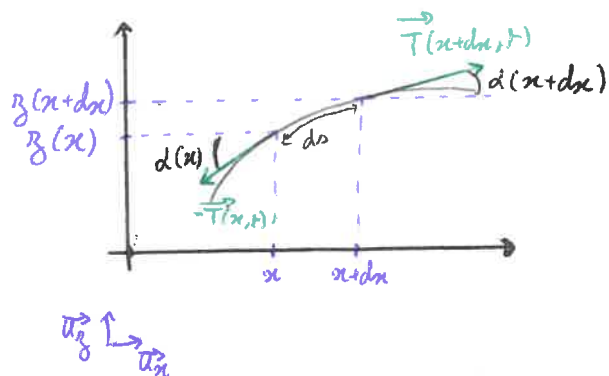


ex n°1;



1- On assimile le fil à une droite la portion de fil entre x et $x+dx$, ~~sa longueur est donc~~
 ~~$ds = dx$~~



avec le théorème de Pythagore on obtient

$$ds^2 = dx^2 + dz^2$$

$$\Rightarrow ds = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}$$

Les relations de trigonométrie donnent

$$\cos \alpha(x,t) = \frac{dx}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}}$$

$$\sin \alpha(x,t) = \frac{dz}{ds} = \frac{dz}{dx} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}}$$

On applique maintenant la 2^{ème} loi de Newton à la portion de corde de même $dm = \mu ds$
 pesanteur négligée, hypothèse de départ.

$$\mu ds \left(\frac{d^2 x}{dt^2} \vec{u}_x + \frac{d^2 z}{dt^2} \vec{u}_z \right) = -\mu ds g \vec{u}_z - T_x(x,t) \vec{u}_x - T_z(x,t) \vec{u}_z + T_x(x+dx,t) + T_z(x+dx,t)$$

car les mouvements ne se font que sur l'axe z.

$$\Rightarrow \begin{cases} T_x(x+dx,t) - T_x(x,t) = \frac{\partial T_x}{\partial x} dx = 0 \\ \mu ds g + \frac{\partial T_z}{\partial x} dx = \mu ds \frac{d^2 z}{dt^2} \end{cases}$$

Donc $\frac{\partial T_x}{\partial x} = 0$, T_x ne dépend pas de x

Alors en notant $T_0 = T_x$ comme $T_x(t) = T_0 \cos \alpha(x,t)$ comme on néglige $\frac{dz}{dx}$ par rapport à 1

on a $\alpha(x,t) \simeq 1$ et $T(x,t)$ est constante

2- Notons $T = T(x,t)$, la 2^{ème} équation du PFD donne, en négligeant le poids

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{T}{\mu} \frac{\partial \sin \alpha(x,t)}{\partial x} \frac{dx}{ds} = \frac{T}{\mu} \frac{\partial \sin \alpha}{\partial x} \simeq \frac{T}{\mu} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \quad \text{avec } \frac{dz}{dx} \ll 1$$

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{T}{\mu} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0 \quad \text{où } c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

c représente la célérité de l'onde sur la corde

3- On pose $z(x,t) = f(x-ct) + g(x+ct)$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = c^2 (f''(x-ct) + g''(x+ct))$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''(x-ct) + g''(x+ct)$$

notation incohérente car on ne sait pas par rapport à quelle variable vous dérivez.

On a bien $\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, z est solution de l'équation d'onde,

f est une onde progressive se propageant selon $+\vec{u}_x$, g est une onde progressive se propageant selon $-\vec{u}_x$

↳ Trop rapide, ne respecte pas l'échance! Introduire $u(x,t)$ et $v(x,t)$

4- ~~z~~ $z(x,t) = A e^{j(\omega t - kx)} + B e^{j(\omega t + kx)}$

Les conditions aux limites sont: $\forall t \in \mathbb{R}, z(0,t) = 0 = z(l,t)$ ✓

On $z(0,t) = A + B = 0$ ✓

$z(l,t) = A e^{j(\omega t - kl)} + B e^{j(\omega t + kl)} = 0$ ✓

$$\Rightarrow \begin{cases} B = -A \\ A(e^{-jkl} - e^{jkl}) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow e^{jkl} = e^{-jkl} \Leftrightarrow e^{2jkl} = 1$$

$-2j \sin(kl)$

$$\Leftrightarrow 2jkl \equiv 0 [2\pi]$$

$\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{Z} \mid k_n = \frac{n\pi}{l}$ or $k_n = \frac{\omega_n}{c}$, on a donc

$$\boxed{\omega_n = \pi \frac{cn}{l}}$$

On a donc des ondes stationnaires dont les ~~fréquences~~ ^{pulsations} propres sont les $\omega_n = n \frac{c\pi}{l}$ ✓

5- On a $f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = 300 \text{ Hz}$, $l = \frac{1}{3} \text{ m}$, $\mu = 0,5 \text{ mg} \cdot \text{m}^{-1}$

On veut $\omega_1 = \frac{c\pi}{l} = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \frac{\pi}{l} \Leftrightarrow T = \mu \frac{4\pi^2 f_1^2}{1} l^2$

AN: $T = \frac{0,5 \times 10^{-6} \times 4\pi^2 \times 300^2}{1} \times \frac{1}{9} = 20 \text{ N}$

$= 0,02 \text{ N} < T_r = 10 \text{ N}$

↳ on reste dans le domaine élastique

~~$T_e = 10 \text{ N}$~~ , on a $T > T_e$, ça ne convient pas, la corde casserait

TD n°10 Groupe n°9

ex n°1 (suite):

6- La nouvelle équation de propagation est

$$\mu \frac{\partial^2 \underline{z}}{\partial t^2} + T \frac{\partial^2 \underline{z}}{\partial x^2} + \frac{E \pi a^4}{4} \frac{\partial^4 \underline{z}}{\partial x^4} = 0$$

On pose en notations complexes: $\underline{z}(x,t) = \underline{z}_0 e^{j(\omega t - kx)}$

$$\frac{\partial^2 \underline{z}}{\partial t^2} = (j\omega)^2 \underline{z}(x,t) \quad \frac{\partial^2 \underline{z}}{\partial x^2} = (jk)^2 \underline{z}(x,t) \quad \frac{\partial^4 \underline{z}}{\partial x^4} = (jk)^4 \underline{z}(x,t)$$

On injecte dans l'équation

$$-\mu \omega^2 \underline{z} + k^2 T \underline{z} + \frac{E \pi a^4}{4} k^4 \underline{z} = 0$$

$$\Leftrightarrow k^4 + \frac{4T}{E \pi a^4} k^2 = \frac{4\mu}{E \pi a^4} \omega^2$$

L'expression de k_n obtenue précédemment est $k_n = \frac{n\pi}{l}$, en obtenons alors

$$\omega_n^2 = \frac{E \pi a^4}{4\mu} \frac{n^4 \pi^4}{l^4} + \frac{T}{\mu} \frac{n^2 \pi^2}{l^2} \quad , \text{ de plus } \omega_n = 2\pi f_n \text{ donc}$$

$$f_n = \sqrt{\frac{E a^4 n^2 \pi^3}{4\mu l^2} + \frac{T}{\mu}} \frac{n\pi}{2l} = \frac{n\pi}{2l} \sqrt{1 + \frac{E a^4 \pi^3}{4T l^2}} \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

$$f_n = \frac{n\pi c}{2l} \sqrt{1 + B_m^2} \quad \text{où} \quad B = \frac{E a^4 \pi^3}{4 l^2 T}$$

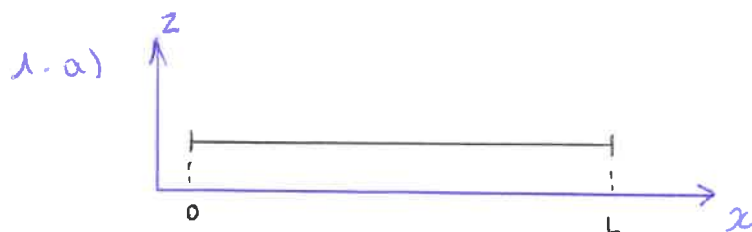
AN? araignée $E a^2 = 9 \times 10^{-5} \text{ Pa m}^4$

corde classique $E a^4 = 6,4 \cdot 10^{-5} \text{ Pa m}^4$

$B_{ar} > B_{cor}$

$\Rightarrow$ fréquences successives $\oplus$ grande pour l'araignée

$\Rightarrow$ les fréquences ne sont pas multiples du fondamental.



$z(x, t)$ satisfait la relation suivante : $\frac{\partial^2 z(x, t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 z(x, t)}{\partial x^2}$ ✓

avec $c^2 = \frac{T}{\mu}$ car $[c] = (\text{m} \cdot \text{s}^{-1})^2 = \frac{\text{m} \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-2}}{\text{kg} \cdot \text{m}^{-1}}$ ✓

b) Comme les 2 extrémités de la corde sont fixées, il y a présence de nœuds. Ainsi $z(x, t)$ est une onde stationnaire. B

on peut donc écrire : $z(x, t) = z_0 \cos(\omega t + \varphi_0) \cos(kx + \psi_0)$

avec $-\pi < \varphi_0, \psi_0 < \pi$. ✓

De plus $z(x, t)$ vérifie l'équation d'onde, alors :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 z(x, t)}{\partial t^2} = -z_0 \omega^2 \cos(\omega t + \varphi_0) \cos(kx + \psi_0) \\ \frac{\partial^2 z(x, t)}{\partial x^2} = -z_0 k^2 \cos(\omega t + \varphi_0) \cos(kx + \psi_0) \end{cases}$$

Ainsi dans l'équation d'onde on retrouve :

$$\omega^2 = k^2 c^2 \Rightarrow k = \pm \frac{\omega}{c} \quad \checkmark$$

2. a) La corde est fixe en $x=0$ et $x=L$.

Alors $z(0, t) = 0 \Rightarrow \cos(\psi_0) = 0$ donc on pose $\psi_0 = +\frac{\pi}{2}$ ✓

D'autre part $z(L, t) = 0 \Rightarrow \cos(kL + \frac{\pi}{2}) = 0$ ✓

$$\Rightarrow k_m L + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + m\pi \quad (m \in \mathbb{Z}) \quad \checkmark$$

$$\Rightarrow k_m = \frac{\omega_m}{c} = \frac{m\pi}{L} \Rightarrow \omega_m = \frac{cm\pi}{L} \quad \checkmark$$

Les ω_m sont les pulsations propres ✓

b) On a donc $z_m(x, t) = z_0 \cos\left(\frac{cm\pi}{L} + \varphi_0\right) \cos\left(\frac{m\pi}{L}x + \frac{\pi}{2}\right)$ ✓

$$\lambda_m = \frac{c}{f_m} = \frac{2\pi c}{\omega_m} \Rightarrow \lambda_m = \frac{2\pi c}{\frac{cm\pi}{L}} = \frac{2L}{m} \quad \hookrightarrow \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$$

c) Dans le mode m :

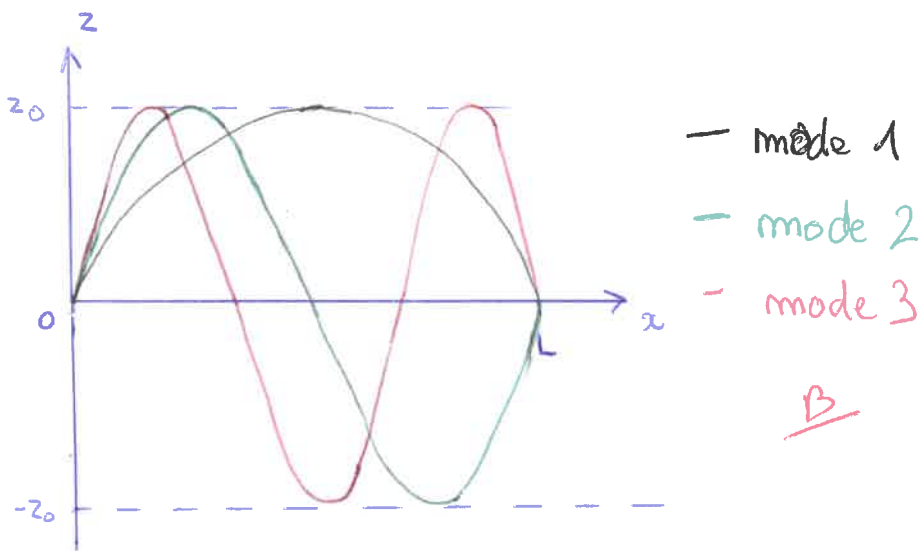
$$z_m(x_{N_m}, t) = 0 \Rightarrow \cos\left(\frac{m\pi}{L}x_{N_m} + \frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad \text{avec } 0 \leq x_{N_m, h} \leq L$$

$$\Rightarrow \frac{m\pi}{L}x_{N_m, h} + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow x_{N_m, h} = \frac{Lh}{m}$$

Il y a donc $m+1$ noeuds dans le mode m et la position du h -ième noeud dans le mode m est donnée par cette relation.

$$x_{N_m, h} = \frac{Lh}{m} \quad \checkmark$$

d)



3. On sait que $f = \frac{c}{\lambda} = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{T}{\rho l}}$ avec $\frac{d}{2} = L$ pour le fondamental.

Or ici les cordes sont considérées cylindriques :

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{SL} = \frac{\rho_l}{S} \Rightarrow \rho_l = \rho S$$

$$\text{Ainsi } T = 4L^2 f^2 \rho S = 4L^2 f^2 \rho_l \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 = L^2 f^2 \rho_l \pi d^2 \quad \checkmark$$

Enfinement: $T_1 = 0,63^2 \times 82,5^2 \times 7800\pi \times (1,12 \times 10^{-3})^2$
 $= 83,0 \text{ N}$

De même $T_2 = 93,2 \text{ N}$, $T_3 = 108,0 \text{ N}$, $T_4 = 113,0 \text{ N}$,

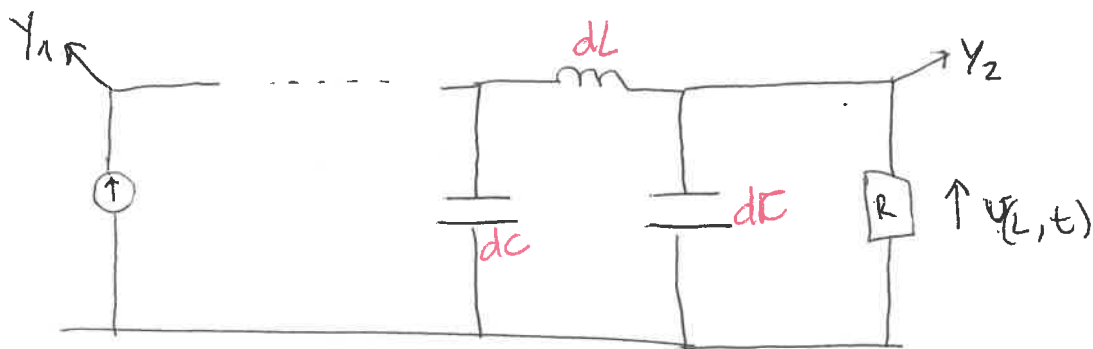
$T_5 = 72,7 \text{ N}$, $T_6 = 66,2 \text{ N}$ B

$$\left(\frac{\Delta T}{T} \right) = 2 \frac{\Delta f}{f} = 2\%$$

variation
relative
de tension

variation
relative
de fréquence

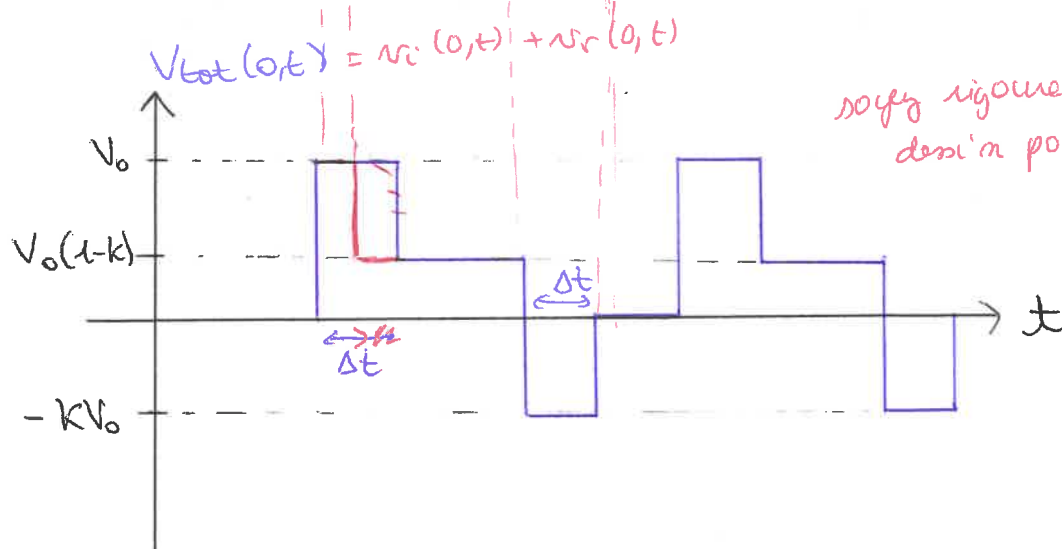
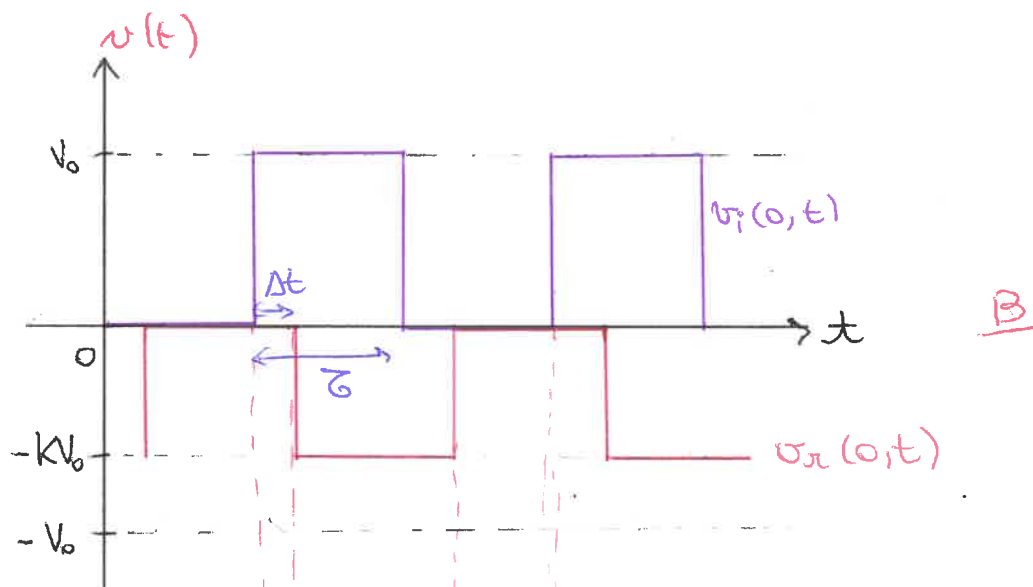
TD 19 - exercice III



Q1) Comme $R=0$, il y a un court-circuit /
 donc $V(L,t) = 0 = V_i(L,t) + V_r(L,t)$ /
 donc $\frac{V_r(L,t)}{V_i(L,t)} = -1$ /

Ainsi le coefficient est négatif. /

Q2)



soyez rigoureux sur le
 dessin pour être en
 concordance
 de temps

Q3) Sur l'oscillogramme, on trouve

$$\Delta t = \cancel{6 \mu s} = 1,2 \mu s$$

$$-V_x = \cancel{-30 V} = -9,6 V$$

$$V_0 = \cancel{36 V} = 7,6 V$$

$$T = \cancel{62 \mu s} = 7,6 \mu s$$

Rappeler pu mètre

joignant l'oscillogramme.

$$\Delta V = 2 V / \text{carreau}.$$

L'onde parcourt $2L$ pendant Δt

$$v = \frac{2L}{\Delta t} = \frac{2 \times 100}{\cancel{6 \times 10^{-6}}_{1,2}} = \boxed{\cancel{3,3 \times 10^7} \text{ m.s}^{-1}} = 1,7 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$$

Q4) $V_x = +kV_0$ donc $k = \frac{V_x}{V_0} = \frac{\cancel{30}_{+5,0}}{\cancel{36}_{7,6}} = \boxed{\cancel{-0,83}} = 0,74$

Q5) • pour $R = 20 \Omega$,

$$K_x = \left(\frac{-8 \times 2}{18 \times 2} = -0,44 \right) = \frac{-9,8}{2,3} = -0,35$$

joindre absolument les oscillogrammes annotés.

• pour $R = 40 \Omega$,

$$K_x \approx \frac{-9,3}{\cancel{20}} \approx -0,015$$

• pour $R = 80 \Omega$

$$K_x = \frac{\cancel{18} \times 2}{22 \times 2} = 0,77 = \frac{0,4}{2,2} = 0,18$$

coefficient de réflexion positif.

• pour $R = 60 \Omega$,

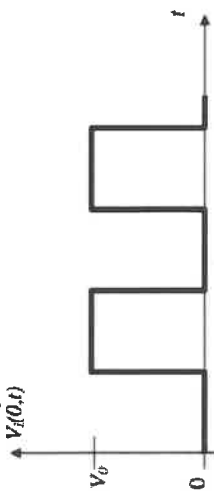
$$K_x = \frac{18 \times 2}{20 \times 2} = 0,9 = \frac{0,2}{2,2} = 0,09$$

Donc la valeur caractéristique de R est $\boxed{40 \Omega}$.

↳ valeur qui annule le coefficient de réflexion

III. Etude expérimentale d'un câble coaxial

Un générateur, branché à l'entrée ($z = 0$) d'un câble coaxial de longueur $L = 100$ m, délivre des signaux périodiques de période T , de valeur V_0 positive sur une durée $\tau < T$ et de valeur nulle le reste de la période.

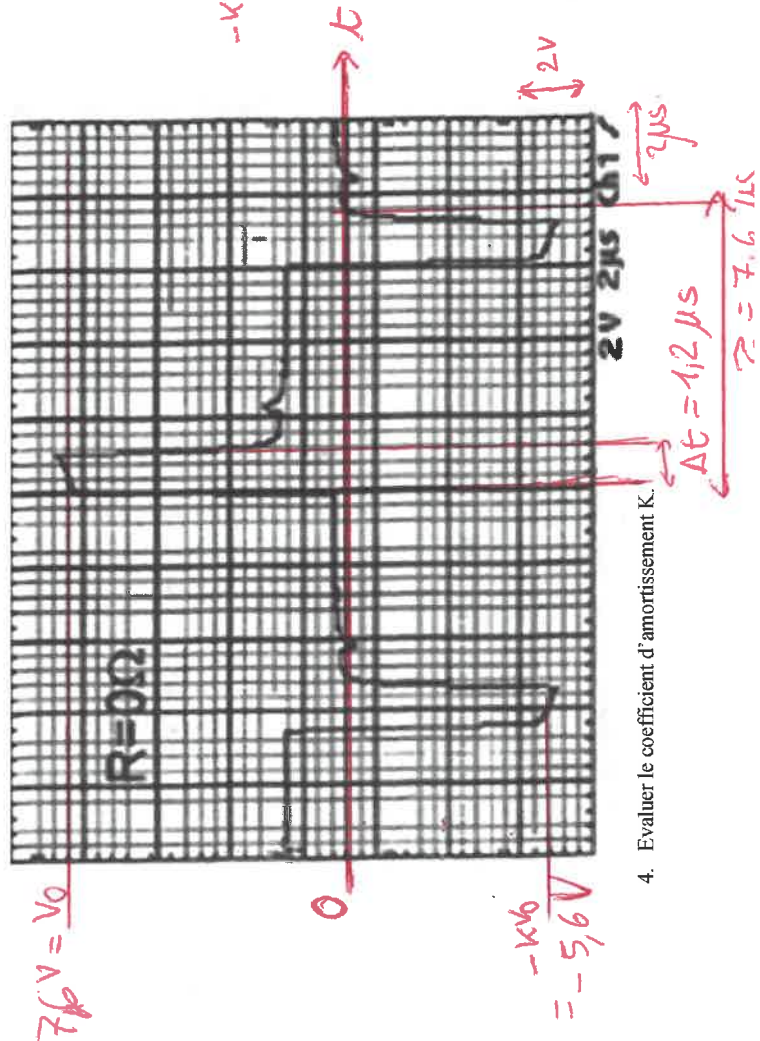


L'autre extrémité ($z = L$) du câble est refermé par une résistance R .

A l'aide d'un oscilloscope, on observe en $x = 0$ la superposition de l'onde incidente délivrée par le générateur et de l'onde réfléchie.

1. On suppose que $R=0$. A partir de la valeur de la tension en $x = L$, justifier que le coefficient de réflexion est négatif.
2. En prenant en compte les phénomènes de réflexion, d'amortissement (l'amplitude de l'onde réfléchie est inférieure à l'amplitude de l'onde incidente, on pose $V_r = K V_0$) et de propagation, et sachant que le retard Δt dû à la propagation est inférieur à $T/4$, dessiner sur le même schéma la forme de l'onde incidente $V_i(0,t)$ et réfléchie $V_r(0,t)$, puis sur un autre schéma, en concordance de temps la forme de l'onde totale $V_{tot}(0,t)$ au point $z = 0$. Indiquer Δt sur le schéma.

3. Par identification avec les résultats de la question précédente, sur l'oscillogramme ci-dessous, indiquer la valeur $V = 0$, la valeur $V = V_0$, la valeur $V = V_r$ ainsi que Δt . Déterminer une valeur approchée de la vitesse de propagation le long du câble.



4. Evaluer le coefficient d'amortissement K .

On suppose que le coefficient K ne dépend pas de la valeur de R .

5. A partir des oscillogrammes ci-dessous, définir et déterminer la valeur du coefficient de réflexion de l'onde en $x = L$ pour différentes valeurs de R . En déduire la valeur caractéristique de R , pour laquelle le coefficient de réflexion est nul.

