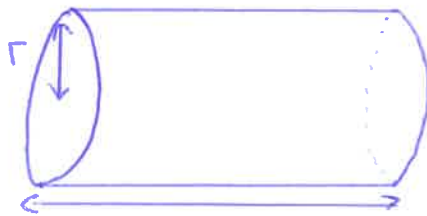


Exercice I, TD9, Groupe 11

- Modélisation du dauphin :

$$\text{Surface du dauphin : } S = 2\pi r h$$



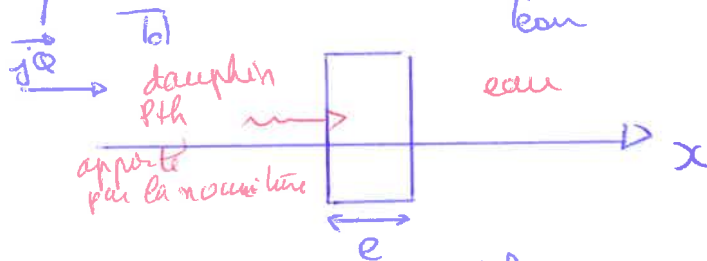
$$h = 3\text{m}$$

où $r = 0,5\text{m}$ (Supposition)

Soit T_d la température du dauphin

De plus, on modélise la couche de graisse du dauphin :

On suppose que $T_{\text{eau}} = 10^\circ\text{C}$, d'où $T_d > T_{\text{eau}}$, il existe $j\Phi$:



Par définition de la puissance thermique et la loi de Fourier :

$$\begin{aligned} P_{th} = j\Phi S &= -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} S = -\lambda \left(\frac{T_d - T_{\text{eau}}}{0 - e} \right) S \\ &= \lambda S \left(\frac{T_d - T_{\text{eau}}}{e} \right) \end{aligned}$$

De plus le dauphin consomme 5000 kcal de poisson par jour. Donc $4,2 \times 5000 = 21000 \text{ kJ}$ par jour.

$$\text{Ainsi on pose } \cancel{P}_{th} = \frac{21 \times 10^6}{24 \times 60 \times 60} = 243 \text{ J} \cdot \text{s}^{-1}$$

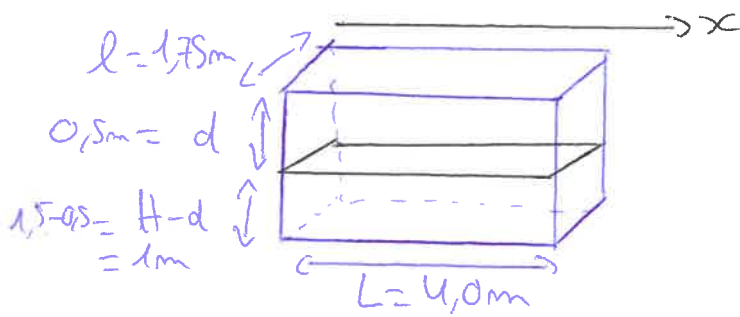
D'où par analyse dimensionnelle :

$$P_{th} = \frac{\lambda S}{e} (T_d - T_{\text{eau}}) = \cancel{P}_{th}$$

$$\begin{aligned} \text{d'où } e &= \frac{\lambda S}{\cancel{P}_{th} (T_d - T_{\text{eau}})} = \frac{0,2 \times 2\pi \times 0,5 \times 3 (36 - 10)}{243} \\ &= 0,20 \text{ m} \end{aligned}$$

Exercice 2:

Gr 14
Très bon travail.



1) Loi de Fourier: gradient de température en $\text{K} \cdot \text{m}^{-1}$

$$\vec{j}_Q = -\lambda \text{grad } T = -\lambda \frac{dT}{dx} \vec{u}_x$$

↑
vecteur de densité de flux thermique en W/m^2

↑
coefficient de diffusion thermique en $\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$

2) Régime permanent, $t \rightarrow +\infty$ ou régime indépendant du temps.

En conduction unidirectionnelle axiale,

Diagram of a block of thickness e , with temperatures T_{ext} and T_{int} at the faces. A coordinate system x is shown from x to $x+e$. Arrows indicate heat flux $\vec{S}$ and power P_{th} .

il faut respecter l'écriture

$$P_{\text{th}} = j_Q \cdot S = -\lambda \text{grad } T \cdot \vec{S}$$

$$= -\lambda \frac{T_{\text{ext}} - T_{\text{int}}}{x - (x+e)} \times S$$

$$= \lambda \frac{\Delta T}{e} \times S$$

(j'aime pas trop cette notation.)

Ensuite, on sait que la résistance thermique, R_{th} est

$$R_{\text{th}} = \frac{\Delta T}{P_{\text{th}}}$$

$$\Rightarrow R_{\text{th}} = \frac{\Delta T \cdot e}{\lambda \Delta T S} = \frac{e}{\lambda S}$$

3) Lorsque les résistances thermiques sont associées en série, les résistances sont parcourues par la même puissance thermique. De plus, $R_{\text{eq}} = R_1 + R_2$.

• D'autre part, lorsqu'elles sont associées en parallèle, elles sont parcourues par la même différence de température: ΔT .

Et $\frac{1}{R_{\text{eq}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$

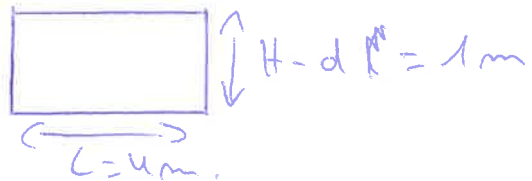
4a) le toit de la voiture :



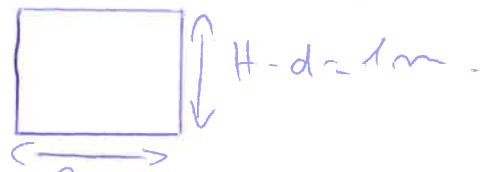
$$R_{\text{toit}} = R_1 = \frac{\Delta T}{P_{\text{th}}} = \frac{e_1}{\lambda_1 S_{\text{toit}}} = \frac{e_1}{\lambda_1 (l \times L)} = \frac{10 \times 10^{-2}}{0,10 \times (4 \times 1,75)} = 0,14 \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}.$$

b) On a 2 types de parties latérales (matériau 1)

On a 2 parties latérales (R'_2) :



On a 2 autres parties latérales (R'_1) :



Ainsi, les 4 parois latérales sont soumises à la même ΔT donc les résistances thermiques sont associées en parallèles.

$$\Rightarrow \frac{1}{R_2} = \left(\frac{1}{R'_1} + \frac{1}{R'_1} \right) + \left(\frac{1}{R'_2} + \frac{1}{R'_2} \right) = \frac{2}{R'_1} + \frac{2}{R'_2}$$

$$\text{Donc } R'_1 = \frac{e_1}{\lambda_1 \times S_1} = \frac{e_1}{\lambda_1 \times (H-d) \times l} = \frac{0,1}{0,1 \times 1 \times 1,75} = 0,57 \text{ K/W.}$$

$$\text{et } R'_2 = \frac{e_1}{\lambda_1 \times (H-d) \times L} = 0,25 \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}.$$

$$\text{Finalement, } R_2 = \frac{R'_1 \times R'_2}{2(R'_1 + R'_2)} \quad \left(\text{car } \frac{1}{R_2} = \frac{2}{R'_1} + \frac{2}{R'_2} \right)$$

$$\Rightarrow R_2 = \frac{0,57 \times 0,25}{2(0,82)} = 8,7 \times 10^{-2} \text{ K/W.}$$

II suite :

4c) De la même manière que pour la 4b).

Les vitres sont associées en parallèle : (et d'épaisseur e_z et λ_z).

On a 2 vitres :



et 2 autres vitres :



$$\Rightarrow \frac{1}{R_3} = \frac{1}{R'_3} + \frac{1}{R'_3} + \frac{1}{R'_4} + \frac{1}{R'_4} = \frac{2}{R'_3} + \frac{2}{R'_4}$$

$$\Rightarrow R'_3 = \frac{e_z}{\lambda_z \times (d \times l)} = \frac{2,0 \times 10^{-3}}{1,2 \times 0,5 \times 1,75} = 1,9 \times 10^{-3} \text{ K/W}$$

et

$$\Rightarrow R'_4 = \frac{e_z}{\lambda_z \times 2 \times d} = 8,3 \times 10^{-4} \text{ K/W}$$

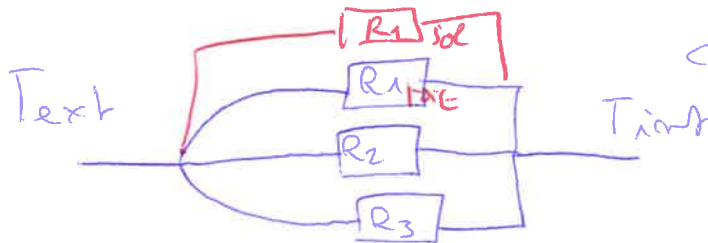
Ainsi,

$$\Rightarrow R_3 = \frac{R'_3 \times R'_4}{2(R'_3 + R'_4)} = \frac{1,9 \times 10^{-3} \times 8,3 \times 10^{-4}}{2(1,9 \times 10^{-3} + 8,3 \times 10^{-4})} = 2,9 \times 10^{-4} \text{ K/W}$$

5) Toutes les résistances thermiques sont ~~parallèles~~ ^{soumises à} la même ΔT , donc associées en //.

prendre le toit et le sol

$$\frac{1}{R_v} = \frac{2}{R_{1,tot}} + \frac{1}{R_{2,tot}} + \frac{1}{R_{3,tot}} \Leftrightarrow \frac{1}{R_v} = \frac{R_{3,tot}(R_{2,tot} + R_{1,tot}) + R_{1,tot}R_{2,tot}}{R_{1,tot} \times R_{2,tot} \times R_{3,tot}}$$



$$\begin{aligned} \Leftrightarrow R_v &= \frac{R_{1,tot} R_{2,tot} R_{3,tot}}{R_{3,tot}(R_{2,tot} + R_{1,tot}) + R_{1,tot} R_{2,tot}} \\ &= \frac{0,14 \times 8,7 \times 10^{-2} \times 2,9 \times 10^{-4}}{2,9 \times 10^{-4}(8,7 \times 10^{-2} + 0,14) + 0,14 \times 8,7 \times 10^{-2}} \\ &= 2,9 \times 10^{-4} \text{ K/W} \end{aligned}$$

ou

même s'il manque R_{sol} .

6) On a $R_v = 2,9 \times 10^{-4} \text{ K/W} = R_3$ (calculées avant) | ou toute la puissance thermique passe par les vitres.

• On sait que pour R_v : $P = \frac{\Delta T}{R_v} = \Delta T \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right)$

et pour R_3 : $P_{R_3} = \frac{\Delta T}{R_3}$

Or $R_3 = R_v$ donc leur puissance sont les mêmes car elles sont parcourues par le même ΔT .

Le matériau 1 qui isole la toiture est un très bon isolant B contrairement au matériau 2 (qui compose les vitres)

Car la puissance thermique perdue totale des vitres est égale à celle de la toiture. Il y a la plus grande perte de puissance thermique au niveau des vitres TB

→ rappelle la question posée.

7) Il faut prendre en compte le phénomène de conduction-convexion à l'interface solide fluide de chaque côté des parois de la toiture.

D'après la Loi de Newton :

$j_{cc} = h (T_{sol} - T_{env})$
 ↑
 coefficient de conduction-convexion en $W/(K \cdot m^2)$
 ↑
 surface du solide
 ↑
 L'environnement

flux thermique

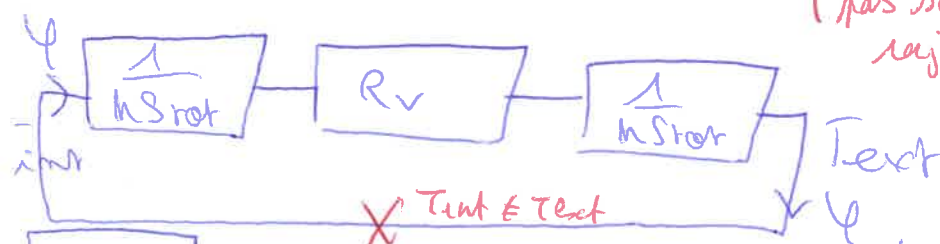
$\Phi = j_{cc} S = h S \Delta T = \frac{\Delta T}{R_{cc}}$

$\Rightarrow R_{cc} = \frac{1}{hS}$ qu'on doit ajouter en série

B car parcouru par le même flux thermique

Pour la toiture, $R_{cc} = \frac{1}{hS_{totale}}$

pas sûr qu'il faille rajouter celui des 2 côtés du toit. la conduction-convexion est plus importante sur la pente Toit - extérieur.



A.N. : $h = 300 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$

d'où $R_{cc, totale} = \frac{2}{hS_{tot}} = \frac{1}{150 \times 318} = 2,1 \times 10^{-4} \text{ K/W}$ ①

II suite 2:

$$\text{On a ait } R_{\text{cc, tot}} = \frac{1}{150 \times 31,25} = 2,1 \times 10^{-4} \text{ K/W}.$$

$$\Rightarrow R_{\text{tot}} = \frac{2}{150} + R_v = 5 \times 10^{-4} \text{ K/W}.$$

$$\Rightarrow \frac{1}{R_{\text{tot}}} = 2 \times 10^3 \text{ W/K}.$$

$$\text{On pose } G = \frac{1}{R_{\text{tot}}} = 150 \text{ W/K}.$$

f) D'après l'énoncé, la température de consigne $T_c = T_{\text{int}} = 273 \text{ K}$ est maintenue constante.

$$\begin{aligned} P_{\text{fournie de l'habitable}} &= P_{\text{sortant de l'habitable}} \Leftrightarrow \underset{\substack{\uparrow \\ \text{pression standard}}}{m_p} \neq P_1 = -G\Delta T = -G(T_{\text{ext}} - T_{\text{int}}) \\ \text{puissance [W]} &\Leftrightarrow P_1 = -(G\Delta T + m_p) \quad \underline{\text{B}} \end{aligned}$$

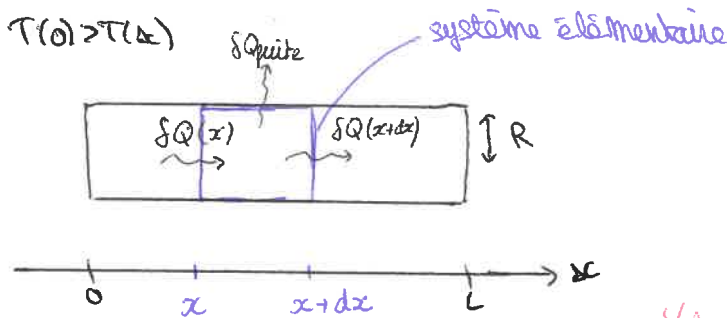
g) En hiver, $P_1 = 150 \times 30 - 4 \times 75 = 4200 \text{ W} > 0$ (chauffage) ✓

En été : $P_1 = -150 \times 10 - 4 \times 75 = -1800 \text{ W} < 0$ (climatisation) ✓

Pas besoin de conditionnement si $P_1 = 0 \Leftrightarrow |G\Delta T| = m_p$
 $\Leftrightarrow |\Delta T| = \frac{300}{150} = 2 \text{ } \underline{\text{B}}$

Soit $T_{\text{ext}} = T_{\text{int}} - 2 = 291 \text{ K} \approx 18^\circ \text{C}$.

Cela est cohérent : le chauffage interne dû à la présence des passagers permet de maintenir la température de consigne $T_c = 293 \text{ K}$ avec $T_{\text{ext}} = 291 \text{ K}$ B



1) Bilan énergétique: δQ_{perte} ; $\delta Q(x)$; $\delta Q(x+dx)$

1^{er} principe: $dU = \delta Q$

$$dU = cm dT = c \mu \pi R^2 dx \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right) dt$$

$$\delta Q = \delta Q(x) - \delta Q(x+dx) - \delta Q_{\text{perte}}$$

$$= j_q(x) S dt - j_q(x+dx) S dt - R(T(x) - T_a) 2\pi R dx dt$$

$$= - \left(\frac{\partial j_q}{\partial x} \right) dx \pi R^2 dt - R(T(x) - T_a) 2\pi R dx dt$$

$$\Rightarrow c \mu \pi R^2 dx \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right) dt = - \left(\frac{\partial j_q}{\partial x} \right) dx \pi R^2 dt - R(T(x) - T_a) 2\pi R dx dt$$

$$\Rightarrow c \mu R \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right) + \frac{\partial j_q}{\partial x} R = 2k \Theta(x, t)$$

$$\Rightarrow \mu c R \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right) - \lambda R \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 2k \Theta(x, t) \quad \text{car d'après la loi de Fourier: } j_q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{\mu c}{\lambda} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{2k}{\lambda R} \Theta(x, t) \quad \text{avec } \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2}$$

2) régime stationnaire: $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$

$$\text{donc } \underbrace{\frac{d^2 \Theta}{dx^2}}_{\frac{1}{m^2}} - \underbrace{\left(\frac{2k}{\lambda R} \right)}_{\frac{1}{m^2}} \Theta = 0$$

3) on pose $\delta^2 = \frac{\lambda R}{2k}$ donc $\frac{d^2 \Theta}{dx^2} - \frac{\Theta}{\delta^2} = 0$

équation caractéristique: $X^2 - \frac{1}{\delta^2} = 0$

$$\Theta(x) = A e^{-\frac{1}{\delta} x} + B e^{\frac{1}{\delta} x}$$

d $\Theta(x) = T(x) - T_a \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ car $T(l \rightarrow \infty) = T_a$

donc $B = 0$

et $\Theta(x=0) = A e^0 = \Theta_0$

ainsi $\Theta(x) = \Theta_0 e^{-\frac{x}{\delta}}$

Cuire

$$4) \Theta_1(x_1 = 15,6) = \Theta_0 e^{-\frac{x_1}{\delta_1}}$$

Etant $\Theta_2(x_2 = 6,4) = \Theta_0 e^{-\frac{x_2}{\delta_2}}$

$$\lambda_1 = 390 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$$

$$\lambda_2 = ?$$

$$\frac{\Theta_1}{\Theta_2} = \frac{\Theta_0 e^{-\frac{x_1}{\delta_1}}}{\Theta_0 e^{-\frac{x_2}{\delta_2}}} = e^{-\frac{x_1}{\delta_1} + \frac{x_2}{\delta_2}} = e^{-x_1 \left(\frac{\lambda_1 R}{2R} \right)^{-1} + x_2 \left(\frac{\lambda_2 R}{2R} \right)^{-1}}$$

même ici !

$$\text{donc } \ln\left(\frac{\Theta_1}{\Theta_2}\right) = -x_1 \left(\frac{\lambda_1 R}{2R} \right)^{-1} + x_2 \left(\frac{\lambda_2 R}{2R} \right)^{-1}$$

$\Rightarrow 1$ car la paraffine fond à la même température pour les 2 métaux.

$$\text{donc } 0 = -x_1 \frac{\sqrt{R}}{\sqrt{\lambda_1}} + x_2 \frac{\sqrt{R}}{\sqrt{\lambda_2}}$$

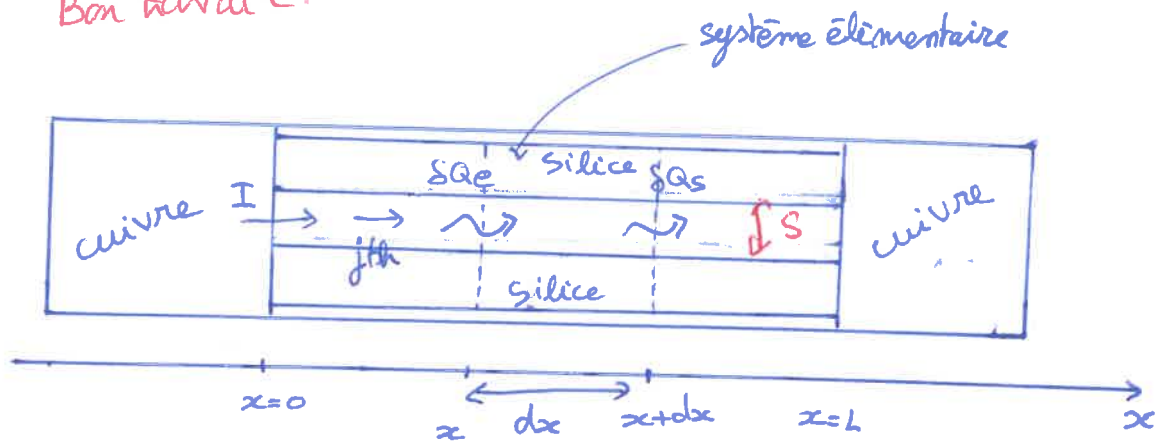
$$\text{donc } \lambda_2 = \frac{x_1^2 \lambda_1}{x_2^2} = \frac{(15,6^2 \cdot 10^{-2})^2 \times 390}{(6,4^2 \cdot 10^{-2})^2} = 9317 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$$

$$\lambda_2 = \left(\frac{x_2}{x_1} \right)^2 \lambda_1 = 390 \times \left(\frac{6,4}{15,6} \right)^2 =$$

~~on !~~
~~valeur super forte quand même~~

$$= 66 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$$

Bon travail.



$$T = T(x, t)$$

- 1.) D'après la loi de Fourier: $\vec{j}_{th} = -\lambda \text{grad } T$
- Annotations:
- $\vec{j}_{th}$: vecteur densité de transfert thermique $W \cdot m^{-2}$
 - λ : coefficient de ~~transfert~~ thermique $W \cdot K^{-1} \cdot m^{-1}$ **Conduction**
 - $\text{grad } T$: gradient de température $K \cdot m^{-1}$
 - T : température en K.

La chaleur se propage de la source plus chaude vers la source plus froide

- 2.) Bilan thermique sur le système élémentaire:

$$\phi = \iint_{MEI} \vec{j}_{th} \cdot d\vec{s} \text{ comme uniforme } \checkmark \text{ alors } \phi = j_{th} \cdot S$$

$$\delta Q_e = \phi(x, t) dt = j_{th}(x, t) S dt$$

$$\delta Q_s = \phi(x+dx, t) S dt$$

$$\delta Q_{Joule} = P_{Joule} \cdot dt = R_{elec} \cdot I^2 \cdot dt$$

Annotations:

- δQ_{Joule} : $\uparrow$ Q
- P_{Joule} : $\uparrow$ W
- R_{elec} : $\uparrow$ système

D'après le premier principe: $dU = \delta Q$

Annotations:

- $dU = \delta Q$: applique au système élémentaire
- δQ : ne pas mélanger échelle microscopique et macroscopique.

$$U(t+dt) - U(t) = \delta Q_e - \delta Q_s + \delta Q_{Joule}$$

$$\rho C S dx (T(x, t+dt) - T(x, t)) = S dt (j_{th}(x, t) - j_{th}(x+dx, t)) + P_{th} \cdot dt$$

$$\rho C S dx \frac{\partial T}{\partial t} dt = -S dt \frac{\partial j_{th}}{\partial x} dx + P_{th} \cdot dt$$

D'après la loi de Fourier

$$\rho C S dx \frac{\partial T}{\partial t} dt = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} S dt dx + P_{th} \cdot dt$$

$$\rho C \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{R_{elec} \cdot I^2 \cdot dt}{S dx}$$

"1/52" 0'

3) On est en régime stationnaire:

donc $T = T(x, t)$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = 0$$

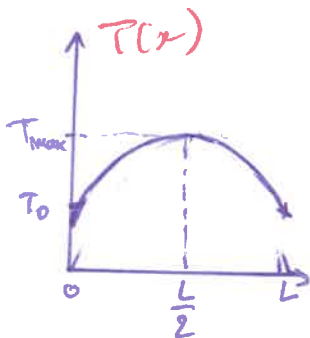
donc $\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{I}{6S^2} = 0$

$\rightarrow \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{dT}{dx}$ car T ne dépend plus que d'une seule variable x

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = -\frac{I}{\lambda 6S^2}$$

$$\frac{dT}{dx} = -\frac{I}{\lambda 6S^2} x + a$$

$$T = -\frac{I}{2\lambda 6S^2} x^2 + ax + b, \text{ avec } (a, b) \in \mathbb{R}^2$$



d
à déterminer à partir de

de $T(x=0) = T(x=L) = T_0 = b$

$$T(L) = T_0 = -\frac{I}{2\lambda 6S^2} L^2 + aL + T_0$$

$$a = \frac{IL}{2\lambda 6S^2}$$

pas évident à montrer

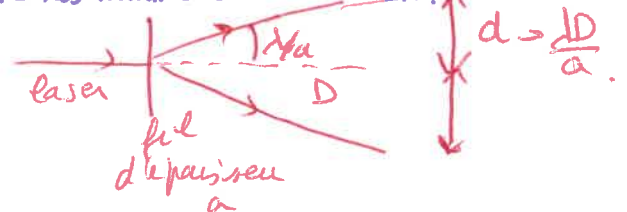
4) Puisque $x_{\max} = \frac{L}{2}$ alors on a $x_{\text{fusion}} = \frac{L}{2}$ car $T_{\max} = T_0 + \frac{I L^2}{8\lambda 6S^2} = T(\frac{L}{2})$

5) La méthode optique pour le diamètre est la diffraction laser.

Protocole:

- utiliser un laser
- mettre un fil sur le faisceau.
- observer la figure sur un écran.
- mesurer la distance entre les minima de diffraction.

avec $d = \frac{\lambda D}{a}$



6) Pour $T_{\max} = T_f$ quand $I_{\max} = I$

$$T_f - T_0 = \frac{I_{\max}^2 L^2}{8\lambda \left(\frac{\pi D^2}{4}\right)^2}$$

On exprime alors σ à partir de cette relation:

$$\sigma = \frac{I_{\max}^2 L^2}{8\lambda (T_f - T_0) \left(\frac{\pi D^2}{4}\right)^2}$$

On calcule $\sigma_{calculé}$ pour :

• Aluminium : $T_f = 933,5 \text{ K}$

$$\lambda = 237 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$$

$$\sigma_{theo} = 3,77 \times 10^7 \text{ S/m}$$

$$\sigma_{calculé} = \frac{(2,0)^2 \times (0,03)^2}{8 \times 237 \times (933,5 - 293) \times \left(\frac{\pi \times (1,0 \times 10^{-4})^2}{4} \right)^2} = 3,8 \times 10^7 \text{ S/m} \quad \checkmark$$

De la même manière.

• Argent :

$$\sigma_{calculé} = 2,11 \times 10^7 \text{ S/m} \neq \sigma_{théorique} = 6,3 \times 10^7 \text{ S/m}$$

• Plomb :

$$\sigma_{calculé} = 4,2 \times 10^7 \text{ S/m} \neq \sigma_{théorique} = 4,8 \times 10^6 \text{ S/m}$$

B [L'aluminium correspond à l'élément chimique constituant le fil.

autre
→ méthode

Vous n'avez pas exploité le tableau I_{max}
D

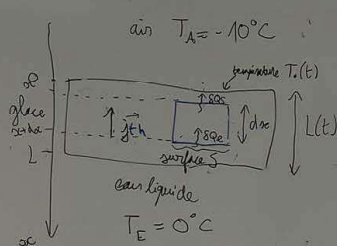
idée : $I_{max} = \sqrt{(T_f - T_0) \cdot 8 \lambda \sigma} \cdot \frac{1}{L} \cdot \frac{\pi D^2}{4}$

→ req lim $I_{max} = f(D^2) \rightarrow$ peut donner

on trouve que le métal
le plus approprié est Al.

Ex 5

- 1) Le patin est en contact avec la glace. La température du patin sous est supérieure à celle de la glace, alors il y aura une conduction thermique du patin vers la glace. De plus, le patin exerce une pression, ce qui favorise la liquéfaction de l'eau.
- 2) = conduction, convection, rayonnement
- 3)



Loi de Fourier:

$$\vec{H}(x,t) \cdot \vec{u}_x = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}$$

$$= -\lambda \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \vec{u}_x$$

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial x}$$

5) en utilisant la Loi de Fourier:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\lambda \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \right) \Rightarrow \rho c \frac{\partial T}{\partial t} + \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$$

6) approximation quasi-stationnaire: $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$:
on a alors:

$$\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \Rightarrow T(x) = ax + b \quad \left| \begin{array}{l} T(x=0) = T_0 = b \\ T(x=L) = T_E = aL + T_0 \\ \Rightarrow a = \frac{T_E - T_0}{L} \end{array} \right.$$

4) on applique le premier principe au système élémentaire:

$$dU = \delta Q$$

où:

$$dU = m_{\text{glace}} c dT$$

$$= \rho S dx c dT$$

$$dU = \rho S dx c \frac{\partial T}{\partial t} dt$$

et:

$$\delta Q = \delta Q_e - \delta Q_s$$

$$\delta Q_e = j_{\text{th}}(x+dx) \cdot S dt$$

$$\delta Q_s = j_{\text{th}}(x) S dt$$

$$\delta Q = S dt (j_{\text{th}}(x+dx) - j_{\text{th}}(x)) = S dt \frac{\partial j_{\text{th}}}{\partial x} dx$$

Ex 5

air $T_A = -10^\circ\text{C}$

température $T_o(t)$

glace

surface S

eau liquide

solidification

eau $\rightarrow$ glace

$P_{\text{sol}} < 0$ $\text{est} < 0$

glace $\rightarrow$ eau

$L_{\text{fus}} > 0$

6) d'où:

$$T(x,t) = \frac{T_e - T_o(t)}{L(t)} x + T_o(t)$$

7) continuité du flux thermique en 0:

$$\dot{Q}_S = P_{th}(x=0^+)$$

$$P_{th}(x=0) = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} S$$

$$\text{et: } \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{T_e - T_o(t)}{L(t)}$$

d'où:

$$h(T_o(t) - T_A)S = -\lambda \frac{T_e - T_o(t)}{L(t)} S$$

$$\Rightarrow L(t) = \frac{\lambda (T_e - T_o(t))}{h(T_o(t) - T_A)}$$

8) graphiquement, on a qu'au bout de 20h, l'épaisseur de la glace $L(t) \approx 7 \text{ cm}$

Ce n'est pas suffisamment solide pour jouer dessus.

10)

$$P_{th}(x=0) = P_{th}(x=L)$$

$$-\lambda \frac{T_0(t) - T_E}{0 - L} \delta = l_{fusion} \rho \delta \frac{dL}{dt}$$

$$\lambda \frac{T_0(t) - T_E}{L} = l_{fusion} \left[\frac{dL}{dt} \right] \rho$$

$$T_0(t) = ?$$

20.

épaisseur

Exercice VI TD9:

a) $\langle T(0; t) \rangle = \Theta_0$

$$T_{\max} = \Theta_0 + T_0 = ?$$

$$T_{\min} = \Theta_0 - T_0 = ?$$

il faut proposer des valeurs numériques.

on choisit $T_0 = 10^\circ\text{C} = 283\text{ K}$.

b) $\delta Q = j_Q dt S$

$$P_{th} = j_Q S.$$

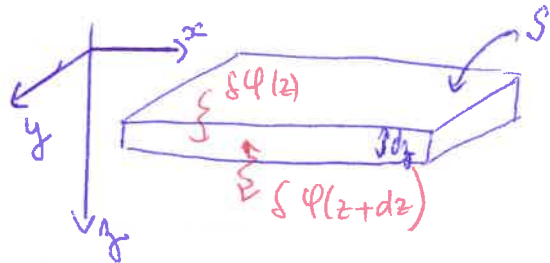
$$[j_Q] = \text{W} \cdot \text{m}^{-2}$$

$\vec{j}_Q$ = transfert thermique par unité de surface et de temps.

c) loi de Fourier: $\vec{j}_Q = -K \vec{\text{grad}}(T)$

$$[K] = \text{W} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$$

$$\begin{aligned} d) \delta Q &= (\delta Q_Q(z) - \delta Q_Q(z+dz)) dt \\ &= dt S [j_Q(z) - j_Q(z+dz)] \\ &= -S dt \left(\frac{\partial j_Q}{\partial z} \right) dz \end{aligned}$$



e) $dU = c_m dm dT = \underline{\rho_s S dz c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right) dt}.$

f) ainsi; en appliquant le premier principe au système d'épaisseur dz .

ainsi; $dU = \delta Q$

$$\Rightarrow \rho_s c_p \frac{\partial T}{\partial t} + K \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{K}{\rho_s c_p} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

on pose $D = \frac{K}{\rho_s c_p}$

le coefficient de diffusivité thermique en $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$.

g)

$$T(z, t) = \Theta_0 + T_0 e^{i(\omega t - k z)}$$

il s'agit d'une onde progressive de direction $\vec{e}_z$ et de sens $+\vec{e}_z$
on l'injecte dans l'équation de la chaleur :

tel que : $i\omega T = - \frac{K}{\rho c_s} k^2 T$

utilising D, plus facile à manipuler

$$\Leftrightarrow i\omega = - \frac{K}{\rho c_s} k^2$$

finallement ; $k = \pm e^{-i\pi/4} \sqrt{\frac{K}{\rho c_s \omega}}$

car $\sqrt{i} = \sqrt{e^{i\pi/2}} = e^{i\pi/4}$

on choisit $\oplus$ car l'onde se propage dans le sens $z \rightarrow$

ainsi $k' = \sqrt{\frac{K}{2\rho c_s \omega}}$ la pulsation spatiale ou nombre d'onde

et $k'' = -\sqrt{\frac{K}{2\rho c_s \omega}} = -\frac{1}{\delta}$ avec δ la profondeur de peau.

tel que $T(z, t) = \Theta_0 + T_0 \cos(\omega t - k' z) e^{k'' z}$

h) $T(z, t) \leq 10^{-2}$ $\omega = \frac{2\pi}{T}$ où $T = 1 \text{ an} = 3,2 \cdot 10^7 \text{ s}$ d'où $\omega = 2,0 \cdot 10^{-7} \text{ rad.s}^{-1}$

$\Leftrightarrow z_e \leq \frac{1}{-k''} \ln(10^{-2})$ AN: $z_e \leq - \sqrt{\frac{2 \times 2,65 \times 8,8 \times 10^6}{3}} \ln(10^{-2}) = 17,10^0 \text{ m}$
 $D = \frac{K}{\rho c_s \omega} = 1,4 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ 5,4 m

i) de sol a un comportement de filtre passe bas.

Car les variations quotidiennes de grande fréquence ne sont pas perçues à la profondeur $z_e = 17 \text{ km}$, donc les faibles variations de courte période ne sont pas perçues. ou !

grandeur relative ! on veut $\frac{T(z_e, t) - \Theta_0}{\Theta_0} < 0,01$

$\Rightarrow$

Fellmann Jean
 Zhang Olivier
 Geiger Romain

T D 9 : Conduction thermique

exercice pénible du choix de l'orientation
 de l'axe z puis dans le sens T décroissant.

Exercice VII :

1.

a. Par le 1^{er} principe de thermodynamique:
 $du = \delta Q$ appliqué au système élémentaire

$$du = \rho C dT$$

$$= \rho C S dz \frac{\partial T}{\partial t} dt = 0 \text{ direct au régime stationnaire.}$$

$$\begin{aligned} \delta Q_{\text{total}} &= \delta Q_e - \delta Q_s + \delta Q_{\text{source}} \\ &= \delta Q(z+dz) - \delta Q(z) + P \times S dz dt \\ &= j_Q(z+dz) S dt - j_Q(z) S dt + P \times S dz dt \\ &= \frac{\partial j_Q}{\partial z} dz S dt + P S dz dt. \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi, } \rho C S dz \frac{\partial T}{\partial t} dt = \frac{\partial j_Q}{\partial z} dz S dt + P S dz dt$$

$$\Rightarrow \rho C \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial j_Q}{\partial z} = P$$

par loi de Fourier : $j_Q = -\lambda \text{grad}(T) = -j_Q \vec{u}_z = -\lambda \frac{dT}{dz} \vec{u}_z$
 $\Rightarrow j_Q = +\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \quad (\lambda = K)$

comme on est en régime stationnaire $T(z, t) = T(z)$

$$\text{donc } \frac{\partial T}{\partial t} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{dT}{dz}$$

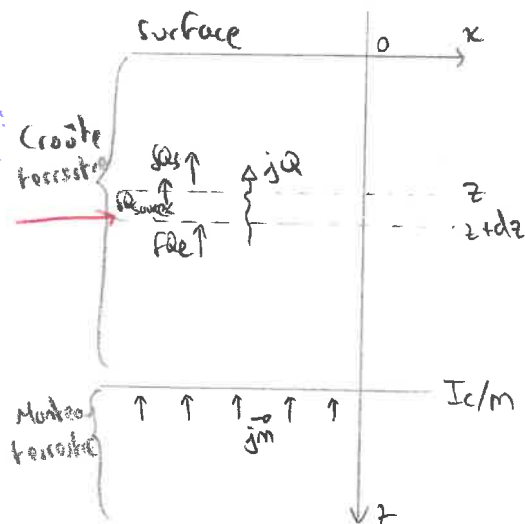
$$\text{Ainsi: } \boxed{-\lambda \frac{d^2 T}{dz^2} = P = P_0 e^{-z/H}}$$

b. On cherche $T(z)$

$$\frac{d^2 T}{dz^2} = -\frac{P_0}{\lambda} e^{-z/H}$$

$$\Rightarrow \frac{dT}{dz} = +\frac{P_0 H}{\lambda} e^{-z/H} + a$$

$$\Rightarrow T(z) = -\frac{P_0 H^2}{\lambda} e^{-z/H} + az + b$$



On sait que $T(z=0) = T_0 = \theta_0 = 0^\circ\text{C}$

Donc $T(z=0) = \theta_0 = -\frac{P_0 H^2}{\lambda} e^{-0/H} + a \times 0 + b$

donc $b = \theta_0 + \frac{P_0 H^2}{\lambda}$

Et on sait que $jQ(L_c) = -j\dot{m}$) avec $j\dot{m} > 0$ d'après le schéma. $\vec{j\dot{m}} = j\dot{m} \vec{u_z}$

or $\frac{dT}{dz} = +\frac{P_0 H}{\lambda} e^{-z/H} + a$

mais dans la suite vous avez pris $j\dot{m} > 0$ donc ici $j\dot{m} > 0$ également

$\Rightarrow \frac{jQ}{\lambda} = +\frac{P_0 H}{\lambda} e^{-z/H} + a$

$j\dot{m} = \lambda \left(\frac{dT}{dz} \right) (z=L_c)$

$\Rightarrow \frac{jQ(L_c)}{\lambda} = +\frac{P_0 H}{\lambda} e^{-L_c/H} + a = \frac{j\dot{m}}{\lambda}$

$\Rightarrow a = \frac{1}{\lambda} (-P_0 H e^{-L_c/H} + j\dot{m})$

Ainsi: $T(z) = -\frac{P_0 H^2}{\lambda} e^{-z/H} + \frac{1}{\lambda} (-P_0 H e^{-L_c/H} + j\dot{m}) \times z + \theta_0 + \frac{P_0 H^2}{\lambda}$

c. $\vec{j_s} = -j_s \vec{u_z} = jQ + j\dot{m} = -\lambda \left(\frac{dT}{dz} \right) (z=0) \vec{u_z}$ | les éléments sont en série, donc soumis au même flux.
 $= -jQ \vec{u_z} - j\dot{m} \vec{u_z}$
 $= -(P_0 H e^{-0/H} - P_0 H e^{-L_c/H} - j\dot{m}) \vec{u_z} = -j\dot{m} \vec{u_z}$

$\vec{j_s} = -[P_0 H (e^{-L_c/H} - 1) + j\dot{m}] \vec{u_z}$

d. Dans $T(z)$: on a $\frac{1}{\lambda} (-P_0 H e^{-L_c/H} + j\dot{m}) z$

on veut comparer les termes :

$P_0 H e^{-L_c/H}$ et $j\dot{m}$ | oui

$\Rightarrow 2,50 \times 10^{-6} \times 10 \times 10^3 e^{-4,5}$ et $35,0 \times 10^{-3}$
 $= 2,50 \times 10^{-6} \times 10^4 \times 10^{-2}$
 $= 2,50 \times 10^{-4} \ll 35,0 \times 10^{-3}$

le terme prépondérant est $-\frac{j\dot{m}}{\lambda} z$. | oui

Donc $T(z) = -\frac{P_0 H^2}{\lambda} e^{-z/H} + \frac{1}{\lambda} j\dot{m} z + \theta_0 + \frac{P_0 H^2}{\lambda}$

Ainsi: $T(z=1,70\text{km}) = -\frac{P_0 H^2}{\lambda} e^{-(1,70 \times 10^3)/H} + \frac{1}{\lambda} j\dot{m} + \theta_0 + \frac{P_0 H^2}{\lambda}$

A.N:

$T(z=1,70\text{km}) = \frac{2,50 \times 10^{-6} \times (10 \times 10^3)^2}{3} e^{-(1,70 \times 10^3)/10 \times 10^3} - \frac{1}{3} \times 35,0 \times 10^{-3} + 0 - \frac{2,50 \times 10^{-6} \times (10 \times 10^3)^2}{3}$

Et $j_s = -0,0247 \text{ W.m}^{-2}$

$\rightarrow$ application numérique douteuse
 $\rightarrow$ connecté mais trop de CS!

$\theta = 33^\circ\text{C OK!}$

on trouve $j_s = 0,060 \text{ W.m}^{-2}$

GROUPE 3:

(1)

Exercice VIII de TD 09 :

1) En faisant une analyse dimensionnelle à partir de l'équation de la chaleur donnée ($\frac{\partial T}{\partial t} = D_a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$), on a :

$$[D_a] = \frac{K \cdot s^{-1}}{K \cdot m^{-2}} = m^2 \cdot s^{-1} \text{ qui est en accord avec}$$

$$\frac{W \cdot K^{-1} \cdot m^{-1}}{(kg \cdot m^{-3})(J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1})} = \frac{W}{m^2 \cdot J} = \frac{J \cdot s^{-1}}{m^2 \cdot J} = m^2 \cdot s^{-1}$$

$$\text{D'où } D_a = \frac{\lambda_a}{\rho_a c_a} = \frac{1,5}{(1,7 \cdot 10^3)(7 \cdot 10^3)} = 1,26 \cdot 10^{-6} m^2 \cdot s^{-1} = 1,3 \cdot 10^{-6} m^2 \cdot s^{-1}$$

● Durée caractéristique de diffusion

$$\tau = \frac{L^2}{D_a} \quad \text{AN: } \tau = \frac{500^2}{1,26 \cdot 10^{-6}} = 1,98 \cdot 10^{11} s \approx 6300 \text{ ans (2 CS suffisent)}$$

Soit $\tau \approx 6292 \text{ ans} \rightarrow$ l'argile diffuse très lentement la chaleur.

2) $\frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=-L} = -\frac{NP_0}{2\lambda a S}$ correspond au flux

imposé par les déchets (chaleur exothermique) et le

B signe négatif montre que la chaleur diffuse vers la surface (gradient ascendant).

- (2)
- $T(z=0, t) = T_{\text{ext}}$ signifie que la température du sol en surface est maintenue constante (contact supposé parfait entre surface et argile). B

3) En régime permanent, on a :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = 0 \text{ car } T \text{ est indépendante du temps.}$$

$$\text{Donc } \text{Da} \frac{d^2 T}{dz^2} = 0 \Rightarrow \underline{T(z) = Az + B}$$

$$\text{or } \begin{cases} T(0) = T_{\text{ext}} \Rightarrow B = T_{\text{ext}} \\ A = \left. \frac{dT}{dz} \right|_{z=-L} = -\frac{N \cdot P_0}{2\lambda_a S} \end{cases}$$

$$\text{D'où } \boxed{T(z) = -\left(\frac{N \cdot P_0}{2\lambda_a S}\right)z + T_{\text{ext}}}$$

$$\bullet \boxed{T(-L) = \frac{N \cdot P_0}{2\lambda_a S} L + T_{\text{ext}}}$$

4) La condition de non dépassement ^{de quoi?} permet d'écrire :

$$T(-L) \leq T_{\text{max}} \Rightarrow \frac{N P_0}{2\lambda_a S} L + T_{\text{ext}} \leq T_{\text{max}}$$

$$\Rightarrow \frac{N P_0 L}{2\lambda_a S} \leq T_{\text{max}} - T_{\text{ext}}$$

$$\Rightarrow \boxed{S \geq \frac{N P_0 L}{T_{\text{max}} - T_{\text{ext}}}} \quad \underline{B}$$

(3)

$$AN: S \geq \frac{3,6 \cdot 10^4 \times 2000 \times 500}{\underbrace{(100 - 13)}_K} = \cancel{4,14} \cdot 10^8 \text{ m}^2$$

$1,4 \times 10^8$

Donc $S_{\text{nécessaire}} \approx \cancel{414} \text{ Km}^2 \xrightarrow{140} \text{c'est immense!}$

5) $\left| h = \frac{\Delta t}{N_t} \right.$ avec $\Delta t = \text{durée totale simulée}$
 $N_t = \text{nombre de pas temporels.}$
 $h = \text{pas de temps.}$ B

8) On utilise le développement de Taylor autour de z_i

$$(+)\begin{cases} T(z_i + k, t^n) = T(z_i, t^n) + k T_z(z_i, t^n) + \frac{k^2}{2} T_{zz}(z_i, t^n) \\ T(z_i - k, t^n) = T(z_i, t^n) - k T_z(z_i, t^n) + \frac{k^2}{2} T_{zz}(z_i, t^n) \end{cases}$$

$$T_{i+1}^n + T_{i-1}^n = 2 T_i^n + k^2 T_{zz}(z_i, t^n) + o(k^4)$$

$$T_{zz}(z_i, t^n) = \frac{T_{i+1}^n + T_{i-1}^n - 2 T_i^n}{k^2} + o(k^2)$$
 B

D'où l'approximation centrée en temps d'ordre 2

$$\left| \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right|_{z_i, t_i} \approx \frac{T_{n+1}^i - 2 T_n^i + T_{n-1}^i}{k^2}$$

7) • ligne 12 : c'est pour tester la stabilité afin (4)
d'empêcher l'exécution d'un calcul qui divergerait. B

? • ligne 15 : correspond probablement à la mise à
jour des nœuds intérieurs.
impos $T(-L) = T_{ext} + \frac{NP_0 L}{2\lambda a S}$

• ligne 20 : écartement de ~~tem~~ $T[t]$ par $T[t+1]$
pour passer à l'itération suivante. —

8) 19
$$T[t+1][x] = T[t][x] + \lambda * \left(T[t][x+1] - 2 * T[t][x] + T[t][x-1] \right)$$
 TB

où $\lambda = \frac{Da \cdot h}{k^2} \leq \frac{1}{2}$ —

9) Sur le graphique on observe que les profils
évoluent vers une droite quand t augmente.
→ c'est le régime stationnaire. —

l'évolution du gradient de température est plus fort
entre 0 et 32 qu'ensuite.