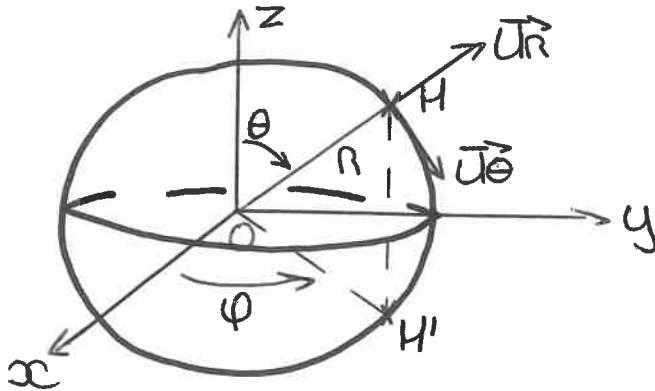


AD 1 - TD 1.1

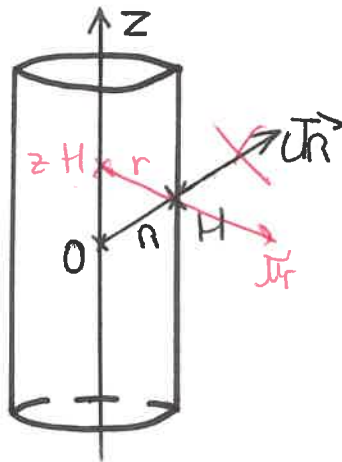
groupe 2

- 1) on utilise les coordonnées sphériques quand le système est une sphère : (à symétrie sphérique)



$$\vec{OH} = r \vec{U}_r$$

- 2) on utilise les coordonnées cylindriques quand le système possède un axe de révolution : T.B

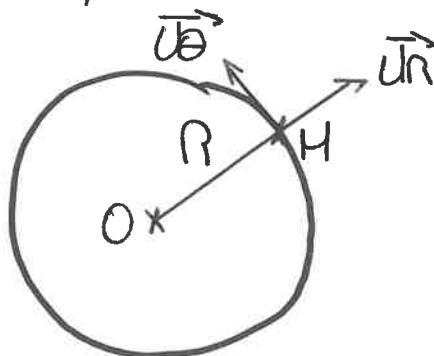


~~$\vec{OH} = r \vec{U}_r$~~
 Δ r cylindrique $\neq r$ sphérique

$$\vec{OH} = \vec{OH}_1 + \vec{HH}_1$$

$$= z \vec{U}_z + \rho \vec{U}_r$$

- 3) quand un point M est animé d'un mouvement circulaire, on utilise les coordonnées (cylindriques) : relatives
 de rayon R



$$\vec{OM} = R \vec{U}_r$$

$$\vec{v}(M) = \frac{d\vec{OM}}{dt} = R \dot{\theta} \vec{U}_\theta$$

$$\vec{a}(M) = \frac{d\vec{v}(M)}{dt}$$

$$= -R \dot{\theta}^2 \vec{U}_r + R \ddot{\theta} \vec{U}_\theta$$

si le mouvement est uniforme alors :

~~$\vec{v}(M) = \text{cte}$~~

~~$\vec{a}(M) = \frac{d\vec{v}(M)}{dt} = \vec{0}$~~

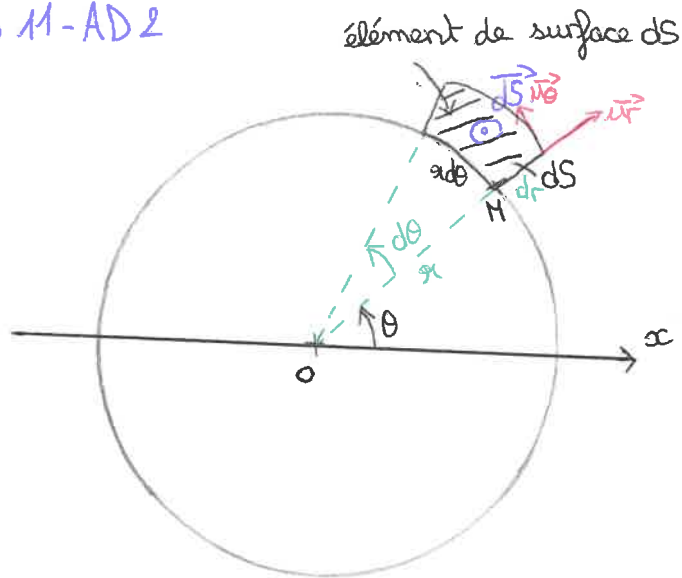
NON

circulaire uniforme $\Rightarrow R\dot{\theta} = \text{const} = \|\vec{v}\| = v$

$\Rightarrow \dot{\theta} = \text{const} = \frac{v}{R}$

donc $\vec{a} = -R\dot{\theta}^2 \vec{u}_r$
 $= -\frac{v^2}{R} \vec{u}_r$

l'accélération
est centripète



Vecteur unitaire:

$$\vec{OM} = r \vec{u}_r$$

Vecteur déplacement élémentaire:

$$d\vec{M} = dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta$$

Vecteur élément de surface:

$$dS = dr \times r d\theta$$

$$d\vec{S} = dr \times r d\theta \vec{u}_z$$

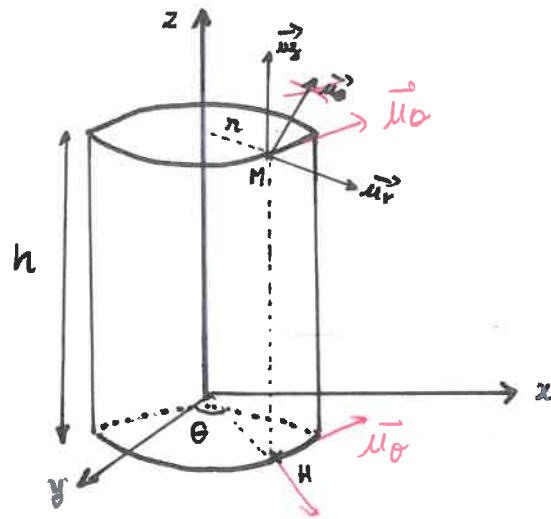
Surface d'un disque de rayon R :

$$\begin{aligned} S &= \iint dS = \int_0^R r dr \times \int_0^{2\pi} d\theta \\ &= \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^R \times [\theta]_0^{2\pi} \\ &= \frac{R^2}{2} \times 2\pi \\ &= \pi R^2 \end{aligned}$$

TP

TD 11

AD3 :



Déplacement élémentaire

• $d\vec{M} = dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + dz \vec{u}_z$

• Élément de volume

$dV = dr \times r d\theta \times dz$

• Volume d'un cylindre de hauteur h

$$V = \iiint dV = \iiint r dr d\theta dz = \int_0^R r dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h dz = \frac{R^2}{2} 2\pi h = \pi R^2 h$$

$dS_{lat} = R d\theta dz$

Donc $[d\vec{S} = r dr d\theta \vec{u}_z]$ = élément de surface supérieure

$d\vec{S}_{lat} = r d\theta dz \vec{u}_r$ ou

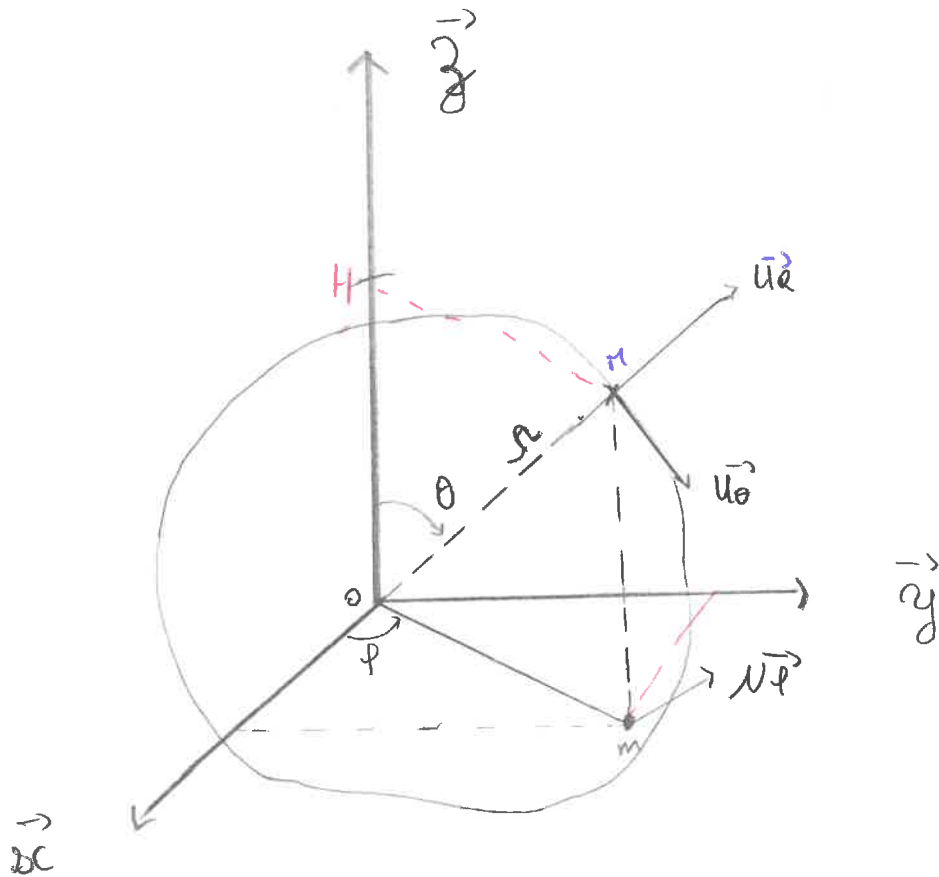
↳ élément de surface latérale.

AD 10

✓ A l'intrados, les lignes de champ sont plus serrées par rapport aux lignes de champ de l'extrados
Ainsi, $V_{intrados} > V_{extrados}$

refaire l'allure du schéma pour bien justifier.

1)



- $\vec{u}_r$: pointe radialement vers M $\rightarrow$
- $\vec{u}_\theta$: orthogonal à $\vec{u}_r$, dans le plan (OM, z)

2) Exprimons le vecteur déplacement élémentaire de M dans la base sphérique.

$$d\vec{r} = dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + \sin\theta \cdot r d\phi \vec{u}_\phi.$$

3) Exprimons un élément de volume en coordonnées sphériques.

$$d\tau = dr d\theta r^2 \sin\theta d\phi$$

$$\text{ou } V = \iiint d\tau$$

$$= \int_0^R r^2 dr \cdot \int_0^\pi \sin\theta d\theta \cdot \int_0^{2\pi} d\phi$$

$$= \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^R \cdot \left[-\cos\theta \right]_0^\pi \cdot \left[\phi \right]_0^{2\pi} = \frac{R^3}{3} \cdot 2 \cdot 2\pi = \frac{4R^3}{3} \cdot \pi.$$

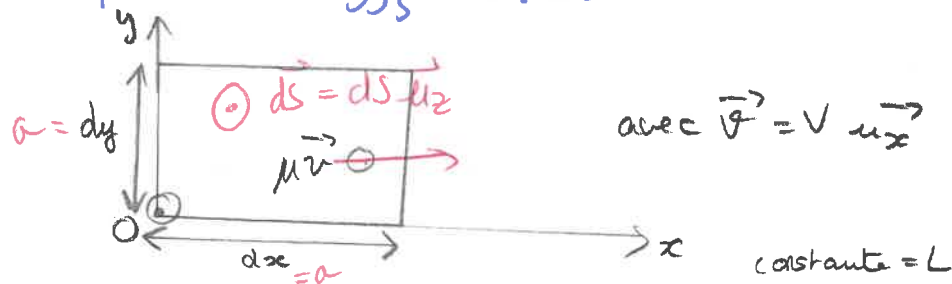
• Π est la surface de la sphère et la surface se paramètre avec (θ, φ)
et on voit que $\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = R \vec{u}_\theta$ et $\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = R \sin \theta \vec{e}_\varphi$

$$d\vec{S} = R^2 \sin \theta d\theta d\varphi \vec{u}_r.$$

$$\text{Donc } S = R^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta = 4\pi R^2.$$

a) Le carré est une surface ouverte.

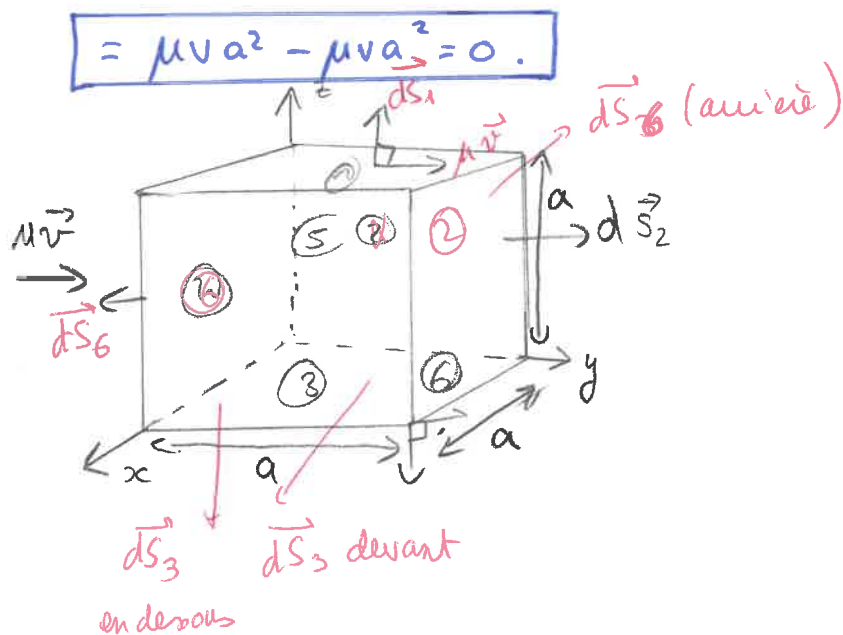
$$\Phi(\mu, \vec{v}) = \iint_S \mu \vec{v} \cdot d\vec{S}$$



$$\Phi(\mu \vec{v}) = \iint_S \mu \vec{v} \cdot d\vec{S} = 0 \text{ car } \vec{v} \perp d\vec{S}$$

b) On exprime le flux par addition de surfaces ouvertes :

$$\begin{aligned} \Phi = \oint_{\text{fermée}} \mu \vec{v} \cdot d\vec{S} &= \iint_{S_1} \mu \vec{v} \cdot d\vec{S}_1 + \iint_{S_2} \mu \vec{v} \cdot d\vec{S}_2 + \iint_{S_4} \mu \vec{v} \cdot d\vec{S}_4 + \iint_{S_5} \mu \vec{v} \cdot d\vec{S}_5 + \iint_{S_6} \mu \vec{v} \cdot d\vec{S}_6 + \iint_{S_3} \mu \vec{v} \cdot d\vec{S}_3 \\ &= 0 + \iint_{S_2} \mu v dS + 0 - \iint_{S_6} \mu v dS + 0 + 0 + \cancel{\mu v \int_0^a dx \int_0^a dy} - \cancel{\mu v \int_0^a dx \int_0^a dy} \\ &= \boxed{\mu v a^2 - \mu v a^2 = 0} \end{aligned}$$



et $\mu \vec{v} = \mu v \vec{u}_x$

1 fermé $\Rightarrow$ cube

6 ouvertes

$$\Phi = \mu v S$$

$$\mu \vec{v} \cdot d\vec{S}_1 = 0$$

$$\mu \vec{v} \cdot d\vec{S}_3 = 0$$

$$\mu \vec{v} \cdot d\vec{S}_4 = 0$$

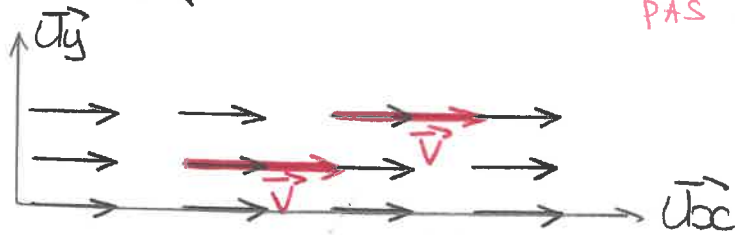
$$\mu \vec{v} \cdot d\vec{S}_5 = 0$$

AD 6 - TD 11

⚠ l'opérateur gradient s'applique UNIQUEMENT à un SCALAIRE PAS A UN VECTEUR

cas 1 : champ uniforme

coordonnées cartésiennes



$$\vec{v} = v \vec{e}_x$$

ici: $v_x = v$ $v_y = 0$ $v_z = 0$

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z$$

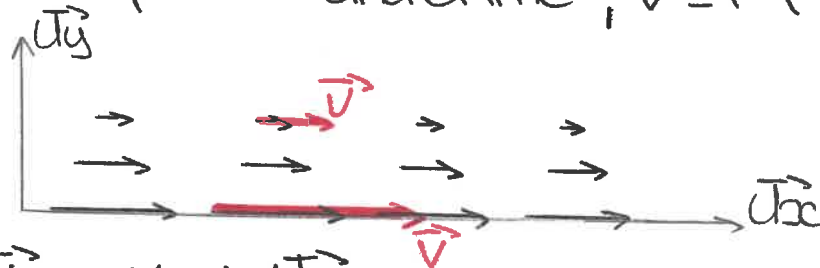
SCALAIRE

↓

$$(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) = v \vec{e}_x \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z \right) = v \frac{\partial}{\partial x}$$

cas 2 : champ non uniforme, $v = f(y)$

coordonnées cartésiennes



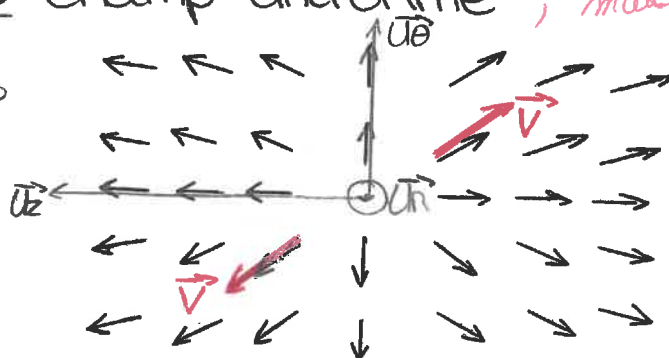
$$\vec{v} = v(y) \vec{e}_x$$

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{v} &= (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) v(y) \\ &= v(y) \frac{dv(y)}{dy} \end{aligned}$$

$$= v^2(y) \vec{e}_y = 0 \text{ car } v(y) \text{ ne dépend pas de } x.$$

cas 3 : champ ^{NON} uniforme

coordonnées polaires

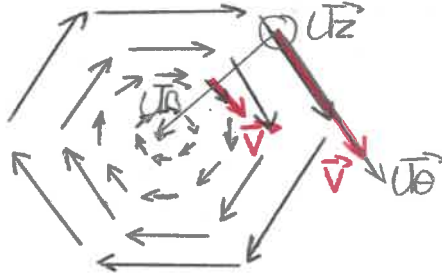


mais la valeur de $v = \|\vec{v}\|$ est uniforme.

$(\vec{v}, \vec{\text{grad}}) = v \vec{u}_r \cdot \left(\frac{\partial}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{\partial}{\partial z} \vec{u}_z \right)$
c'est cela qu'il faut déterminer.
 $\vec{v} = v \vec{u}_r$
 ~~$\vec{\text{grad}}(\vec{v}) = \frac{dv}{dr} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{dv}{d\theta} \vec{u}_\theta + \frac{dv}{dz} \vec{u}_z$~~
 $\vec{C}_{\text{convective}} = (\vec{v} \cdot \vec{\text{grad}}) \vec{v} = \left(v \frac{\partial}{\partial r} \right) \vec{v}$
 $= v \frac{dv}{dr} \vec{u}_r = \vec{0}$

cas 4 : champ non uniforme, $v = f(r)$

coordonnées polaires



$\vec{v} = v(r) \vec{u}_\theta$
 $\vec{C}_{\text{convective}} = (\vec{v} \cdot \vec{\text{grad}}) \vec{v}$
 $= v(r) \frac{1}{r} \frac{dv(r)}{d\theta} \vec{u}_\theta = \frac{1}{r} v^2(r) \frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta}$
 $= -\frac{v^2(r)}{r} \vec{u}_r$

en coordonnées cartésiennes :

$\text{div}(\vec{v}) = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$

en coordonnées cylindriques :

$\text{div}(\vec{v}) = \frac{1}{r} \frac{\partial (r v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$

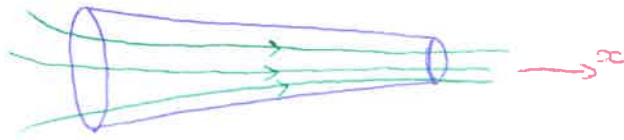
Les écoulements de la case 1 et de la case 3 sont des écoulements incompressibles et homogènes car les champs de vitesses sont uniformes donc les vitesses y sont à flux conservatifs (et le débit volumique Q_v est constant), contrairement aux cases 2 et 4.

pour 1 écoulement homogène et incompressible $\text{div} \vec{v} = 0$.

Cas 3 $\text{div}(v \vec{u}_r) = \frac{1}{r} \frac{\partial (r v)}{\partial r} = \frac{v}{r} \neq 0 \rightarrow$ 3 écoulement non incompressible homogène.

Cas 4 $\text{div}(v(r) \vec{u}_\theta) = \frac{1}{r} \frac{dv(r)}{d\theta} = 0$.

a)



$$b) \quad Dm = \frac{\delta m}{dt} = \rho(x,t) v(x,t) S(x) = \iint_S \rho \vec{v} \cdot d\vec{S} = \phi(\rho \vec{v})$$

$$Dv = \frac{\delta v}{dt} = v(x,t) S(x) = \phi(\vec{v})$$

↑ car écoulement unidirectionnel axial

c) $\rho = \text{cte}$ = écoulement incompressible et homogène.

$$Dm = \rho v(x,t) S(x) = \rho Dv$$

Dv se conserve dans un tube de courant

Dm (est constant) aussi!

d) stationnaire = indépendant du temps $\rightarrow v(x,t) = v(x) \rho(x,t)$

donc $Dm = \phi(\rho \vec{v}) = \rho(x) v(x) S(x) \rightarrow$ se conserve dans un tube de courant.

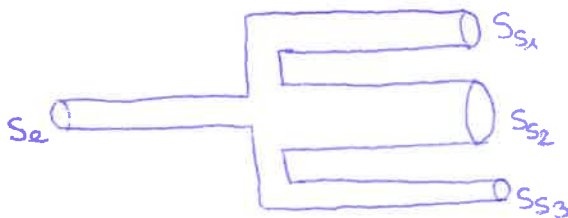
Ainsi $Dm_e = Dm_s$

De plus $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$, donc $\text{div}(\rho \vec{v}) = 0$ [équation locale de conservation de la masse]

$$\text{d'où } Dm = (\rho Dv) = \mu(x) Dv(x)$$

↳ const.

e)



incompressible et stationnaire
 $Dv = \text{const}$
 $\mu = \text{const}$
 $Dm = \mu Dv$

$\rho = \text{cte}$
 indépendant du temps
 $Dm = \text{cte}$

f) indépendant du temps

Dm se conserve

loi des nœuds

$$Dm_e = Dm_{s1} + Dm_{s2} + Dm_{s3}$$

On peut faire une analogie avec l'électricité : loi des nœuds.

De plus, incompressible et homogène : donc $Dv_e = Dv_{s1} + Dv_{s2} + Dv_{s3}$
 $\Rightarrow \mu = \text{const}$ ↳ conservation de Dv .

AD 9, TD 11

- Pour $\phi = 2 \text{ cm}$

$$V_m = \frac{D_m}{\mu S} = \frac{m}{\Delta t \mu S - \pi r^2} = \frac{5 \cdot 10 \cdot 10^{-3}}{30 \times 60 \times 7,5 \times \pi (1 \cdot 10^{-2})^2}$$
$$= \boxed{0,12 \text{ m.s}^{-1}} \text{ la vitesse d'écoulement du gaz dans le tuyau.}$$

- De même, pour $\phi = 5 \text{ cm}$

$$V_m = \frac{\delta m}{\Delta t \mu S} = \frac{\delta m}{\Delta t \mu (\pi r^2)} \quad \text{avec } S = \pi r^2$$

AN: $V_m = \frac{5 \cdot 10 \cdot 10^{-3}}{30 \times 60 \times 7,5 \times \pi \left(\frac{5}{2} \cdot 10^{-2}\right)^2} = 0,019 \text{ m.s}^{-1}$

L'hypothèse d'incompressibilité, soit que le débit volumique se conserve est vérifiée car les vitesses sont inférieures à la vitesse du son dans l'air (340 m.s^{-1}). B