_e} \quad \text{Commenter.}$$

#### 4- Traitement chimique de l'eau

Une électrolyse sélective permet de récupérer l'or solide Au(s), par réduction des ions aurocyanure  $Au(CN)_2^-$ . Le choix du potentiel de la cathode est déterminant et doit être optimisé.

On se propose d'abord de relever la courbe intensité-potential du couple  $Au(CN)_2^- / Au(s)$  sur électrode de platine. On réalise alors un montage qui contient un générateur de tension réglable  $e$ , un milliampèremètre (mA), un millivoltmètre (mV) et trois électrodes :

- une électrode en platine couverte d'or, aussi dénommée électrode de travail (E.T.), qui travaille ici seulement sur sa branche cathodique. C'est cette électrode qui sera étudiée ;
- une électrode en métal inerte appelée contre électrode (C.E.), qui assure la circulation du courant
- une électrode de référence (E.réf.) de potentiel connu et qui doit être traversée par un courant négligeable.

**Q13.** Faire le schéma du dispositif expérimental qui permet de relever la courbe intensité-potential du couple  $Au(CN)_2^- / Au(s)$  sur électrode de platine.

**Q14.** Quelle attention particulière faut-il prendre en termes d'impédance quant au choix du millivoltmètre ?

**Q15.** Préciser la demi-équation rédox qui se produit sur l'électrode de travail en mode cathodique lors de la réduction des ions aurocyanure  $Au(CN)_2^-$ . Les ions cyanures sont notés CN $^-$ .

**Q16.** On rappelle que par convention, le courant  $I$  est compté positif de l'électrode de travail vers la solution. Préciser, sur votre schéma du dispositif expérimental, comment circule conventionnellement le courant électrique  $I$  et préciser son signe.

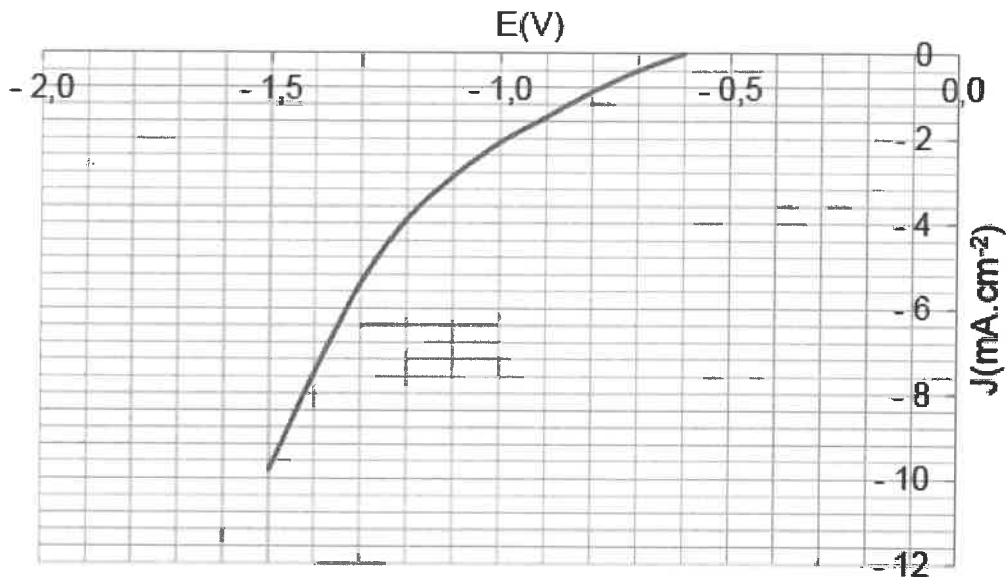
La **figure 3** représente une partie de la courbe intensité-potential du couple  $Au(CN)_2^- / Au(s)$  sur électrode de platine.

On donne  $E^\circ(Au(CN)_2^- / Au(s)) = -0,6 \text{ V}$

**Q17.** Le couple  $Au(CN)_2^- / Au(s)$  sur électrode de platine correspond-il à un couple lent ou rapide ? D'un point de vue cinétique, est-il préférable de fortement baisser le potentiel de la cathode en dessous de  $-0,6 \text{ V}$  ou non ? Éventuellement, quel est le risque d'imposer une valeur trop faible ?

**Q18.** L'électrolyse d'un bain est effectuée pendant une durée  $\Delta t$ , en maintenant le potentiel de la cathode à  $-1,4 \text{ V}$ . On note  $S$  la surface de l'électrode de travail et  $J$  la densité du courant qui la traverse. On considère le rendement faradique de 100 %. Préciser la valeur numérique de  $J$  exprimée en  $A \cdot m^{-2}$ . Puis, exprimer en fonction de  $J$ ,  $S$ ,  $\Delta t$ , de la masse molaire  $M(Au(s))$  et de la constante  $F$  de Faraday, la masse d'or solide  $m(Au(s))$  récupérée.

**Q19.** Expliquer qualitativement l'impact de la surface  $S$  de l'électrode de travail sur le coût énergétique lié à la récupération d'une masse d'or donnée.



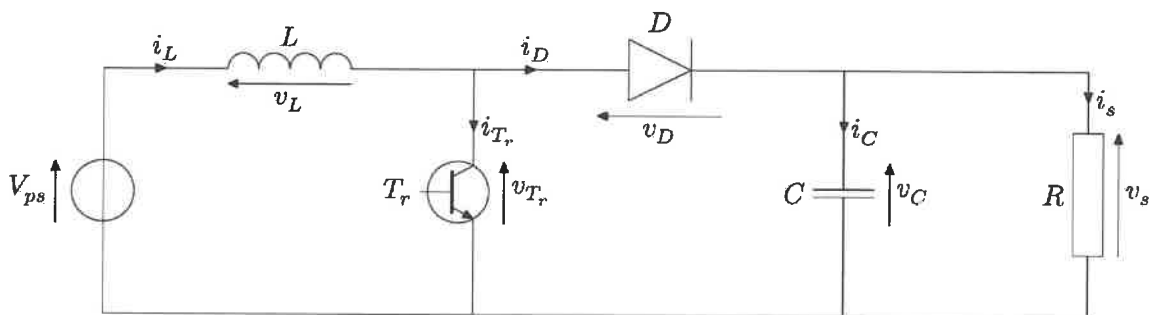
**Figure 3 -** Courbe intensité-potential du couple  $\text{Au}(\text{CN})_2^-/\text{Au}_{(s)}$  sur électrode de platine

### 2è problème : Conversion de puissance

La tension  $V_{ps}$  fournie par des panneaux solaires ne permet pas de recharger directement une batterie de tension 350 V. Un régulateur MPPT (Maximum Power Point Tracking) constitué d'un convertisseur électronique DC/DC a pour rôle d'optimiser les valeurs des paramètres électriques de fonctionnement entre le système photovoltaïque et la batterie. Le champ d'application de ces convertisseurs est large ; on étudie ici un hacheur parallèle (convertisseur Boost) dont le schéma de principe est donné en figure 13.

Ce système est composé principalement d'une bobine d'inductance  $L$  et de deux interrupteurs  $T_r$  et  $D$  considérés comme idéaux. Le conducteur ohmique de résistance  $R$  modélise la batterie à charger. Un signal rectangulaire périodique de période  $T$  commande l'interrupteur  $T_r$ . Selon l'état des deux interrupteurs, on peut distinguer deux phases de fonctionnement :

- la phase active, de durée  $\alpha T$ , lorsque l'interrupteur  $T_r$  est fermé et l'interrupteur  $D$  est ouvert ; le coefficient  $\alpha$  désigne le rapport cyclique ;
- la phase de roue libre, de durée  $(1 - \alpha)T$ , lorsque l'interrupteur  $T_r$  est ouvert et l'interrupteur  $D$  est fermé.



**Figure 13** Schéma de principe d'un convertisseur Boost

Dans l'étude qui suit, nous faisons les hypothèses suivantes :

- le régime périodique est établi ;
- la tension d'alimentation  $V_{ps}$  est continue et constante ;
- la valeur de la capacité  $C$  est suffisamment grande afin de pouvoir considérer la tension de sortie  $v_s$  comme supérieure à  $V_{ps}$ .

### 1) Phase active $0 \leq t < \alpha T$

**Q 20.** On admet que  $v_s > 0$ . Justifier que la diode est bloquée. Représenter alors le schéma du circuit équivalent pour cette phase active supposée débiter à l'instant  $t = 0$ .

**Q 21.** En déduire l'expression de  $i_L(t)$  avec pour condition initiale  $i_L(t = 0) = i_{L,\min}$ .

**Q 22.** Indiquer le temps caractéristique associé à l'ensemble résistance-condensateur. En déduire une condition sur  $C$  pour que la tension  $v_s$  puisse être considérée comme constante.

### 2) Phase de roue libre $\alpha T \leq t < T$

**Q 23.** Représenter le schéma équivalent du convertisseur Boost durant la phase de roue libre.

**Q 24.** On pose  $i_L(t = \alpha T) = i_{L,\max}$ . En déduire l'expression de  $i_L(t)$  en fonction de  $V_{ps}$ ,  $v_s$ ,  $L$ ,  $\alpha T$  et  $i_{L,\max}$ .

### 3) Valeurs moyennes sur une période

**Q 25.** Déterminer deux expressions distinctes de la valeur de l'ondulation de l'intensité  $i_{L,\max} - i_{L,\min}$ , en fonction de  $\alpha$ ,  $T$ ,  $L$ ,  $V_{ps}$  et  $v_s$ .

**Q 26.** Représenter l'allure de l'évolution de l'intensité  $i_L(t)$  sur une durée de deux périodes.

**Q 27.** En déduire  $\langle v_L(t) \rangle$  et  $\langle v_s(t) \rangle$ , les valeurs moyennes sur une période des tensions  $v_L(t)$  et  $v_s(t)$ , en fonction de  $V_{ps}$  et  $\alpha$ .

**Q 28.** Justifier la dénomination de hacheur-survolteur associée au convertisseur Boost. Déterminer la valeur du rapport cyclique  $\alpha$  pour permettre la recharge de la batterie étudiée si la tension aux bornes de l'association des panneaux solaires est de 72 V.

**(Pas de Q 29 à 31)**

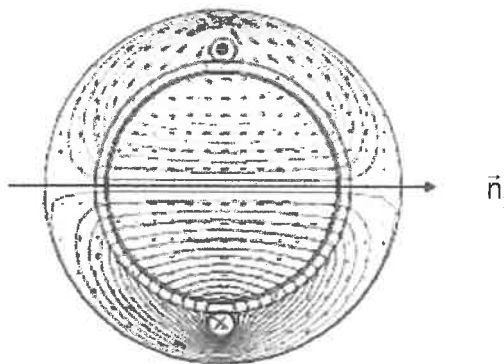
### 3è problème Machine synchrone

La machine synchrone est constituée d'un rotor en fer massif et d'un stator en fer feuilleté. Le rotor et le stator sont séparés d'un entrefer de très faible largeur. Ce circuit magnétique amplifie et canalise le champ magnétique.

Dans la machine diphasée, le stator se compose de deux enroulements décalés spatialement d'un angle de  $\frac{\pi}{2}$ .

On s'intéresse ici à un seul des deux enroulements du stator.

On a représenté, sur la **figure 7**, les lignes de champ magnétique  $\vec{B}$  créé par une spire du stator, de vecteur normal  $\vec{n}_1$ , parcourue par un courant  $i_1(t)$ . La spire est représentée en coupe par son conducteur " aller " et son conducteur " retour ".



**Figure 7** - Champ magnétique créé par une spire d'un enroulement du stator

**Q32.** La norme du champ magnétique est-elle uniforme dans le circuit magnétique ? Sinon, préciser les zones où le champ magnétique est le plus intense et est le moins intense.

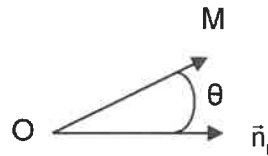
L'air est assimilé magnétiquement à du vide de perméabilité magnétique  $\mu_0$ . Le fer est assimilé à un matériau magnétique linéaire homogène de permittivité magnétique relative  $\mu_r$ . On désigne par  $e$  la largeur de l'entrefer et  $L_{\text{fer}}$  la longueur moyenne d'une ligne de champ dans le fer. Par construction de la machine, on a  $\mu_r e \gg L_{\text{fer}}$ . La ligne de champ, de longueur  $L_{\text{fer}}$  dans le fer, est qualifiée de ligne de champ moyenne.

**Q33.** Pour la ligne de champ moyenne, on note  $H_{\text{air}}$  et  $H_{\text{fer}}$  les normes du champ d'excitation magnétique dans l'air (entrefer) et dans le fer. Ces normes sont supposées uniformes le long de cette ligne de champ. Par application du théorème d'Ampère, relier  $H_{\text{air}}$ ,  $H_{\text{fer}}$ ,  $e$ ,  $L_{\text{fer}}$  et  $i_1(t)$ .

Pour la ligne de champ moyenne, on note  $B_{\text{air}}$  et  $B_{\text{fer}}$  les normes du champ magnétique dans l'air (entrefer) et dans le fer. Par conservation du flux, on montre que  $B_{\text{air}}$  et  $B_{\text{fer}}$  sont très voisins. On assimile ces deux normes à une valeur commune notée  $B$ .

**Q34.** Déterminer l'expression de  $B$  en fonction de  $i_1(t)$ , de  $e$  et de  $\mu_0$ .

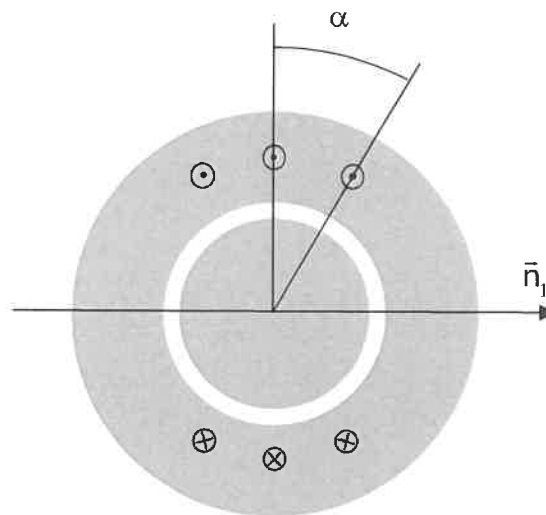
Par la suite, on considère que la norme du champ magnétique  $B$  est uniforme dans l'entrefer. On désigne par  $\vec{B}_{\text{spire}}(\theta, t) = B_{\text{spire}}(\theta, t)\vec{e}_r$ , le champ magnétique créé par cette spire en un point  $M$  de l'entrefer repéré (**figure 8**) par sa position  $\theta$ .



**Figure 8** - Repérage de l'entrefer

**Q35.** Représenter graphiquement en fonction de  $\theta$ , l'allure de  $B_{\text{spire}}(\theta, t)$  pour  $i_1(t) > 0$  et  $\theta \in [-\pi, \pi]$ .

L'enroulement considéré du stator, parcouru par le courant  $i_1(t)$ , n'est pas constitué d'une seule spire mais de trois spires décalées les unes des autres d'un angle  $\alpha$ , comme le montre la **figure 9**. Ces trois spires sont représentées en coupe par trois conducteurs " aller " et trois conducteurs " retour ".



**Figure 9** - Enroulement à trois spires décalées

On désigne par  $\vec{B}_1(\theta, t) = B_1(\theta, t)\vec{e}_r$ , le champ magnétique créé par l'enroulement du stator à trois spires décalées.

**Q36.** Représenter graphiquement, en fonction de  $\theta$ , l'allure de la fonction  $B_1(\theta, t)$  pour  $i_1(t) > 0$  et  $\theta \in [-\pi, \pi]$ . On prendra  $\alpha \approx \frac{\pi}{6}$ .

Dans la suite, on admettra que cet enroulement du stator crée dans l'entrefer un champ magnétique  $\vec{B}_1(\theta, t) = K i_1(t) \cos(\theta)\vec{e}_r$  et que le second enroulement, parcouru par un courant  $i_2(t)$ , crée dans l'entrefer un champ magnétique  $\vec{B}_2(\theta, t) = K i_2(t) \sin(\theta)\vec{e}_r$ .

Une alimentation électrique de pulsation  $\omega_s$  impose des courants  $i_1(t)$  et  $i_2(t)$  de la forme :

$$\begin{cases} i_1(t) = I_{\text{max}} \cos(\omega_s t) \\ i_2(t) = I_{\text{max}} \sin(\omega_s t) \end{cases}$$

- Q37.** Déterminer l'expression du champ magnétique  $\vec{B}_s$  créé par le stator dans l'entrefer. On posera :  $B_{s0} = KI_{max}$ .  
Justifier que ce champ magnétique  $\vec{B}_s$  est un champ tournant à la vitesse angulaire  $\vec{\omega}$  qu'on précisera.

Le rotor tourne à la vitesse angulaire  $\vec{\Omega} = \Omega \vec{e}_z$ . Il possède une bobine comportant plusieurs spires bien réparties. Elle est alimentée par l'intermédiaire d'un contacteur tournant, relié à une source de courant continu  $I_R$ . Il crée un champ en un point M repéré par l'angle  $\theta$  dans l'entrefer :

$$\vec{B}_R(\theta, t) = K_R I_R \cos(\theta_R(t) - \theta) \vec{e}_r = B_{r0} \cos(\theta_R(t) - \theta) \vec{e}_r$$

où  $\theta_R(t)$  désigne la position du rotor. On a :  $\theta_R(t) = \Omega t + \theta_0$ .

- Q38.** Exprimer l'énergie magnétique  $W_m$  stockée dans l'entrefer à l'aide d'une intégrale qu'on ne demande pas d'intégrer et faisant intervenir  $\vec{B}_s$  et  $\vec{B}_R$ .

On admettra, en ne conservant que les termes qui varient le plus lentement avec le temps, que :

$$W_m = \frac{R_e L_e e}{2\mu_0} (\pi B_{s0}^2 + \pi B_{r0}^2 + 2\pi B_{r0} B_{s0} \cos(\omega_s t - \theta_R(t))).$$

- Q39.** Préciser l'unité du produit  $R_e L_e e$  et indiquer à quels paramètres du système correspondent chacun des deux termes :  $R_e$  et  $L_e$ .

On note  $\vec{\Gamma} = \Gamma_z(t) \vec{e}_z$ , le couple électromagnétique exercé sur le rotor. On rappelle que  $\Gamma_z(t) = \frac{\partial W_m}{\partial \theta_R}$ .

- Q40.** Préciser l'expression de  $\Gamma_z(t)$  en fonction de  $R_e$ ,  $L_e$ ,  $e$ ,  $\mu_0$ ,  $B_{r0}$ ,  $B_{s0}$ ,  $\Omega$ ,  $\omega_s$  et de  $\theta_0$ .

La machine synchrone peut fonctionner en moteur ou en alternateur.

- Q41.** On considère que  $\omega_s$  est fixé par le réseau électrique extérieur. À quelle condition sur  $\Omega$ , le couple moyen est-il non nul ? Comment appelle-t-on cette condition ? Préciser, en fonction de  $R_e$ ,  $L_e$ ,  $e$ ,  $\mu_0$ ,  $B_{r0}$ ,  $B_{s0}$ , et de  $\theta_0$ , l'expression de ce couple moyen.

- Q42.** On suppose que cette condition est respectée. À quelle condition sur  $\theta_0$  a-t-on un fonctionnement alternateur ? Un fonctionnement moteur stable ?