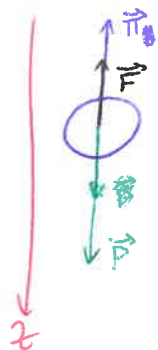


Exercice 1:

1- On considère une particule polluante sphérique de rayon r et de masse volumique ρ_0



On applique la 2^{ème} loi de Newton à cette particule en notant V son volume

$$\rho_0 V \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho_0 V \vec{g} - \rho_e V \vec{g} - 6\pi\eta r \vec{v}$$

V est le volume de la particule fluide

quand $\vec{v}$ atteint sa limite $\vec{v}_e$, $\frac{d\vec{v}}{dt} = 0$ ainsi on obtient

$$\vec{v}_e (\rho_0 - \rho_e) - 6\pi\eta r \vec{v}_e = 0$$

On $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ et $\vec{g} = g\vec{e}_z$ et $\vec{v}_e = v_e\vec{e}_z$

En projetant sur Oz on obtient donc $6\pi\eta r v_e = \frac{4}{3}\pi r^3 g (\rho_0 - \rho_e)$

$$\Leftrightarrow v_e = (\rho_0 - \rho_e) \frac{2r^2 g}{9\eta}$$

~~En résolvant~~ En projetant la première équation ~~projetée~~ sur $\vec{e}_z$ on obtient

$$\rho_0 \frac{4}{3}\pi r^3 \frac{dv}{dt} = \rho_0 \frac{4}{3}\pi r^3 g - \rho_e \frac{4}{3}\pi r^3 g - 6\pi\eta r v$$

$\rho_0 > \rho_e$ $v_e > 0$

$$\Leftrightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{g}{2\rho_0 r^2} v + g(1 - \frac{\rho_e}{\rho_0}) \Leftrightarrow \frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau_c} = g(1 - \frac{\rho_e}{\rho_0}) = \frac{v_e}{\tau_c}$$

Donc le temps caractéristique d'établissement de v_e est $\tau_c = \frac{2\rho_0 r^2}{\eta}$ ou

2- $\vec{j}$ est un courant particulaire, il s'exprime donc en $m^2 \cdot s^{-1}$

$\rightarrow$ nombre de particules qui traverse S par unité de temps et de surface

ici $\vec{j} = n(z) \vec{v}_e$

3- pour le courant $\vec{j}_D = j_D(z) \vec{e}_z$ considéré, la loi de Fick s'écrit

$$\vec{j}_D = -D \frac{\partial n}{\partial z}$$

si seul $\vec{j}$ existait, toutes les particules polluantes finiraient au fond du bocal, or ce n'est pas le cas, on modélise donc les particules mises en suspension par un courant de diffusion $\vec{j}_D$ ascendant

4- en régime permanent on a donc

$$\vec{f} + \vec{f}_D = \vec{0} \Leftrightarrow m(z) v_e \vec{e}_z + D \frac{\partial m}{\partial z} \vec{e}_z = \vec{0}$$

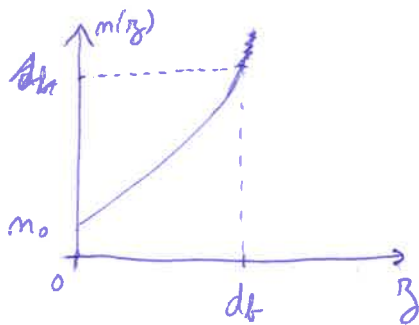
En projetant sur $\vec{e}_z$ on obtient alors

$$\frac{\partial m}{\partial z} + \frac{v_e}{D} m(z) = 0$$

On reconnaît une équation différentielle d'ordre 1 en m , en résolvant on obtient

$$m(z) = m_0 \exp\left(z \frac{v_e}{D}\right) \quad \text{où } m_0 = m(z=0) \text{ la densité particulière à la surface}$$

en régime stationnaire



On rappelle que le bassin est de profondeur d_b

5- comme la quantité de particule est la même à l'état initial qu'en régime stationnaire

On a $\int_0^{d_b} m(z) dz = N_0 d_b$

N_0 (non défini dans l'énoncé) est la densité particulière moyenne.

$$\Leftrightarrow N_0 = \frac{1}{d_b} \int_0^{d_b} m_0 e^{z \frac{v_e}{D}} dz = \frac{m_0 D}{d_b v_e} \left[e^{\frac{d_b v_e}{D}} - 1 \right]$$

$$\Leftrightarrow m_0 = N_0 \frac{d_b v_e}{m_0 D (e^{\frac{d_b v_e}{D}} - 1)}$$

6- On définit par analyse dimensionnelle les temps de sédimentation τ_s et de diffusion τ_D par

$$\tau_s = \sqrt{\frac{d_b^3}{v_e D}}$$

$$\text{et } \tau_D = \frac{d_b^2}{D}$$

$$\tau_s = \frac{d_b}{v_e}, \text{ tout simplement!}$$

7- plus τ_s est grand, plus m_0 est grand car les particules ne se déplacent pas beaucoup

(clarification, il faut que $N_0 \gg m_0$).

d'où $m_0 = N_0 \frac{\tau_s}{\tau_D} = \frac{D}{d_b v_e}$

$$m_0 = N_0 \frac{\tau_D / \tau_s}{e^{\tau_D / \tau_s} - 1}$$

$$\frac{m_0}{N_0} = \frac{\tau_D / \tau_s}{e^{\tau_D / \tau_s} - 1} \ll 1$$

$$\Rightarrow \tau_s \ll \tau_D$$

concentration moyenne

concentration en surface

TD 10 - Exercice II - Transport d'oxygène dans le sang
 GEIGER Suomain FELLMAN Jean ZHANG Olivier

1) On considère la peau comme un milieu aqueux, de coefficient de diffusion $D_{\text{eau}} \simeq 10^{-9} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$.

On peut estimer que la peau a pour épaisseur $e \simeq 1 \text{ cm}$.

On a que:

$$D_{\text{eau}} = \frac{e^2}{\tau_{\text{diffusion}}}$$

$$\Rightarrow \tau_{\text{diffusion}} = \frac{e^2}{D_{\text{eau}}}$$

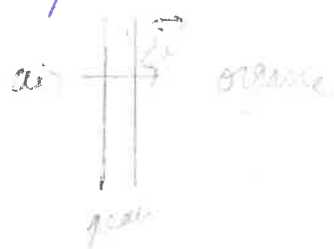
Application numérique:

$$\tau_{\text{diffusion}} = \frac{(10^{-2})^2}{10^{-9}}$$

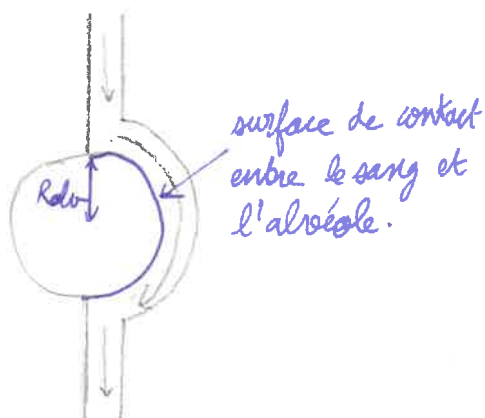
$$\Rightarrow \tau_{\text{diffusion}} = 10^5 \text{ s} \simeq 1 \text{ jour}$$

Cette durée est ~~très~~ longue. Le transport d'oxygène vers un organe ne peut donc pas se faire par diffusion de l'oxygène à travers la peau.

L'oxygène est avant tout transporté par un phénomène de convection.



2)



$$s_{ts} = \frac{\text{distance parcourue par le sang en contact avec l'alvéole}}{v}$$

$$\Rightarrow s_{ts} = \frac{\pi R_{\text{alo}}}{v}$$

Application numérique:

$$\tau_{ts} = \frac{\pi \times 10^{-4}}{10^{-3}}$$

$$\Rightarrow \underline{\tau_{ts} \approx 0,3 \text{ s.}} \quad \checkmark$$

3) On a que:

$$\tau_{\text{total}} = \tau_{\text{air}} + \tau_{\text{aqueux}}$$

où, avec un raisonnement similaire à la question 1:

$$\tau_{\text{aqueux}} = \frac{R_{\text{cap}}^2}{D_{\text{eau}}}$$

$$= \frac{(10^{-5})^2}{10^{-9}}$$

$$= 10^{-1} \text{ s.} \quad \checkmark$$

et:

$$\tau_{\text{air}} = \frac{R_{\text{alv}}^2}{D_{\text{air}}}$$

$$= \frac{(10^{-4})^2}{1,8 \times 10^{-5}}$$

$$\approx 6 \times 10^{-5} \text{ s.} \quad \checkmark$$

d'où:

$$\tau_{\text{total}} \approx 0,1 + 6 \times 10^{-5}$$

$$\text{donc } \underline{\tau_{\text{total}} \approx 0,1 \text{ s.}} \quad \checkmark$$

On observe que $\tau_{\text{total}} < \tau_{ts}$.

L'échange d'air entre l'alvéole et le sang a donc bien le temps de s'établir. ↗

Exercice IV: TD 10 - Merci de rédiger recto verso.

1.) Le nutriment est transporté par le sang en mouvement. Etant donné que le support est en mouvement, on étudie un phénomène de convection. B

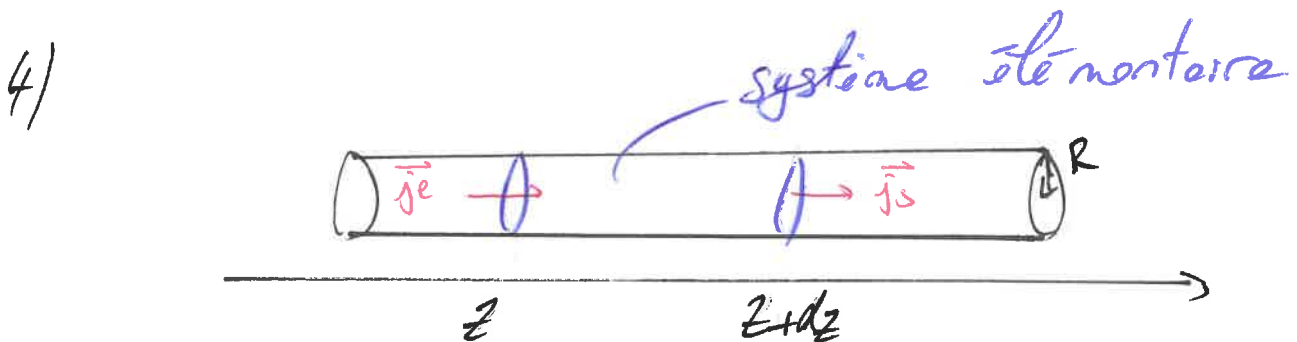
2.) On a : $\vec{j} = C_c(z) \vec{v}_s = C_c(z) v_s \vec{e}_z$ vérifier l'homogénéité

$\text{mol} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$ $\text{mol} \cdot \text{m}^{-3}$ $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$

3.) On a : $j = \gamma (C_c(z) - C_{org}(z))$

où : $[j] = \text{mol} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$
 $[C_c(z)] = [C_{org}(z)] = \text{mol} \cdot \text{m}^{-3}$ } Ainsi $[j] =$
 $[\gamma] = \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$

γ est donc homogène à une vitesse. (ce n'est pas vraiment une vitesse).



On effectue un bilan de matière sur un système de longueur dz .

• flux entrant en z : $j_e = C(z) v_s$

• flux sortant en $z+dz$: $j_s = C(z+dz) v_s$

attention, ici ce sont des densités de flux.

• flux vers l'organe: $\Phi = j \cdot S(z) R$
 (terme source)

$= \gamma (C_c(z) - C_{org}(z)) \cdot 2\pi R dz$

Surface latérale du cylindre

la longueur du système élémentaire

D'où: $j_e S(z)$

D'où: $j_e \pi R^2 - j_s \pi R^2 = \Phi = \gamma (C_c(z) - C_{org}(z)) 2\pi R dz$

$\Leftrightarrow C(z) v_s \pi R^2 - C(z+dz) v_s \pi R^2 = \gamma (C_c(z) - C_{org}(z)) 2\pi R dz$

$\Leftrightarrow \pi R^2 v_s (C(z) - C(z+dz)) = \gamma (C_c(z) - C_{org}(z)) 2\pi R dz$

$\Leftrightarrow R (-v_s) \frac{d(C(z))}{dz} dz = 2\gamma (C_c(z) - C_{org}(z)) dz$

$$\boxed{\frac{d(C(z))}{dz} = -\frac{2\gamma}{R \cdot v_s} (C_c(z) - C_{org}(z))}$$

5) • $C_{org}(z) = K$, alors:

$$\boxed{\frac{d(C(z))}{dz} = -\frac{1}{L_0} (C_c(z) - K)} \quad \text{ou} \quad L_0 = \frac{R v_s}{2\gamma}$$

mettre l'équa. diff sous forme canonique $\frac{dC(z)}{dz} + \frac{1}{L_0} (C(z) - K) = 0$

Ainsi, $C_c(z)$ admet une solution de la forme

$A \cdot e^{-z/L_0} + \textcircled{B}$ solution particulière = $\frac{K}{L_0}$

Finalement: $C_c(z) = K + (C_c(0) - K)e^{-z/L_0}$

c) Il faut que : $\left| \frac{C_c(L) - K}{C_c(0) - K} \right| \geq 30\%$

or d'après l'expression de $C_c(z)$:

$$C_c(L) = K + (C_c(0) - K)e^{-L/L_0}$$

$$\Leftrightarrow \frac{C_c(L) - K}{C_c(0) - K} = e^{-L/L_0} \geq 0,30 \Leftrightarrow -\frac{L}{L_0} \geq \ln(0,30)$$

$$\Leftrightarrow L \leq -\ln(0,30) L_0$$

$$\Leftrightarrow L_0 \geq \frac{L}{1,2}$$

$$\text{Or } L_0 = \frac{R v_s}{2 \gamma} \Leftrightarrow \gamma = \frac{R v_s}{2 L_0}$$

$$\text{d'où: } \gamma_{\text{MAX}} = \frac{R \cdot v_s}{2} \left(\frac{L}{1,2} \right)^{-1} = \frac{10^{-5} \cdot 2,8 \cdot 10^{-3} \cdot 1,2}{2 \cdot 1,2 \cdot 1 \cdot 10^{-3}}$$

$$= 1,7 \cdot 10^{-8} \text{ m.s}^{-1}$$

$$= 1,7 \cdot 10^{-5} \text{ m.s}^{-1}$$