Thème : Débits

APPLICATIONS DIRECTES

Questions en rapport avec les capacités exigibles :

1. Quelle est la masse volumique de l’eau ?
2. Calculer, à partir de la loi des gaz parfaits, la masse volumique de l’air à 25°C sous 1 bar.
3. Donner un ordre de grandeur d’un volume mésoscopique.
4. Donner un ordre de grandeur du volume d’une particule fluide.
5. Quel est le nombre de molécules dans une particule fluide d’eau ?
6. Cette particule d’eau est une goutte de pluie qui tombe verticalement. Dessinez son vecteur vitesse.
7. Dessiner à l’intérieur de la particule fluide les vecteurs vitesses de quelques molécules.
8. Quels sont les vecteurs vitesse microscopiques ? mésoscopiques ?
9. Définir le débit massique, unités, l’exprimer comme le flux d’un vecteur à travers une surface orientée.
10. Définir le débit volumique, unités, l’exprimer comme le flux d’un vecteur à travers une surface orientée.
11. Définir une ligne de courant, un tube de courant.
12. Écrire les équations bilans, globale ou locale, traduisant la conservation de la masse.
13. Quelle est la grandeur qui se conserve dans un tube de courant pour un écoulement stationnaire ?
14. Quelle est la grandeur qui se conserve dans un tube de courant pour un écoulement incompressible et homogène ?
15. Accélération locale, accélération convective, késako ?

1. Coordonnées sphériques et cylindriques :

1. Dans quelle condition utilise-t-on les coordonnées sphériques ? Les construire à partir de la donnée d’un point M et l’origine O du repère. Exprimer $\overrightarrow{OM}$ dans la base sphérique.
2. Mêmes questions pour les coordonnées cylindriques.
3. On considère un point M animé d’un mouvement circulaire. Quel système de coordonnées utiliseriez-vous pour décrire le mouvement de ce point ? Déterminer sa position, sa vitesse et son accélération. Que deviennent ces grandeurs si le mouvement est uniforme ?

2. Surface d’un disque

On repère un point M en coordonnées polaires.
Définir et représenter les vecteurs unitaires au point M de la base polaire.
Exprimer le vecteur déplacement élémentaire de M dans la base polaire.
Exprimer un élément de surface en cordonnées polaires. Exprimer le vecteur élément de surface. En déduire la surface d’un disque de rayon R.

3. Volume d’un cylindre

On repère un point M en coordonnées cylindriques.
Définir et représenter les vecteurs unitaires au point M de la base cylindrique.
Exprimer le vecteur déplacement élémentaire de M dans la base cylindrique.
Exprimer un élément de volume en cordonnées cylindriques. En déduire l’expression du volume d’un cylindre de hauteur h et rayon R.
Le point M étant sur la surface latérale du cylindre précédent, donner l’expression d’un élément de surface latérale de ce cylindre, puis le vecteur élément de surface.

4. Volume d’une sphère

On repère un point M en coordonnées sphériques.
Définir et représenter les vecteurs unitaires au point M de la base sphérique.
Exprimer le vecteur déplacement élémentaire de M dans la base sphérique.
Exprimer un élément de volume en cordonnées sphériques. En déduire l’expression du volume d’une sphère de rayon R.

Le point M étant sur la surface de la sphère précédente, donner l'expression d'un élément de surface de cette sphère, puis le vecteur élément de surface.

5. Calculs de flux

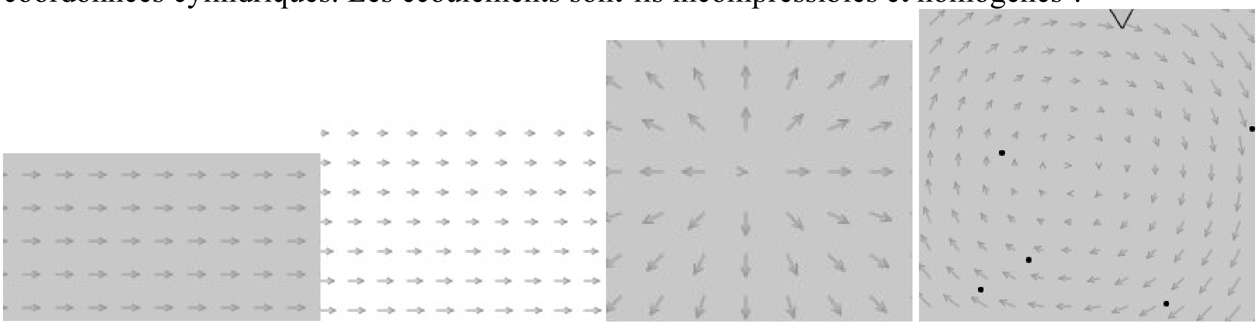
a) On considère un carré de côté a qui se trouve dans le plan (Oxy). Est-ce une surface ouverte ou fermée ? Déterminer, à travers ce carré, le flux du vecteur densité courant de masse si celui-ci est dans le plan (Oxy).

Même question si le vecteur densité courant de masse est uniforme et perpendiculaire à ce carré.

b) On considère maintenant un cube d'arête a. Déterminer les surfaces ouvertes et la surface fermée constituant ce cube. Déterminer le flux d'un vecteur densité courant de masse uniforme à travers ce cube.

6. Modélisation du vecteur vitesse

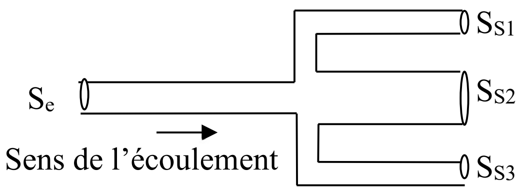
Modéliser le vecteur vitesse dans les quatre cartes de champ stationnaire ci-dessous.
A-t-on un champ uniforme ? Déterminer l'accélération convective pour chaque cas.
Rappeler l'expression de $\mathrm{div}\vec{v}$ en coordonnées cartésiennes. Rechercher son expression en coordonnées cylindriques. Les écoulements sont-ils incompressibles et homogènes ?



7. Débits massiques et débits volumiques :

Un fluide circule dans une canalisation de section S(x) décroissante. On suppose que l'écoulement est unidirectionnel selon l'axe de la canalisation : sur une section droite, la masse volumique $\mu(x, t)$ et la vitesse $v(x, t)$ sont uniformes.

a. Représenter un tube de champ de cet écoulement
b. Donner les expressions des débits massiques D_m et volumique D_v.
c. L'écoulement est incompressible et homogène. Que dire de D_m et D_v ?
d. L'écoulement est stationnaire. Même question.
e. L'écoulement est stationnaire et incompressible et homogène. Qu'en déduire ?
f. On suppose que l'écoulement schématisé ci- contre est stationnaire. Que peut-on en déduire ? Avec quel autre domaine de la physique peut-on faire une analogie ? Que peut-on dire si, de plus l'écoulement est incompressible et homogène ?



8. Perfusion

On veut perfuser un patient en 60 min avec un flacon de 500 mL de plasma de densité d = 1,03. L'aiguille utilisée a un rayon intérieur r = 0,2 mm. Déterminer les débits massique et volumique du plasma, ainsi que sa vitesse moyenne dans l'aiguille.

9. Conservation du débit

Quelle est la vitesse d'écoulement d'un gaz dans un tuyau cylindrique si 510g de ce gaz s'écoule par demi-heure à travers une section du tuyau ? Le diamètre du tuyau est de 2 cm et la masse volumique du gaz de 7,5 kg.m^{-3}. Le tuyau subit un élargissement. La nouvelle section a un diamètre de 5 cm. Quelle est la vitesse du gaz, supposé en écoulement incompressible dans la section élargie ? L'hypothèse d'incompressibilité de l'écoulement est-elle judicieuse ?

10. Ecoulement autour d’une aile d’avion

L’écoulement de l’air autour du profil d’une aile d’avion est représenté sur la figure 2. Il permet de visualiser l’allure des lignes de courant lors d’un écoulement à faible incidence et à forte incidence. Comparer qualitativement le module v de la vitesse du fluide aux points situés au voisinage de l’intrados et de l’extrados.

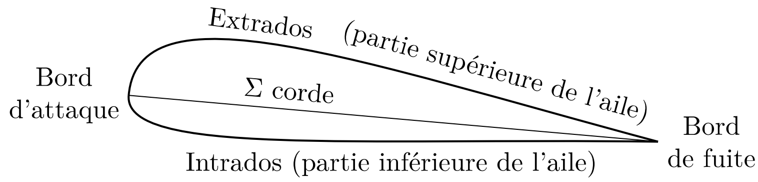


Figure 1 Profil d’une aile d’avion

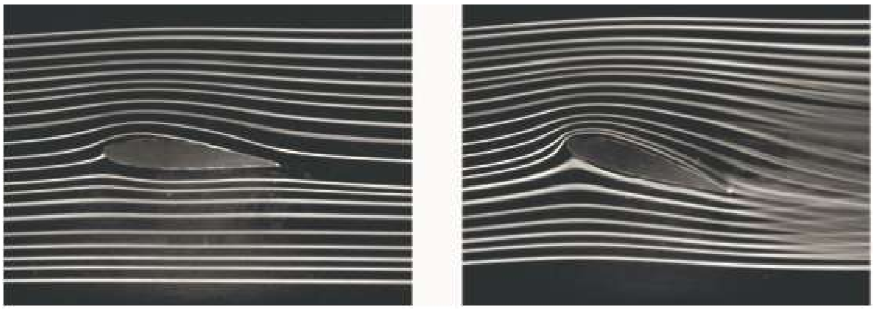


Figure 2 Lignes de courant autour du profil d’une aile d’avion[1]

EXERCICES

I. Gonflage d’un spa

Le manuel d’utilisation fournit quelques données numériques :

Hauteur du spa gonflé sans couverture	$H = 1{,}0\,\mathrm{m}$
Hauteur d’eau	$h_e = 3/4\,\mathrm{m} = 75\,\mathrm{cm}$
Diamètre intérieur	$d_{\mathrm{int}} = \sqrt{2}\,\mathrm{m} = 1{,}4\,\mathrm{m}$
Diamètre extérieur	$d_{\mathrm{ext}} = 2{,}0\,\mathrm{m}$
Temps de gonflage	$t_g = 10\,\mathrm{min}$
Seuil d’ouverture de la valve de surpression	$\delta p = 0{,}1\,\mathrm{bar}$

L’enveloppe du spa se gonfle d’air, considéré comme un gaz parfait, grâce à une pompe contenue dans l’unité de contrôle. On considère que l’enveloppe prend sa forme définitive sans pli dès que la pression intérieure à l’enveloppe atteint la pression de l’air extérieur supposée égale à 1 bar. On ne prendra pas en compte l’épaisseur du tapis de fond en plastique du spa.

1. Quel est le débit volumique moyen Dp de la pompe en litres par seconde ?
2. Une fois gonflé en un temps tg, le volume du spa reste constant. Si l’utilisateur oublie d’arrêter la pompe, au bout de combien de temps la valve de surpression s’ouvre-t-elle ?

On supposera ici que la température de l’air dans l’enveloppe reste constante.

3. Le spa est gonflé en tg un matin à 15°C. En supposant que la pression extérieure et que le volume de l’enveloppe du spa restent constants au cours de la journée mais que la température extérieure peut augmenter, à partir de quelle température la valve de surpression s’ouvre-t-elle ?

II. Ecoulement de Poiseuille cylindrique :

Soit l’écoulement stationnaire d’un fluide de masse volumique μ constante, dans un tube horizontal de longueur *L* et de section circulaire de rayon a, parallèle à l’axe *Oz* du tube.

1. Quel est le système de coordonnées adéquat pour exprimer le champ des vitesses ? A priori quelle est la direction de ce champ ? De quels paramètres dépend-il ? A l’aide du formulaire, déterminer l’expression de la divergence du vecteur densité courant de masse.

La valeur algébrique du champ des vitesses est de la forme $v = k(a^2 - r^2)$ où k est une constante et r la distance à l’axe du cylindre.

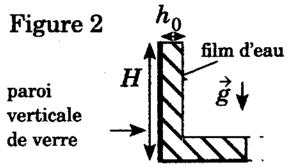
2. Que devient alors la divergence du vecteur densité courant de masse ? Est-ce cohérent ?
3. Quelle est l’unité de k ? Représenter le profil des vitesses sur une section du tuyau.
4. Calculer le débit massique Dm. Vérifier l’homogénéité de l’expression obtenue.
5. Déterminer la valeur de la vitesse moyenne, ou vitesse débitante, de l’écoulement définie par $v_{moy} = Dm/\mu S$ où S est la section du tuyau.

III. Débit dans un canal

On considère un canal de section rectangulaire, de hauteur h selon la verticale ascendante Oz, et de largeur L, dans lequel s'écoule de l'eau de masse volumique μ dans le sens + $\vec{u}_x$.

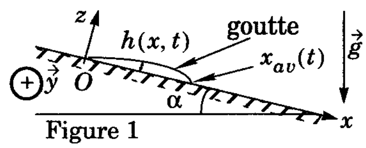
1. Dans ce canal, le champ des vitesses est donné par $\vec{v}(z) = az(z-2h)\,\vec{u}_x$. Cet écoulement est-il stationnaire ? uniforme ? Déterminer le vecteur densité de courant de masse.
2. Tracer le profil des vitesses dans le canal. Quel est le signe de a ? Quelle est sa dimension ?
3. Déterminer le débit massique à travers une section droite S du canal. En déduire la vitesse moyenne (ou vitesse débitante) de l'écoulement définie par $v_{moy} = D_m / \mu S$. Vérifier l'homogénéité de la relation obtenue.

IV. Durée de vie d'un film d'eau



Une expérience de la vie quotidienne : lorsqu'on incline rapidement un verre d'eau puis qu'on le repose en position verticale, un film d'eau apparaît, paroi puis disparaît progressivement en s'écoulant vers fond (figure 2). On cherche à évaluer la durée de vie de ce film.

Pour ce faire, on étudie dans un premier temps l'écoulement incompressible d'une goutte d'un fluide d'épaisseur h(x, t) localisé entre x = 0 et x = $x_{av}(t)$, de masse volumique μ, sur un plan incliné d'angle α.



On note $\vec{v}(M,t)$le champ des vitesses. On admet que ce champ est unidirectionnel et que l'expression de sa composante selon l'axe Ox est donnée par la relation : $v_x(x,z,t) = a\left(h(x,t).z - \dfrac{z^2}{2}\right)$.

1. Quelle est l'unité de a ? Est-ce que cet écoulement est stationnaire ? Calculer la valeur du divergent du vecteur densité de courant de masse.
2. On montre que pour un écoulement incompressible div$\vec{v}(M,t)$=0. Que peut-on en déduire pour la fonction h ? Comment évolue-t-elle dans le temps ? Quelle est alors la forme de la goutte ?
3. Exprimer le débit massique à travers la section d'épaisseur h(x, t) et de largeur L en fonction de L, h(x, t) et a.
4. En admettant que le film initial d'eau a une épaisseur uniforme h_0 et une hauteur H = 10 cm et qu'à la base du film, son épaisseur reste constamment égale à h_0, Déterminer la durée de vie T du film, définie par la durée mise pour passer de la position verticale à la position horizontale, en fonction de a et h_0 et calculer T pour h_0 = 0,5 mm. a = 10^7 SI.