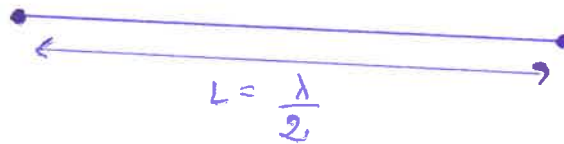


AD1 - TD19

1) On sait que $[T_0] = N = \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$
 $[\mu] = \text{kg} \cdot \text{m}^{-1}$
 et $[c^2] = \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$

On en déduit que $c^2 = \frac{T_0}{\mu}$ car $\frac{\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}}{\text{kg} \cdot \text{m}^{-1}} = \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$ ✓

2) Il y a forcément 2 noeuds pour une fondamentale ✓



et $\lambda = \frac{c}{f_1} = 2L$

$f_1 = \frac{c}{2L} = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}} \times \frac{1}{2L}$

avec L = longueur de la corde de guitare

lorsque T augmente, f_1 augmente donc lorsqu'on tend la corde, le son sera plus aigu ✓

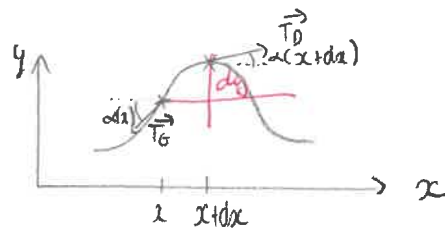
3) On a $f_1 = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}} \times \frac{1}{2L} \Leftrightarrow T_0 = \mu f_1^2 4L^2$

et $\mu = \frac{m}{L} = \frac{\rho V}{L} = \frac{\rho}{L} \times \pi \times L \times \left(\frac{D}{2}\right)^2$
 $= 7 \times 10^3 \times \pi \times \left(\frac{0,86 \times 10^{-3}}{2}\right)^2 = 4,1 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1}$ ✓

finalement : $T_0 = 4,1 \times 10^{-3} \times (440)^2 \times 4 \times (0,617)^2$
 $= 1,2 \times 10^3 \text{ N}$ ✓

B

Système : { morceau de corde }



Bilan : - On néglige le poids et les frottements

$$\vec{T}_D = \vec{T}(x+dx)$$

$$\vec{T}_G = \vec{T}(x)$$

On applique le PFD : $dm \vec{a} = \vec{T}(x) + \vec{T}(x+dx)$

On projette sur $\vec{x}$: $0 = -\|\vec{T}(x)\| \cos \alpha(x) + \|\vec{T}(x+dx)\| \cos \alpha(x+dx)$

(comme α est petit $\cos \alpha(x) = 1 = \cos \alpha(x+dx)$ d'où $\|\vec{T}(x)\| = \|\vec{T}(x+dx)\| = T_0 \rightarrow$ tension de corde uniforme)

On projette sur $\vec{y}$: $dm \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = -T_0 \sin \alpha(x) + T_0 \sin \alpha(x+dx)$

(comme α est petit : $\sin \alpha(x) = \alpha(x)$ et $\sin \alpha(x+dx) = \alpha(x+dx)$)

$$\left(\tan \alpha = \frac{dy}{dx} \right) \leftarrow \text{à représenter}$$

$$\text{Ainsi } dm \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = T_0 [-\alpha(x) + \alpha(x+dx)]$$

$$\Leftrightarrow dm \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial \alpha}{\partial x} dx \Leftrightarrow dm \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx$$

$$\text{Donc } \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = \frac{T_0 dx}{dm} \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} \quad \text{On par définition } \mu = \frac{dm}{dx} \text{ d'où } \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = \frac{T_0}{\mu} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

$$\text{On pose } \frac{T_0}{\mu} = c^2. \text{ Alors on obtient } \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}$$

* Cette onde se déplace selon x (elle est donc transversale car la déformation se fait selon y)

* Sa direction de propagation est selon x croissant

$$* \text{ célérité : } c = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}$$

* Une onde progressive harmonique est de la forme : $y(x,t) = y_0 \cos(\omega t - kx + \varphi_0)$

$$\text{avec } k \text{ le vecteur d'onde en } m^{-1} : k = k \vec{u}_x = \frac{2\pi}{\lambda} \vec{u}_x \quad \lambda = \text{longueur d'onde en m}$$

$$* y(x,t) = \underline{y_0} e^{j(\omega t - kx)} \quad \text{avec } \underline{y_0} = y_0 e^{j\varphi_0}$$

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = (j\omega)^2 y \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = (-jk)^2 y \quad \text{On réinjecte dans l'équation : } (j\omega)^2 y = c^2 (-jk)^2 y$$

$$\Leftrightarrow -\omega^2 = c^2 (-k)^2$$

$$\text{Ainsi on obtient la relation de dispersion : } k^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2$$

* $y(x,t) = y_0 \cos(\omega t - kx + \varphi_0) + y_0 \cos(\omega t + kx + \varphi_0')$ est solution

$= y_0 2 \left[\cos\left(\omega t + \frac{\varphi_0 + \varphi_0'}{2}\right) \cos\left(kx + \frac{\varphi_0 - \varphi_0'}{2}\right) \right]$ par la relation $\cos a + \cos b = 2 \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$

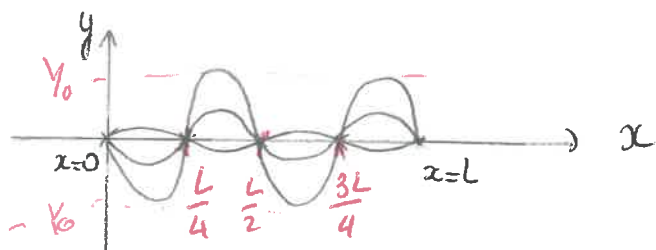
est une onde stationnaire

* x_n est un nœud de vibration si $y(x_n, t) = 0$

Un ventre de vibration est la position au milieu de deux nœuds.

Ne répond pas à la question
posée $\rightarrow$ par hypothèse l'onde
est stationnaire à cause

de la présence de 2 nœuds
imposés par les conditions aux
limites.



La corde est fixe en $y=0$ ✓

$$y(x=0, t) = 0$$

$$\Rightarrow \cos(kx + \frac{y_0 - y_0'}{2}) = 0 \Rightarrow \cos \frac{y_0 - y_0'}{2} = 0 \Rightarrow \frac{y_0 - y_0'}{2} = \pm \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos(kx - \frac{\pi}{2}) = \sin(kx)$$

$$y(L, t) = 0$$

$$\Rightarrow y_0 \cos(\omega t - \frac{\pi}{2}) \sin(kL) = 0$$

$$\Rightarrow \sin(kL) = 0 \Rightarrow kL = 0 \text{ or } \pi \Rightarrow kL = n\pi \Rightarrow \frac{\omega}{c} L = n\pi$$

$$\Rightarrow \frac{2\pi f_p L}{c} = n\pi$$

$$\Rightarrow f_p = \frac{nc}{2L}$$

La fréquence du fondamental: $f_1 = \frac{c}{2L}$ ✓

ne répond pas à la question posée!

ici distance entre 2
nœuds successifs = $\frac{L}{4} = \frac{\lambda_4}{2}$

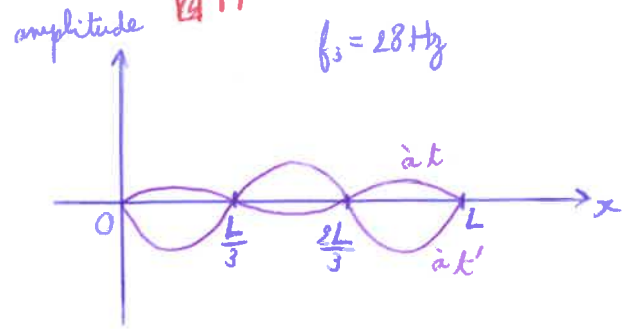
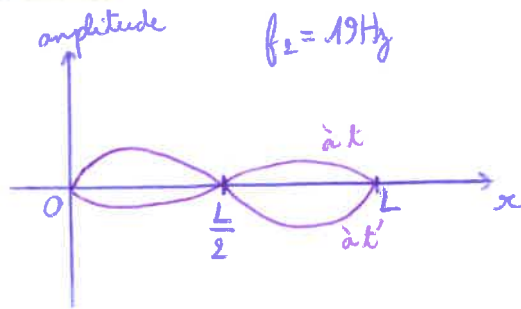
donc $\lambda_4 = \frac{L}{2} = \frac{c}{f_4}$

$$\text{et } \boxed{f_4 = \frac{2c}{L}}$$

avec $c = \sqrt{\frac{T_0}{\mu_2}}$

TD 19-AD 3

1. a.



b. Deux nœuds consécutifs sont séparés de $\frac{\lambda}{2}$ ✓

c. $f_n = n f_1$ les fréquences de résonance sont des multiples du fondamental

Donc normalement, $f_2 = 2 f_1$ et $f_3 = 3 f_1$

$$\Leftrightarrow \frac{f_2}{f_3} = \frac{2}{3}$$

Or $\frac{f_2}{f_3} = \frac{19}{28} \approx \frac{2}{3}$ donc les valeurs numériques des fréquences mesurées sont compatibles entre elles. ✓

d. $f_1 \approx \frac{f_2}{2} = \frac{19}{2} = 9,5 \text{ Hz}$

Ainsi $f_4 = 4 f_1 = 4 \times 9,5$

$$f_4 = 38 \text{ Hz}$$

$$f_5 = 5 \times 9,5$$

$$f_5 = 47,5 \text{ Hz}$$

$$f_6 = 6 \times 9,5$$

$$f_6 = 57 \text{ Hz}$$

2. $f_1 = \frac{c}{2L} \Leftrightarrow c = 2L f_1$
 $= 2 \times 117 \times 10^{-2} \times 9,5$

$$c = 22,2 \text{ m.s}^{-1}$$

pour le fondamental : un seul noeud, 2 nœuds séparés de $\frac{L}{2} = L$
 et $\lambda_1 = \frac{c}{f_1} = L$ d'où

3. La célérité de l'onde est une vitesse au carré, c'est-à-dire en $\text{m}^2.\text{s}^{-2}$, la tension T de la corde est une force en $\text{N} = \text{kg.m.s}^{-2}$ et la masse linéique est en kg.m^{-1} .

Ainsi $[c] = [\mu]^\alpha [T]^\beta$
 $\text{m}^2.\text{s}^{-2} = (\text{kg.m}^{-1})^\alpha (\text{kg.m.s}^{-2})^\beta$
 $\text{m}^2.\text{s}^{-2} = \text{kg}^{\alpha+\beta} . \text{m}^{-\alpha+\beta} . \text{s}^{-2\beta}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ -\alpha + \beta = 2 \\ -2\beta = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha = -1 \\ \beta = 1 \end{cases}$$

Donc $[c] = [T][\mu]^{-1} \Leftrightarrow c = \frac{T}{\mu}$

célérité et vitesse sont des synonymes!

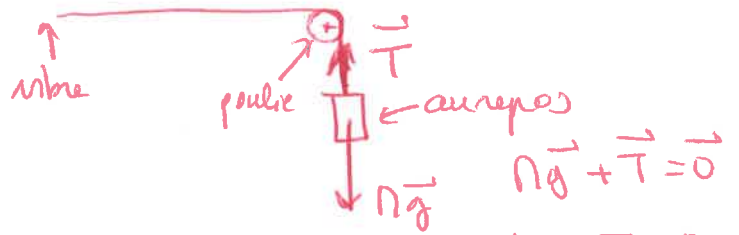
$$\rightarrow c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

4. $\mu_l = \frac{M}{L} = \frac{25 \times 10^{-3}}{117 \times 10^{-2}}$
 $\mu_l = 2,1 \times 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1}$

Donc $T = \lambda \times \mu_l$
 $= 22,23 \times 2,1 \times 10^{-2}$

$T = 0,47 \text{ N}$

Confusion! M est la masse attachée
 au bout de la corde



donc $T = mg$

La poulie parfaite transmet les forces.

d'où $T = 25 \times 10^{-3} \times 10$

$T = 0,25 \text{ N}$

$c = \sqrt{\frac{T}{\mu_l}}$

$c^2 = \frac{T}{\mu_l}$

$\mu_l = \frac{T}{c^2} = \frac{0,25}{22^2} = 5,2 \cdot 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1}$
 $= 0,52 \text{ g} \cdot \text{m}^{-1}$