Thème : forces de contact sur un fluide

APPLICATIONS DIRECTES

1. Mesure de pression en statique

A quelle différence de pression correspond une hauteur d'eau de 1mm ?
Par quelle hauteur d'eau exprimerait-on la pression atmosphérique ?
Avant une remontée rapide vers la surface, pourquoi les plongeurs sous-marins vident-ils leurs poumons de l'air qu'il contient ?
Quel serait le volume atteint à la surface par 3L d'air dans les poumons à 10 m de profondeur ?

2. Force de pression sur un barrage vertical

Soit un barrage constitué d'un mur droit vertical. La hauteur de l'eau est h=5m, la largeur du cours d'eau est ℓ = 4m.

1. Exprimer la pression de l'eau en fonction de l'altitude z. On suppose que le fond du barrage est à l'altitude z = 0.
2. Donner l'expression de la résultante des forces de pression élémentaires exercée par l'eau et l'air sur un élément de surface dS = ℓdz du barrage.
3. En déduire la résultante des forces de pression subie par le barrage.
4. En déduire la force exercée par le sol sur le mur pour maintenir le barrage en équilibre. Que se passerait-il si cette force était insuffisante ?

3. Nivellement barométrique

On assimile l'atmosphère à de l'air, supposé parfait de masse molaire M en équilibre isotherme.
Déterminer la pression de l'atmosphère en fonction de l'altitude z.
Calculer la différence de pression relative maximale entre le pied et le sommet de la tour Burj Khalifa de Dubaï, haute de 828 m, sachant que la température moyenne est de 25°C en hiver et 40°C en été.

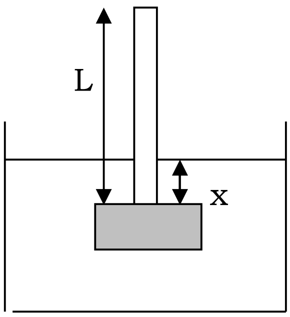
4. Traction d'une péniche sur un canal

Une péniche de surface S est animée d'un mouvement rectiligne uniforme de vitesse $V_o\vec{u}_x$ sur l'eau d'un canal de profondeur h, au repos et de viscosité η.

1. Justifier que le champ des vitesses à l'intérieur du canal et sous la péniche peut se mettre sous la forme $v(x, z)\,\vec{u}_x$. L'axe Oz est vertical, orienté vers le haut.
2. Quelle est la conséquence de l'incompressibilité du fluide sur le champ des vitesses ?
3. Donner en la justifiant l'expression de v(z=0) et v(z=h).
4. Déterminer la forme la plus simple possible pour la fonction v(z).
5. En déduire l'expression des forces de contact exercées par l'eau sur la péniche.

EXERCICES

I. Densimètre :



Un densimètre de masse M comporte un tube cylindrique fermé de masse m, de longueur L et de section S, lesté à sa base par du mercure enfermé dans une ampoule de verre de volume V_o. On le plonge dans un liquide de masse volumique ρ et l'équilibre est obtenu lorsque la partie immergée du tube a une hauteur x. Etablir la relation entre ρ et x. La graduation en densité est-elle linéaire ?

II. Vol en montgolfière

Soit l'atmosphère en équilibre isotherme à 290K, constitué d'air au repos assimilé à un gaz parfait de masse molaire Ma = 29 g.mol^{-1}. Le champ de gravitation est également supposé uniforme aux altitudes considérées. L'axe Oz est orienté suivant la verticale ascendante et à la surface du sol, z = 0, la pression vaut P° = 10^5 Pa.

1. Etablir l'expression de la pression P en tout point de l'atmosphère, en fonction de z et des autres données. Définir la grandeur H, appelée hauteur d'échelle, l'exprimer en fonction des données et calculer sa valeur numérique. En déduire l'expression de la masse volumique de l'air assimilée à un gaz parfait en fonction de l'altitude. On appelle μ_o la masse volumique de l'air à l'altitude z = 0.

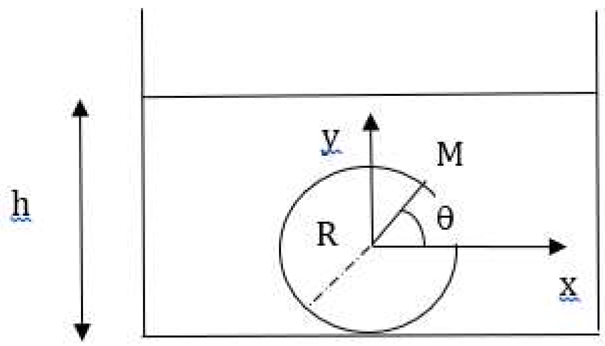
Un scientifique décide de s'envoler à bord d'une montgolfière (sphère de rayon r = 5m supposée constante pendant toute la durée de l'ascension). Il la gonfle avec de l'hélium à la pression atmosphérique et à la température ambiante T, puis il la ferme hermétiquement. La masse totale de la montgolfière, y compris l'hélium et le passager est M = 600 kg.

2. Justifier qu'on peut supposer que la pression de l'air est uniforme autour de la montgolfière.
3. Déterminer la résultante des forces au départ et la condition sur M pour que la montgolfière puisse s'envoler.
4. Déterminer l'altitude plafond atteinte par la montgolfière.
5. Une fois que celle-ci a été atteinte, le scientifique largue une masse m = M /20. Déterminer la nouvelle altitude plafond atteinte.

III. Cylindre en équilibre

1. Etablir la relation donnant la différence de pression entre deux points A et B d'un liquide incompressible placé dans le champ de pesanteur uniforme.

Un cylindre de rayon R et de longueur L repose au fond d'un réservoir rempli d'eau de masse volumique μ.



2. On appelle P° la pression à la surface du liquide, et P(M) la pression en un point M de la surface du cylindre de rayon R représenté ci-dessous. Exprimer P(M) en fonction de y, puis en fonction de R et de l'angle polaire θ.

3. Exprimer en fonction de la variable θ, la force élémentaire $d\vec{f}$ appliquée à un élément dS de la surface latérale du cylindre.

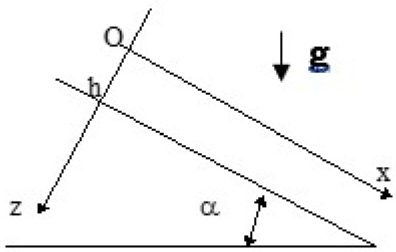
4. Quelle est la direction $\vec{u}$ de la résultante des forces de pression $\vec{F_P}$ qui s'exercent sur le cylindre ?

5. Sachant que $\vec{F_P} = \int_{\substack{surface \\ du cylindre}} d\vec{f} = F_P.\vec{u}$, on montre aisément que $F_P = \vec{F_P}.\vec{u} = \int_{\substack{surface \\ du cylindre}} d\vec{f}.\vec{u}$.

En déduire l'expression de Fp.

6. Vérifier le théorème d'Archimède.

IV. Ecoulement d'un liquide sur un plan incliné :



On étudie une couche d'épaisseur h, de largeur l, d'un liquide visqueux, de viscosité η et de masse volumique μ, en écoulement sur un plan incliné. En régime stationnaire, l'écoulement est unidirectionnel et ne dépend que de z : $\vec{v} = v(z).\vec{e_x}$. On néglige la viscosité de l'air.

1. Justifiez la direction du champ des vitesses. Pourquoi le champ des vitesses dépend-il de z ?
2. Est-ce que le modèle du champ des vitesses proposé prend en compte l'incompressibilité du fluide ?
3. Donner l'expression de la contrainte tangentielle en z = 0. L'évaluer en z =

h. En déduire les conditions aux limites en termes de vitesse.

4. On admet que le champ des vitesses et le champ des pressions dans le fluide sont liés par la relation :

$$\eta\left(\frac{d^{2} v(z)}{dz^2}\right)\vec{e}_x + \mu\,\vec{g} = \overrightarrow{\text{grad}}P.$$

La pression atmosphérique est supposée constante égale à P°. Projeter cette relation sur les axes x et z.

5. En utilisant la projection sur Oz, déterminer l'expression du champ des pressions P(x,z).

6. A l'aide de la projection sur Ox, déterminer la fonction v(z) puis tracer le profil du champ des vitesses. Discuter le cas particulier où α =0 pour le champ des pressions et des vitesses.

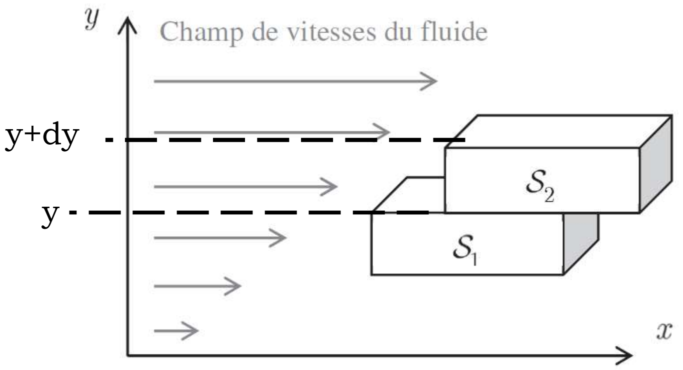
7. Exprimer la contrainte tangentielle exercée par le fluide sur le sol. Vérifier l'homogénéité de la relation. AN : dans les cas de l'eau et de l'huile de coefficients de viscosité respectifs 1.10^{-3} Pl et 1,0 Pl, h = 1 mm et α = 45°. On les prendra de même masse volumique. Remarque ?

8. Déterminer le débit volumique ainsi que la vitesse moyenne de l'écoulement.

9. AN : Calculer la vitesse moyenne de l'écoulement pour h = 1 mm et α = 45° dans les cas de l'eau et de l'huile.

V. Ecoulement de Couette plan :

Le fluide est décrit par un écoulement unidirectionnel :



Les particules fluides S_1 et S_2 représentées sont des portions de fluide de viscosité η en contact par la surface S, S_2 allant plus vite que S_1.

1. Donner l'expression de la force tangentielle exercée par la particule 1 sur la particule 2. En déduire l'unité de η.
2. Au-dessus de la particule S_2 se trouve la particule S_3, plus rapide que S_2. Donner l'expression de la force tangentielle exercée par la particule 3 sur la particule 2.
3. Montrer que la résultante des forces tangentielles exercées sur S_2 s'écrit $d\vec{F} = \eta\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}dxdydz\vec{u}_x$.
4. Effectuer le bilan des actions qui s'exercent sur S_2.

On suppose que le champ des pressions P(x, y, z, t)

5. Le champ des accélérations étant colinéaire à $\vec{u}_x$, en déduire les composantes du gradient de pression dans le fluide.

On suppose qu'en y = h, la pression dans le fluide est uniforme égale à P_C.

6. Montrer que le champ de pression dans le fluide s'écrit p(x, y,t) = µg(h – y) + P_C. Conclusion ?