

Devoirs surveillé n° 1 8h00 – 12h00 4 heures

Calculatrice NON autorisée

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

Toutes les interprétations seront comptabilisées

Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.
- Ne pas utiliser de correcteur.
- Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.

Un document réponse est à rendre avec la copie

Donnée :

$$2\cos a \cdot \cos b = \cos(a+b) + \cos(a-b)$$

Le devoir se compose de 3 problèmes indépendants, dont les parties sont indépendantes entre elles.

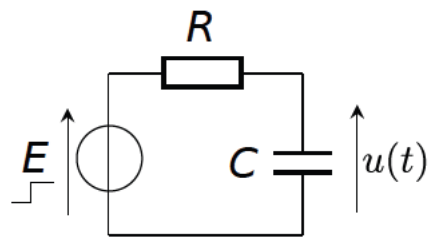
Premier problème : Mesure de la capacité d'un condensateur

Parmi les méthodes classiques de mesure de capacité, nous en étudions deux.

1. Méthode 1 : charge d'un circuit RC

On considère le circuit ci-contre.

Pour $t < 0$, le condensateur est déchargé, et le générateur de tension délivre une tension nulle. Pour $t \geq 0$, le générateur délivre une tension constante $E = 10 \text{ V}$.



Premier modèle

Q1 - Établir l'équation différentielle suivie par la tension $u(t)$ aux bornes du condensateur, pour $t \geq 0$. On notera τ le temps caractéristique $R \times C$.

Q2 - Résoudre cette équation pour obtenir l'expression de $u(t)$.

Q3 - L'acquisition de la figure III.6 sur le document réponse a été réalisée avec une résistance $R = 1\text{k}\Omega$. L'exploiter afin d'en déduire la valeur de C . On détaillera la démarche et on notera les informations pertinentes de l'oscillogramme sur le document réponse.

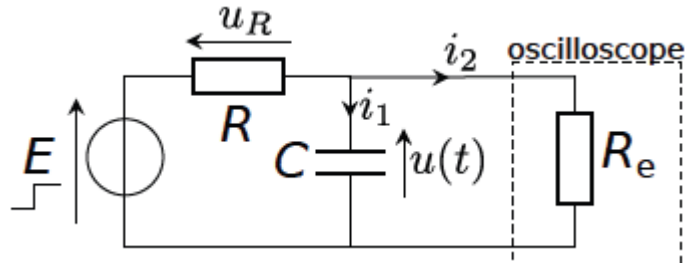
Pour plus de précision, on répète la mesure avec différentes valeurs de la résistance R . On garde toujours la même capacité C . Le tracé du temps caractéristique, mesuré à l'aide de l'oscilloscope, en fonction de R , est représenté sur le document réponse figure III.7 (gauche).

Q4 - Expliquer en quoi le graphique de gauche n'est pas en accord avec la modélisation précédente du circuit RC.

De même, quelle particularité du graphique de droite le rend incompatible avec cette modélisation ?

Second modèle

Pour tenter d'améliorer le modèle et de rendre compte de la figure III.7, on prend en compte la résistance d'entrée de l'oscilloscope, $R_e = 1\text{M}\Omega$. Ceci donne le circuit ci-contre.



Q5. Exprimer le courant i_1 en fonction de u et/ou de sa dérivée temporelle, et de grandeurs parmi R , R_e et C .

Faire de même pour le courant i_2 .

Enfin, faire de même pour la tension u_R .

Q6. À l'aide d'une loi des mailles, montrer que la tension $u(t)$ vérifie :

$$\frac{E}{RC} = \frac{du}{dt} + \frac{u}{\tau'}$$

Avec τ' à exprimer en fonction de R , R_e et C .

L'expression ainsi établie de $\tau'(R)$ est tracée figure III.9 (ci-dessous) et est en bon accord avec l'expérience.

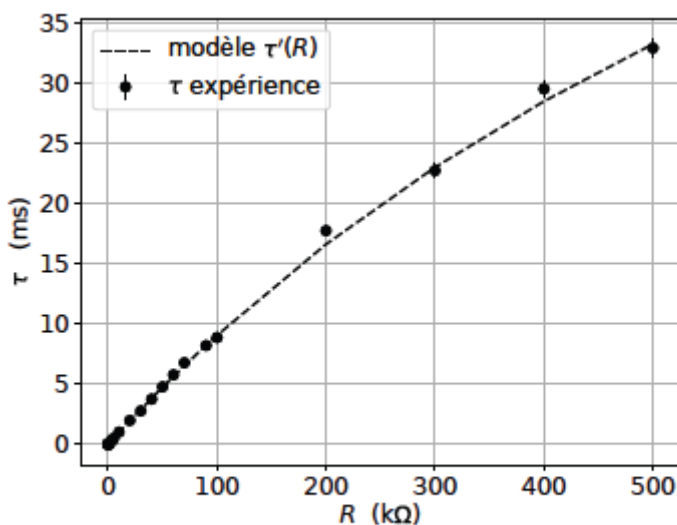


Figure III.9 : mesures de τ (les mêmes que figure III.7, gauche) et comparaison avec le modèle $\tau'(R)$.

Q7 - En partant de l'équation précédente, établir l'expression de la valeur vers laquelle tend la tension u aux temps longs. Faire l'application numérique dans le cas de la figure III.7, droite, et expliquer cette figure.

Restriction aux petites valeurs de R

Afin de pouvoir utiliser le premier modèle (où τ est proportionnel à R , questions 1 à 3), et donc de s'affranchir de l'influence de la résistance d'entrée de l'oscilloscope, on se place à des petites valeurs de R . Ceci donne le graphique de la figure III.10.

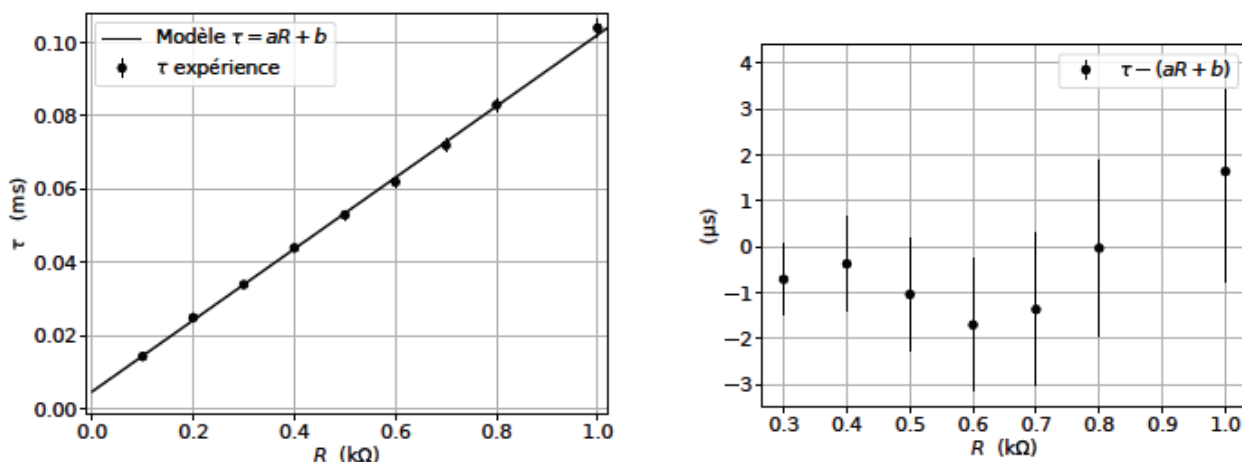
Q8 - Le modèle $\tau = aR + b$ est-il compatible avec les mesures de τ sur cette plage de valeurs de R ? On attend une justification basée sur la figure III.10.

Q9 - Résolution de problème :

On constate sur la régression linéaire que la valeur du coefficient b n'est pas compatible avec une valeur nulle. Quel élément, non présent dans le second modèle, permet d'expliquer ceci ?

Utiliser la valeur de b pour calculer la valeur de cet élément négligé.

Pour cette question, toute piste de recherche pertinente sera valorisée.



Les barres sont les incertitudes-types sur τ , estimées à 2% de τ . Celles sur R sont négligeables.

Une procédure de tirage aléatoire permet ensuite d'obtenir $u(a) = 1 \text{ nF}$ et $u(b) = 0,4 \mu\text{s}$.

Q10 - Dédurre de l'analyse précédente la valeur de la capacité C et son incertitude-type $u(C)$.

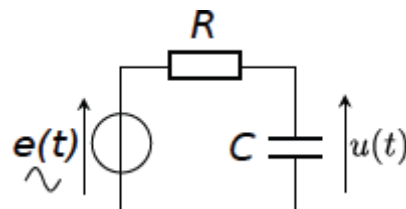
Méthode 2 : étude en régime sinusoïdal forcé

On considère le circuit ci-contre.

Le générateur délivre une tension sinusoïdale, $e(t) = E_0 \cos(\omega t)$.

On réalise l'étude en régime sinusoïdal forcé, avec le formalisme des impédances complexes.

En particulier, le signal $e(t)$ est représenté par le signal complexe $\underline{e}(t) = E_0 e^{j\omega t}$, où j est le complexe tel que $j^2 = -1$.



Le signal $u(t)$ est représenté par le signal complexe $\underline{u}(t)$.

Q11 - Etablir l'expression de $\underline{u}(t)$ en fonction de $\underline{e}(t)$, de R , C et ω .

On se place dans le cas où $RC\omega \gg 1$.

Q12 - Les amplitudes U_0 et E_0 sont mesurées à l'aide d'un voltmètre. Exprimer C en fonction de U_0 , E_0 , R et ω . Faire l'application numérique avec les valeurs suivantes : fréquence $f = 1 \text{ kHz}$, résistance $R = 10 \text{ k}\Omega$, amplitudes de $2,001 \text{ V}$ pour $e(t)$ et $0,3185 \text{ V}$ pour $u(t)$ (mesures au voltmètre). On donne $1/\pi \approx 0,3183$.

Q13 - Le calcul sans l'approximation $RC\omega \gg 1$ donne $C = 98,7 \text{ nF}$. Est-ce compatible avec la valeur de C déduite de la méthode1 (figure III.10) ? On attend une explication chiffrée qui utilise la notion d'incertitude.

Deuxième problème : mesure de vitesse par effet Doppler

Les radars (cinémomètres) routiers fonctionnent sur le double effet Doppler.

Aspects théoriques de l'effet Doppler

Un émetteur E fixe, situé en O , envoie un train d'impulsions d'ondes lumineuses (figure 3) à la fréquence f_E , qui se propage suivant $\vec{e}_x$ à la célérité $c_0 > 0$. Le récepteur R , situé à l'abscisse x_0 à la date $t = 0$, est animé d'un mouvement uniforme à la vitesse $\vec{v} = v\vec{e}_x$. Sa position est déterminée par son abscisse notée $x_R(t)$ (figure 4). Il reçoit le train d'impulsions émis de E (figure 5) à la fréquence f_R différente de f_E .



Figure 3 - Train d'impulsions à l'émission en E (fréquence f_E et période $T_E = 1/f_E$)

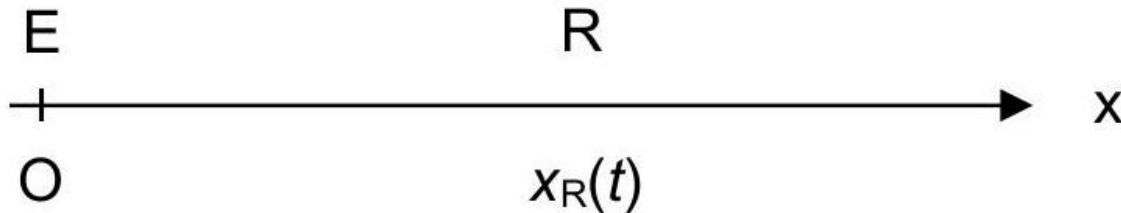


Figure 4 - Emetteur E et récepteur R

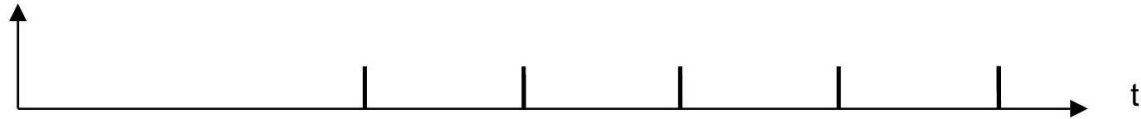


Figure 5 - Train d'impulsions à la réception en R (fréquence f_R et période $T_R = 1/f_R$)

Dans un radar à effet Doppler, l'émetteur et le récepteur sont tous deux situés au niveau de l'appareil. E et R sont confondus. L'émetteur envoie une onde de fréquence f_E qui se réfléchit sur le véhicule et retourne alors en E . On admettra dans ce cas que la fréquence de l'onde au niveau du récepteur est $f_R = f_E \left(1 - 2 \frac{v}{c_0}\right)$ où v est la vitesse du véhicule et c_0 la célérité de l'onde.

Validation expérimentale

On se propose ici de valider le fonctionnement du cinémomètre à double effet Doppler dans le cadre du laboratoire de sciences physiques en utilisant des voitures.

Les voitures acquièrent une vitesse en descendant d'une piste inclinée de dénivelé h , où elles sont lâchées avec une vitesse initiale nulle, puis roulent sur un support horizontal (figure 6).

Un émetteur envoie une onde sonore de fréquence f_E . Le récepteur reçoit l'onde réfléchi par la voiture, de fréquence $f_R = f_E \left(1 - 2 \frac{v}{c_0}\right)$. On rappelle que la célérité des ondes sonores est de 340 m.s^{-1} .

L'émetteur et le récepteur sont des transducteurs piézoélectriques de fréquence de résonance égale à 40 kHz . On prendra $f_E = 40 \text{ kHz}$.

Sur notre oscilloscope, deux fréquences ne peuvent être distinguées ("résolues") que si leur écart relatif dépasse 20%.

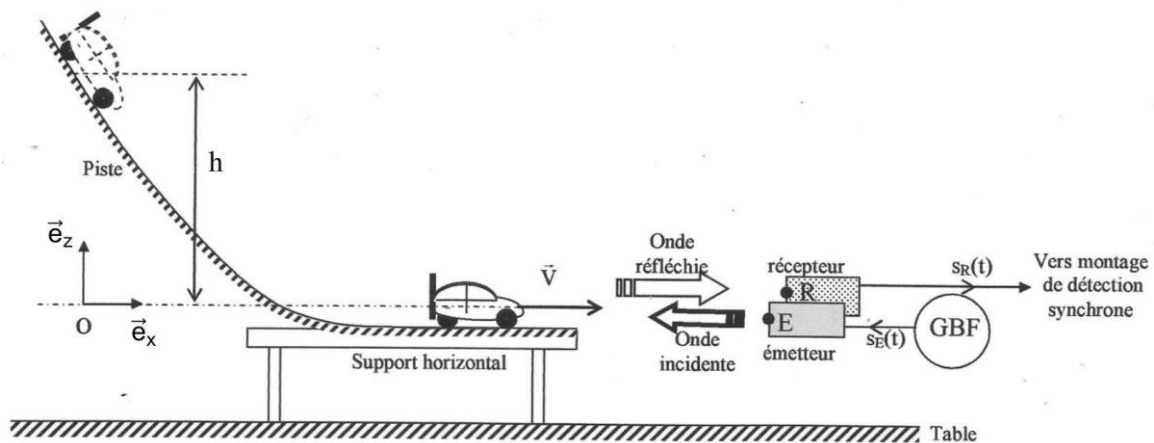


Figure 6 - Maquette du laboratoire

Q14. En négligeant tout frottement, déterminer l'expression de la vitesse de la voiturette une fois arrivée sur la portion horizontale de la piste, en fonction de g et de h . Évaluer cette vitesse avec un chiffre significatif en prenant $h \approx 50$ cm.

Le récepteur reçoit plusieurs signaux réfléchis : celui qui nous intéresse obtenu par réflexion sur la voiture et ceux réfléchis par les obstacles fixes environnants. Pour distinguer tous ces signaux, il faut utiliser une méthode indirecte : la détection synchrone.

Q15. Quelle est la fréquence des ondes réfléchies par les obstacles fixes ?
Quelle est la fréquence des ondes réfléchies par la voiture ?
Est-ce que ces deux fréquences peuvent être résolues par l'oscilloscope ?

Le principe du montage à détection synchrone est décrit sur le synoptique suivant (figure 7) :

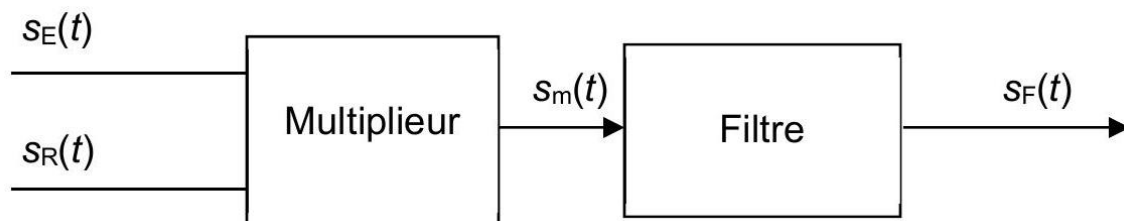


Figure 7 - Détection synchrone

Les tensions électriques $s_E(t)$ et $s_R(t)$ issues du GBF et du récepteur sont envoyées sur un multiplieur de constante $k = 0,1 \text{ V}^{-1}$. On a : $s_m(t) = k s_E(t) s_R(t)$. La tension $s_m(t)$ est alors filtrée avant d'être envoyée sur l'oscilloscope.

On suppose que $s_E(t)$ est une tension sinusoïdale de fréquence f_E et d'amplitude E et $s_R(t)$ une tension sinusoïdale d'amplitude R et de fréquence f_R .

Q16. Tracer le spectre de Fourier de $s_m(t)$. Exprimer les fréquences qui composent ce spectre en fonction de f_E , v et c_0 , puis en donner un ordre de grandeur.

Q17. En déduire la nature du filtrage à réaliser pour déterminer la vitesse de la voiturette. En déduire une expression possible pour $s_F(t)$. Quelle grandeur de $s_F(t)$ permet d'accéder à cette vitesse ? Comment peut-on la mesurer à l'aide de l'oscilloscope ?

On se propose d'étudier quelques aspects liés au filtre.

Le montage électronique du filtre est décrit par la figure 8. L'ALI est considéré comme parfait et fonctionne en régime linéaire.

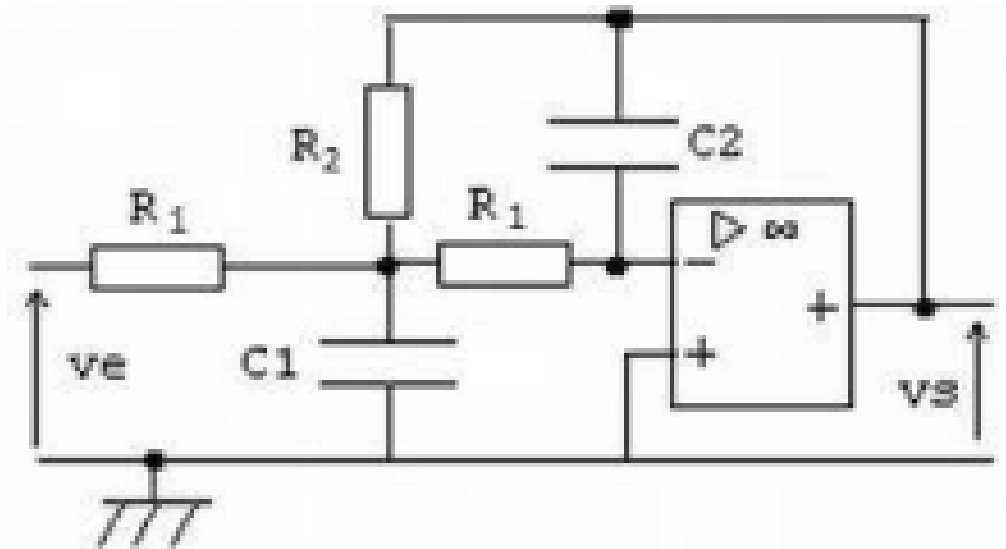


Figure 8 - Filtre

Q18. Déterminer sans calcul la nature du filtre et préciser parmi les deux fonctions de transfert $\underline{H}_1(j\omega)$ et $\underline{H}_2(j\omega)$, laquelle correspond à ce montage :

$$\underline{H}_1(j\omega) = \frac{G_0}{1 + 2jm\frac{\omega}{\omega_0} - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \quad \text{et} \quad \underline{H}_2(j\omega) = \frac{-G_0\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{1 + 2jm\frac{\omega}{\omega_0} - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

Q19. Déterminer le gain G_0 de ce filtre en fonction de R_1 et R_2 .

Les valeurs choisies pour les composants sont $R_1 = 1\text{k}\Omega$, $C_1 = 3,2\text{nF}$ et $C_2 = 1,2\text{nF}$ de sorte que ω_0 vérifie la relation précédente avec $m = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Q20. Que vaut alors le gain du filtre pour $\omega = \omega_0$? Quel nom donne-t-on alors à ω_0 ?

Q21. Exprimer, sous la forme de deux inégalités fortes faisant intervenir les grandeurs v , c_0 et f_E , les deux contraintes que doivent vérifier la pulsation ω_0 . Proposer en fonction de v , c_0 et de f_E , une expression de ω_0 qui satisfasse le compromis précédent.

Un signal sinusoïdal délivré par un GBF est envoyé en entrée du filtre et est enregistré sur la voie 1 de l'oscilloscope (Oscillogramme 1, figure 9 sur le document réponse).

On enregistre sur la voie 2 de l'oscilloscope le signal issu du filtre.

La base de temps est de 1 ms par division comme indiqué en bas de l'écran. Les sensibilités verticales sont de 100mV par division pour la voie 1 et de 5 V par division pour la voie 2.

Q22. Qu'est ce qui permet de qualifier cet essai d'essai en basse fréquence ? Déterminer, à l'aide de l'oscillogramme 1, la valeur numérique de la résistance R_2 .

Q23. Deux autres essais ont été réalisés en envoyant les tensions sinusoïdales suivantes en entrée du filtre :

- $e_1(t) = E_{01} \cos(\omega_0 t)$;
- $e_2(t) = E_{02} \cos(100\omega_0 t)$

Déterminer les expressions analytiques des tensions $s_1(t)$ et $s_2(t)$ recueillies en sortie du filtre.

On considère maintenant le montage complet lié à la détection synchrone.

Lorsque la tension $s_m(t)$, issue du multiplieur, est envoyée en entrée du filtre, on obtient les oscillogrammes 2 et 3, représentés sur les figures 10 et 11 du document réponse.

Pour l'oscillogramme 2, la base de temps est de 5 ms par division et la sensibilité verticale est de 5 V par division, comme indiqué en bas de l'écran.

Pour l'oscillogramme 3, la base de temps est de 1 ms par division et la sensibilité verticale est de 5 V par division, comme indiqué en bas de l'écran.

Q24. À l'aide des oscillogrammes 2 et 3, évaluer avec un seul chiffre significatif, la vitesse v de la voiturette, lorsqu'elle roule sur le support horizontal.

Troisième problème - Commande d'une machine à courant continu (MCC)

Dans une M.C.C., la force électromotrice (f.e.m.) induite est proportionnelle à la vitesse de rotation de la machine. La source d'énergie est généralement une source de tension constante notée U_0 . Il convient donc de l'associer à un convertisseur statique pour pouvoir faire varier la vitesse de rotation de la machine.

Q25. Un étudiant E1 propose d'intercaler, entre la source de tension continue U_0 et la M.C.C., un pont diviseur de tension résistif composé d'une résistance R_1 et d'une résistance R_2 variable (figure 5).

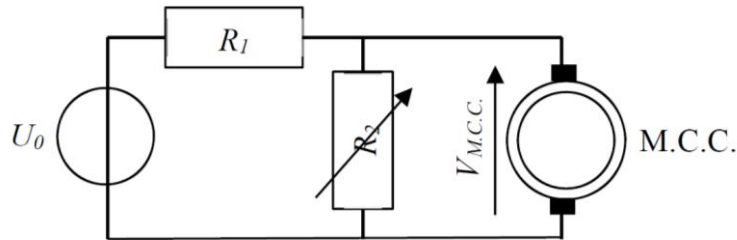


Figure 5 - Pont diviseur résistif

Exprimer, en supposant l'impédance de la M.C.C. grande devant la résistance R_2 , la tension $V_{M.C.C.}$, aux bornes de la M.C.C., en fonction de U_0 , de R_1 et de R_2 .

Q25. Un étudiant E2 suggère au contraire d'utiliser un pont diviseur de tension capacitif, dont la capacité du condensateur 2 est réglable (figure 6).

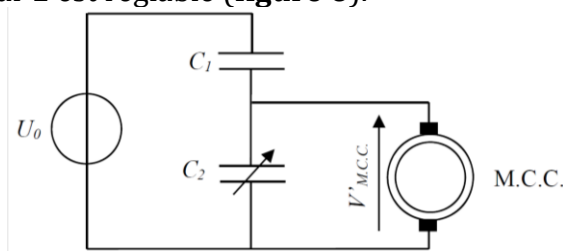


Figure 6 - Pont diviseur capacitif

Exprimer, en supposant l'impédance de la M.C.C. grande devant celles des capacités, la tension $V_{M.C.C.}$, aux bornes de la M.C.C., en fonction de U_0 , de C_1 et de C_2 .

Q26. Un étudiant E3 suggère d'utiliser un amplificateur linéaire qui fonctionne en comparateur, de façon à délivrer sur une période T de hachage (figure 7) une tension hachée U_1 d'amplitude $+V_{sat}$ pour $t \in [0; \alpha T]$ et d'amplitude $-V_{sat}$ pour $t \in [\alpha T; T]$.

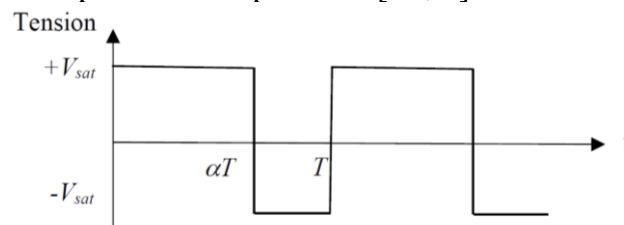


Figure 7 - Tension hachée U_1

Déterminer en fonction de α et de V_{sat} , la valeur moyenne V_{moy} de la tension hachée U_1 .

Q27. Présenter les avantages et les inconvénients de ces trois propositions en une dizaine de lignes au maximum.

Industriellement, la source de tension continue d'amplitude U_0 est connectée à la M.C.C. par l'intermédiaire d'un hacheur. On considère ici un hacheur série (**figure 8**), comprenant deux composants de puissance : un transistor T et une diode D.

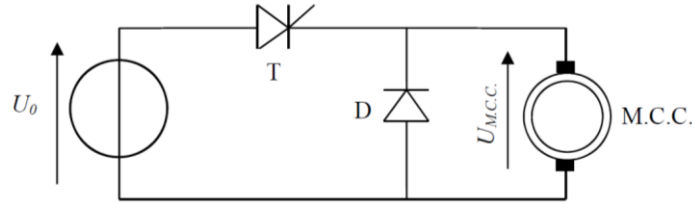


Figure 8 - Montage avec hacheur série

Le transistor est utilisé en commutation par l'intermédiaire d'une tension de commande V_{com} . On désire obtenir la tension hachée U_2 , représentée sur la **figure 9**. On note α' le rapport cyclique du hacheur et f_h la fréquence de hachage ($f_h = \frac{1}{T_h}$).

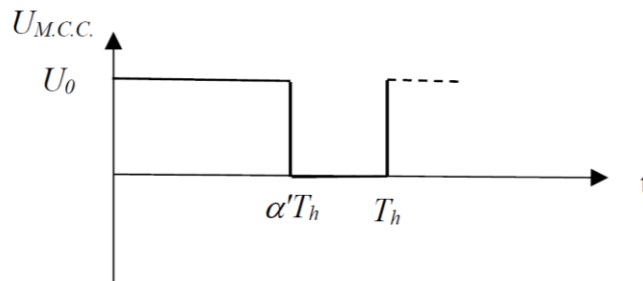


Figure 9 - Tension hachée U_2

Pour faire simple, on admettra que le transistor est passant lorsque $V_{com} = +15V$ et qu'il est bloqué lorsque $V_{com} = -15V$. On s'intéresse ici au circuit électronique qui permet de générer la tension de commande V_{com} du hacheur série. Dans tout le sujet, les amplificateurs linéaires (A.Li.) sont supposés d'impédance d'entrée infinie et d'impédance de sortie nulle. En mode linéaire, leur gain est considéré comme infini. On note $\pm V_{sat}$ leur tension de saturation, avec $V_{sat} = 15V$. On considère le circuit de commande de la **figure 10**. La résistance R_3 est une résistance variable, les deux autres résistances sont de valeurs fixes.

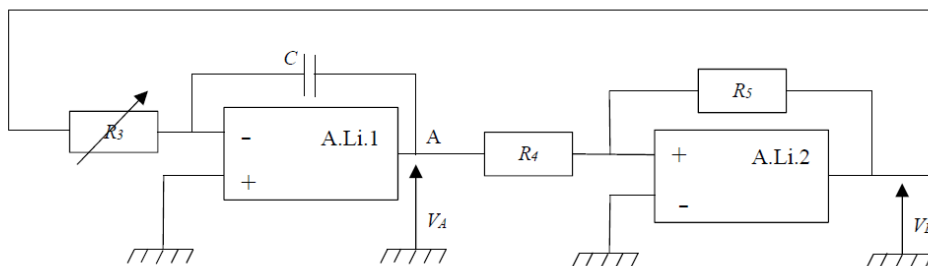


Figure 10 - Circuit de commande du hacheur

Q28. Préciser pour chacun des amplificateurs linéaires, s'il fonctionne, *a priori*, en régime linéaire ou saturé.

Q29. Déterminer, en fonction de R_3 et C , la fonction de transfert $\underline{H}(j\omega) = \frac{V_A}{V_B}$ du montage lié à l'amplificateur linéaire A.Li.1. Quelle est la fonction réalisée par cette partie du montage ?

Q30. Quelle fonction réalise le montage lié à l'amplificateur linéaire A.Li.2. ?

Q31. On suppose que $V_A(t=0) = \frac{R_4 V_{sat}}{R_5}$. En veillant à indiquer toutes les informations nécessaires, tracer sur un même graphe, l'allure des deux tensions V_A et V_B en fonction du temps. Comment sont modifiées ces tensions lorsqu'on augmente la résistance R_3 ?

Dans la suite du sujet, on suppose $R_5 = 2R_4$.

Q32. On connecte le point A du circuit précédent (**figure 10**) au point C du circuit décrit sur la **figure 11**. Un potentiomètre relié à un ensemble de deux condensateurs et une source de tension constante $V_m = 15V$, permettent d'imposer le potentiel de l'entrée non inverseuse de l'amplificateur linéaire A.Li.3. On a ainsi : $V^+ = \beta V_m$.

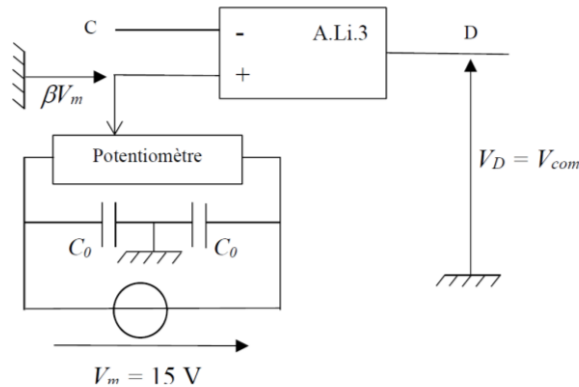


Figure 11 - Circuit supplémentaire

Sur quel intervalle varie la grandeur β ? Dessiner l'allure de la tension $V_D(t)$ dans les deux cas correspondant à $\beta = \frac{1}{3}$ et $\beta = -\frac{1}{3}$.

Q33. La tension $V_D(t)$ est utilisée pour commander le transistor du hacheur série qui alimente la M.C.C., on a ainsi : $V_{com}(t) = V_D(t)$. Préciser les relations qui relient la fréquence de hachage f_h et le rapport cyclique α' du hacheur aux différents éléments présents dans les circuits électroniques représentés sur les **figures 10 et 11**.

PSI
NOM :

Prénom :

Document réponse à rendre avec la copie

Premier problème : Mesure de la capacité d'un condensateur

Q3.

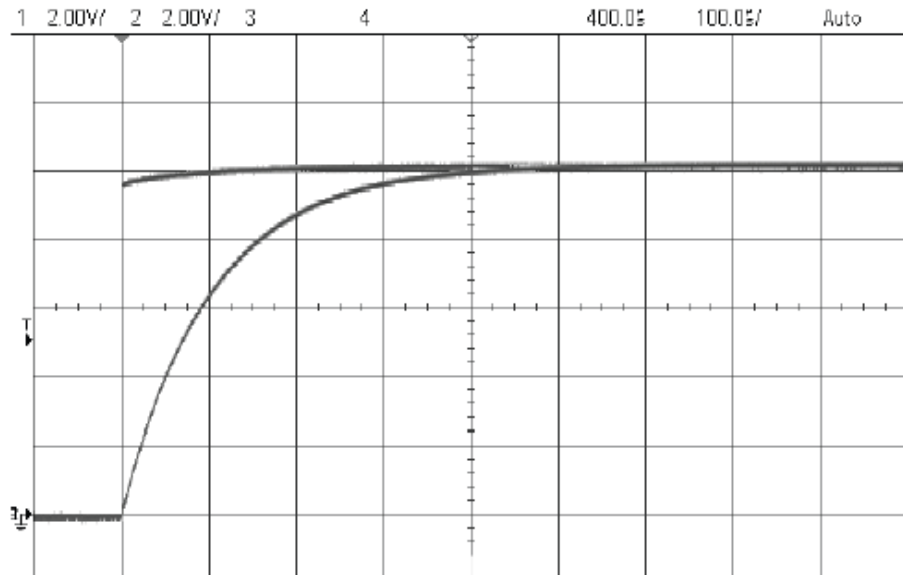


Figure III.6 : acquisition à l'oscilloscope de la tension aux bornes du générateur et de la tension $u(t)$. L'échelle horizontale est de 100 μ s par carreau, les deux échelles verticales de 2V par carreau.

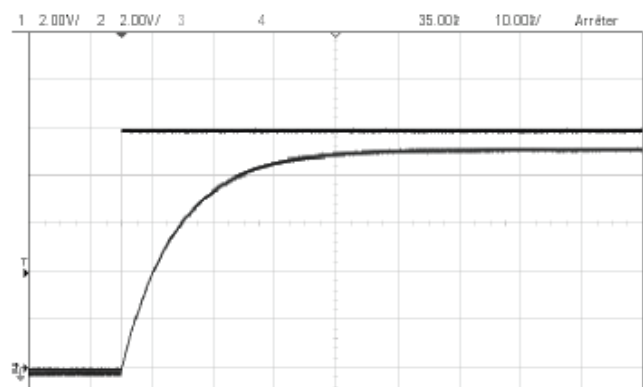
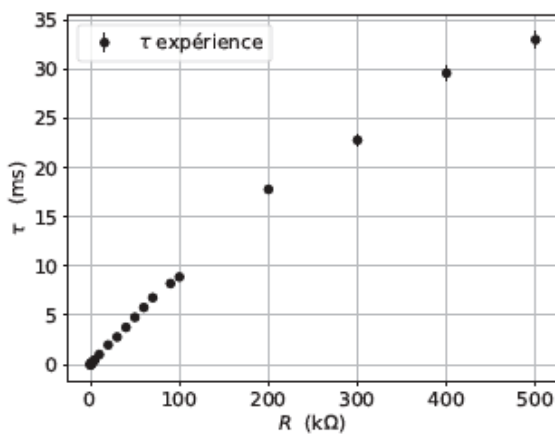


Figure III.7. Gauche : tracé des mesures de τ pour différentes valeurs de R . Les barres verticales, à peine visibles, sont les incertitudes-types.

Droite : un exemple d'acquisition pour $R = 100$ k Ω (tension aux bornes du générateur et tension $u(t)$).

Deuxième problème : mesure de vitesse par effet Doppler

Q22 et suivantes

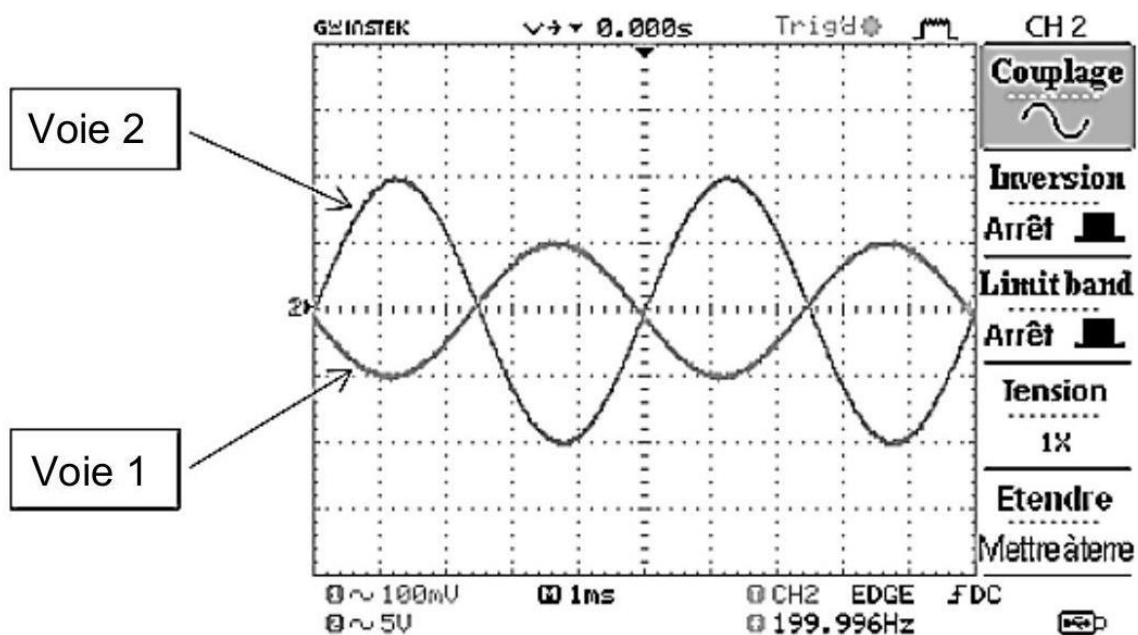


Figure 9 - Oscillogramme 1

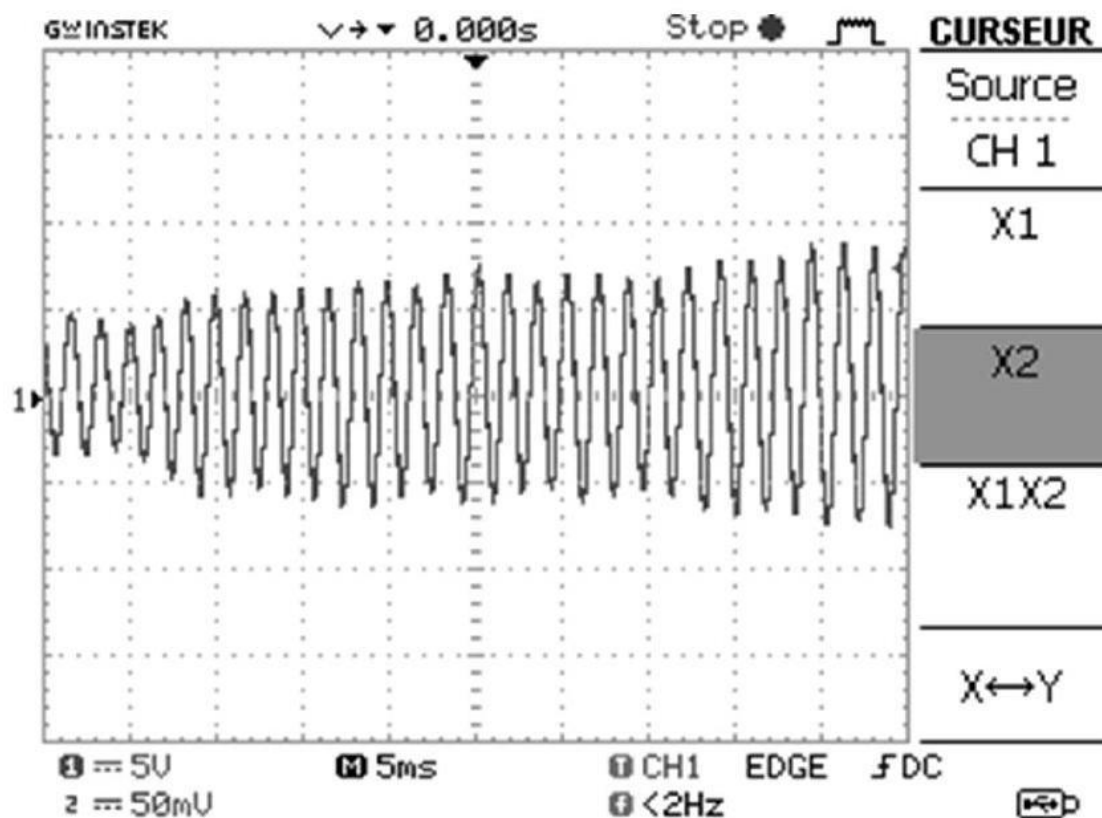


Figure 10 - Oscillogramme 2

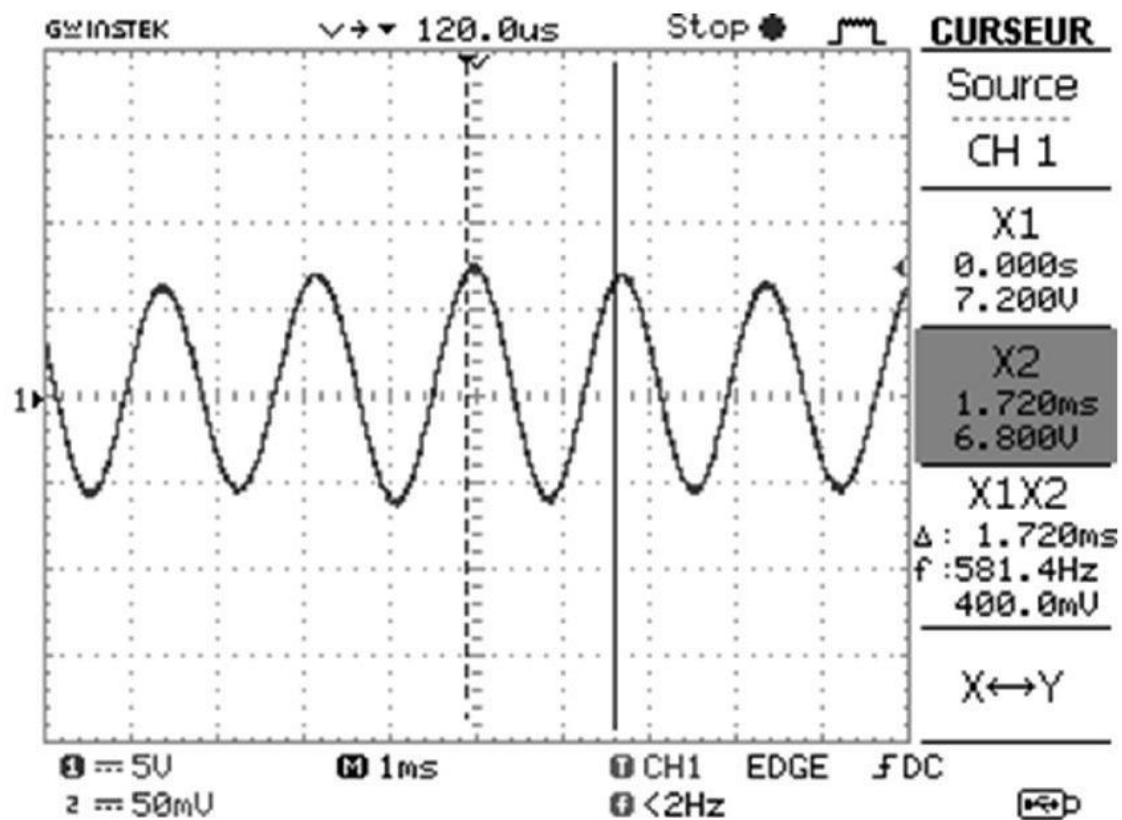


Figure 11 - Oscillogramme 3