

⚠ laisser 1 marge!

Exercice I: Gonflage d'un spa

1. on cherche le débit volumique moyen D_p en $L \cdot s^{-1}$

Par définition: $D_p = \frac{\text{volume}}{\text{temps}}$
 $m^3 \cdot s^{-1}$

ici le volume du spa vaut: $\pi \left(\left(\frac{d_{ext}}{2} \right)^2 - \left(\frac{d_{int}}{2} \right)^2 \right) \times H$

$$V = \frac{\pi}{4} (d_{ext}^2 - d_{int}^2) \times H$$

et le temps $t = 10 \times 60 s$

A.N:

$$D_p = \frac{\pi}{4} (2^2 - \sqrt{2}^2) \times 1 \times \frac{1}{10 \times 60}$$
$$= 2,6 \times 10^{-3} m^3 \cdot s^{-1}$$

$D_p = 2,6 L \cdot s^{-1}$ ✓

2. on cherche le temps après gonflage au bout duquel la valve de surpression va s'ouvrir:

Par loi des gaz parfait: $PV = n_{air} RT$

$$\Leftrightarrow P = n_{air} \frac{RT}{V}$$

ainsi: la pression est proportionnelle à la quantité d'air à l'intérieur du spa.

or n_{air} (à la fin du gonflage) = $D_p \times t_g \times \frac{N}{M}$ avec M la masse molaire ($kg \cdot mol^{-1}$)

N la masse volumique de l'air en $kg \cdot m^{-3}$

or comme V reste constant après le gonflage = $n_{air2} = D_p \times t_f \times \frac{N}{M} = \frac{V P_1}{RT}$

avec $P_1 = 1,1 \text{ bar} = P + \delta P$

ainsi: $\frac{P_1}{P} = \frac{t_f}{t_g} \Leftrightarrow t_f = 1,1 t_g$

Donc $t_f = 1,1 (10 \text{ min}) = 11 \text{ min}$

d'où $\Delta t = t_f - t_g = 1 \text{ min}$

Donc après une minute supplémentaire de gonflage, donc 11 min au total, la valve de surpression s'activera. ✓

3. De même que pour 2. par loi des gaz parfaits $PV = nRT$

$$\Rightarrow T = \frac{PV}{nR}$$

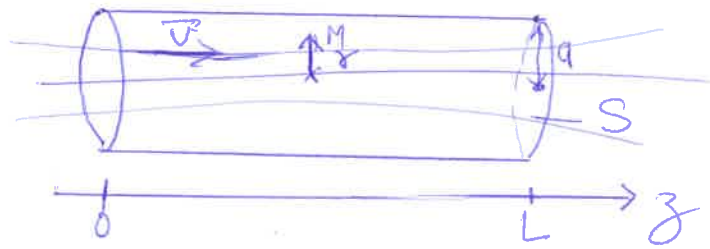
$$\text{Donc } \frac{T_1}{T_0} = \frac{P_1}{P} \Rightarrow T_1 = 1,1 T_0$$

4.N:

$$T_1 = 1,1 \times 288 = 316,8 \text{ K} \\ = 43,65^\circ \text{C}$$

Ainsi à partir de 43,65°C la valve de surpression peut s'activer

↳ Actiop de CS
↳ 44°C ... ça va!



- 1) Écoulement et le tube ont une symétrie de révolution donc le système de coordonnées adéquat est le système cylindrique (r, θ, z) ;

- le champ des vitesses est parallèle à l'axe du tube donc :

$$\vec{v} = v(z) \vec{e}_z$$

$$\text{div} \vec{v} = \frac{\partial}{\partial z} v(z) = 0$$

$$\vec{v} = k(a^2 - r^2) \vec{e}_z$$

$$\text{div} \vec{v} = \mu \frac{\partial}{\partial z} v(z) = \mu \frac{\partial}{\partial z} (a^2 - r^2) = 0 \text{ car } v \perp z$$

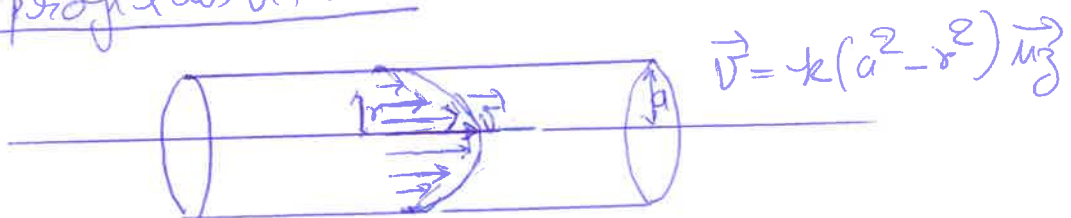
Conséquent car l'écoulement est stationnaire et incompressible

$$3) v = k(a^2 - r^2)$$

$$[k] = \frac{[v]}{[a^2 - r^2]} = \frac{\text{m} \cdot \text{s}^{-1}}{\text{m}^2} = \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$[k] = \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$$

profil des vitesses



$$4) D_m = \iint_S \mu \vec{r}(r) \cdot d\vec{S}$$

$$D_m = \iint \mu k (a^2 - r^2) \vec{u}_z \cdot r dr d\theta \vec{u}_z$$

$$= \mu k \iint (a^2 - r^2) r dr d\theta$$

$$= \mu k \int_0^a (a^2 - r^2) r dr \int_0^{2\pi} d\theta$$

$$= \mu k \left(\int_0^a r a^2 dr - \int_0^a r^3 dr \right) [\theta]_0^{2\pi}$$

$$= 2\pi \mu k \left(a^2 \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^a - \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^a \right)$$

$$= 2\pi \mu k \left(\frac{a^4}{2} - \frac{a^4}{4} \right)$$

$$D_m = \frac{\pi a^4 \mu k}{2}$$

$$[D_m] = \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{s} \cdot \text{kg} \cdot \frac{m^3}{m^3} = \text{kg} \cdot s^2$$

Cl est homogène

$$5) V_{mag} = \frac{D_m}{\mu S}$$

$$= \frac{1}{\mu S} \times \frac{\pi a^4 \mu k}{2}$$

$$= \frac{\pi a^4 k}{2 S}$$

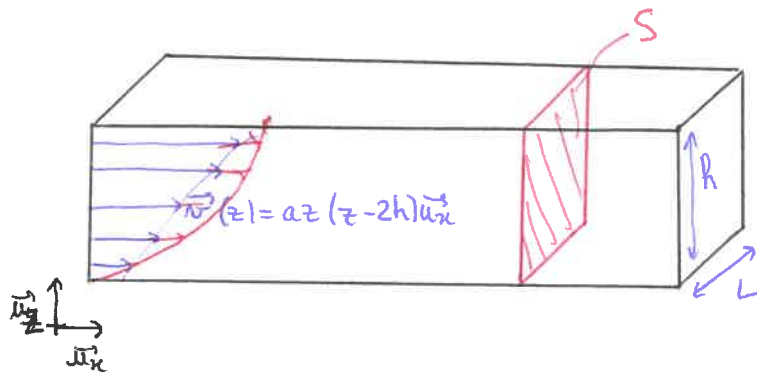
$$\text{avec } S = \pi a^2$$

$$= \frac{\pi a^4 k}{2 \pi a^2}$$

$$= \frac{a^2 k}{2}$$

$$V_{mag} = \frac{a^2 k}{2}$$

TD 11 - Exercice III



$$z \in [0, h]$$

$$v(0) = 0$$

$$v(h) = -ah^2$$

$$\left(\frac{dv}{dz}\right)(z=h) = 0 \quad z=h \text{ est un max,}$$

- La vitesse ne dépend pas du temps donc l'écoulement est stationnaire.
 - La vitesse dépend de z donc l'écoulement n'est pas uniforme.
 - vecteur densité de courant de masse: $\vec{j}_m = \mu \vec{v}$

$$\vec{j}_m = \mu a z(z-2h) \vec{u}_x$$

- profil des vitesses: sur le schéma
 - a est négatif car la parabole est concave.
 (car $v(h)$ doit être dans le sens $+\vec{u}_x$)

$$[a] = \frac{[v]}{[z^2 - 2hz]} = \frac{m \cdot s^{-1}}{m^2} \quad \text{donc} \quad [a] = m^{-1} \cdot s^{-1}$$

$$\begin{aligned}
 3) \quad D_m &= \iint_S \mu \vec{v} \cdot d\vec{S} \\
 &= \iint_S \mu a (z^2 - 2zh) \vec{u}_x \cdot dz dy \vec{u}_x \\
 &= \mu a \int_0^h z^2 - 2zh dz \int_0^L dy \\
 &= \mu a \left[\frac{z^3}{3} - z^2 h \right]_0^h L \\
 &= \mu a L \left(\frac{h^3}{3} - h^3 \right)
 \end{aligned}$$

$$D_m = -\frac{2}{3} \mu a L h^3$$

donc
$$V_{\text{moy}} = \frac{Dm}{\mu S}$$

$$= \frac{-\frac{2}{3} \mu a L h^3}{\mu L h}$$

$$\boxed{V_{\text{moy}} = -\frac{2}{3} a h^2} > 0 \text{ car } a < 0$$

$$[a][h^2] = m^{-1} \cdot s^{-1} \cdot m^2 = m \cdot s^{-1}$$

donc $[V_{\text{moy}}] = m \cdot s^{-1}$

ainsi la relation est bien homogène.

B

$$1) \quad v_x(x, z, t) = a \left(h(x, t) z - \frac{z^2}{2} \right)$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 $m \cdot s^{-1}$ $m^{-1} \cdot s^{-1}$ m m m^2

l'écoulement n'est pas stationnaire car v_x dépend du temps.

$$\vec{v} = v_x \vec{u}_x + v_y \vec{u}_y + v_z \vec{u}_z$$

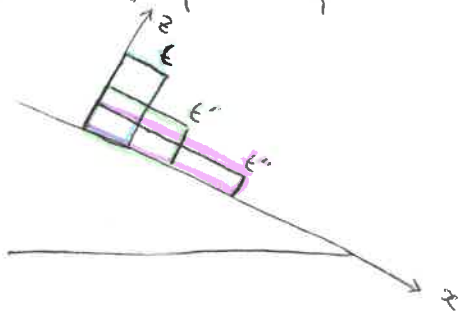
$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 0 0 0

$$\text{div}(\mu \vec{v}) = \frac{\partial(\mu v)}{\partial x} = \mu \frac{\partial}{\partial x} \left(a \left(h(x, t) z - \frac{z^2}{2} \right) \right) = \boxed{\mu a z \frac{\partial h(x, t)}{\partial x}}$$

pour l'écoulement incompressible.

$$2) \quad \text{div} \vec{v}(H, t) = 0 \quad \text{donc} \quad \frac{\partial h(H, t)}{\partial x} = 0 \quad \text{car} \quad z a \neq 0$$

Donc l'épaisseur de la goutte ne dépend pas de la position, elle ne dépend que du temps.



$$3) \quad D_m(x, t) = \iint_S \mu \vec{v} d\vec{S} = \mu \iint_S \vec{v} d\vec{S} = \mu \iint_S a \left(h(x, t) z - \frac{z^2}{2} \right) \vec{u}_x dz dy \vec{u}_x$$

$$= \mu \int_0^h \left(a h z - \frac{z^2}{2} \right) dz \int_0^L dy$$

$$= \mu a \left(h \int_0^h z dz - \int_0^h \frac{z^2}{2} dz \right) \int_0^L dy$$

$$= \mu a \left(h \frac{h^2}{2} - \frac{h^3}{6} \right) L = \boxed{\frac{\mu L a h^3}{3}}$$

$$4) \quad D_m = \frac{\mu a h_0^3}{3} = \frac{\delta m}{\Delta t} = \frac{\overbrace{\mu H h_0 L}^{\text{volume}}}{\underbrace{\Delta t}_{\text{temps}}}$$

$$\Rightarrow \frac{a h_0^2}{3} = \frac{H}{T} \Rightarrow T = \frac{3H}{a h_0^2} = \frac{3 \times 10 \cdot 10^{-2}}{10^7 \times (0,5 \cdot 10^{-3})^2} = 0,12 \text{ s}$$

$$\boxed{T = 0,12 \text{ s}}$$

B