

Il faut respecter les notations de l'énoncé

← système élémentaire : masse dm



= particule de fluide.

1.) Hypothèses : de l'approximation acoustique

$$|p(x,t)| \ll P_s$$

$$|\rho(x,t)| \ll \rho_0$$

$$|\vec{v}(x,t)| \ll c_{\text{air}}$$

on néglige les ondes supérieures.

$$\langle p(x,t) \rangle = 0$$

$$\langle v_x(x,t) \rangle = 0$$

au passage de l'onde suivant Ox

$$P(x,t) = P_s + p(x,t)$$

↑ notation de l'énoncé

$$p(x,t) = p_0 + p_1(x,t)$$

Ensuite, on écrit le bilan des actions : forces de pression (on néglige le poids et les frottements)

on applique le PFD pour établir l'équation d'Euler dans le cadre de l'approximation acoustique

En suivant les étapes dans le cours, on trouve l'équation d'Euler :

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}(x,t)}{\partial t} = - \text{grad} p(x,t)$$

comme l'air se propage selon x , on a alors :

$$\rho_0 \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} = - \frac{\partial p(x,t)}{\partial x}$$

Ensuite, on établit l'équation de la conservation de la masse linéarisée :

$$\frac{\partial \rho_1(x,t)}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial v(x,t)}{\partial x} = 0$$

De même, on établit l'équation thermodynamique :

$$\chi_s = \frac{1}{P_s} \frac{\partial p(x,t)}{\partial p(x,t)} = \frac{1}{P_s} \frac{p_1(x,t)}{p(x,t)} \quad \left. \vphantom{\frac{\partial p(x,t)}{\partial p(x,t)}} \right\} \text{linéarisation.}$$

Enfin, on établit l'équation d'onde :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0$$

2.) a.) c = célérité sonore ✓

b.) γ intervient car l'air est un gaz parfait qui subit une transformation isentropique, donc on peut l'appliquer la loi de Laplace $\rightarrow$ et γ intervient dans l'expression de $\gamma S = \frac{1}{\gamma P_S}$ pour 1 GP.

c.) $c = \sqrt{\gamma \frac{P_S}{\rho_0}}$ avec $\gamma = \frac{C_P}{C_V}$

$c = \sqrt{\frac{\gamma R T}{M}}$) loi des gaz parfaits

3a.) $M = 29 \text{ g/mol} = 2,9 \cdot 10^{-2} \text{ kg/mol}$

la question est comment obtenir - on
air $\approx$ 80% N_2 + 20% O_2

donc $M_{\text{air}} = 0,8 \times M_{\text{N}_2} + 0,2 \times M_{\text{O}_2}$
 $\frac{29 \text{ g}}{\text{mol}} = 0,8 \times 2 \times 14 + 0,2 \times 2 \times 16$
 g mol^{-1}

3b.) $T = 18 + 273 = 291 \text{ K}$ ✓

$\gamma = \frac{7}{5} = 1,4$ ✓

$R = 8,32 \text{ J/mol} \cdot \text{K}$ ✓

$M = 2,9 \cdot 10^{-2} \text{ kg/mol}$

$c_{\text{air}} = \sqrt{\frac{1,4 \cdot 8,32 \cdot 291}{2,9 \cdot 10^{-2}}} \approx 343 \text{ m/s}$ ✓

$c_{\text{eau}} = 1500 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

$c_{\text{acier}} \approx 5000 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

$c_{\text{air}} < c_{\text{eau}} < c_{\text{acier}}$

TD 20 AD 2

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} \quad (1)$$

1) Système: système élémentaire d'air de masse dm .

Bilan des actions: poids, frottements de l'air négligés

$$\vec{F}_p = -\text{grad } P(M, t) d\vec{G} \quad) = \text{résultante des forces de pression.}$$

En appliquant le PFD: $dm \vec{a}(M, t) = -\text{grad } P(M, t) d\vec{G}$

$$\Rightarrow \rho(M, t) d\vec{G} \left[\underbrace{\frac{\partial \vec{u}(M, t)}{\partial t}}_{\text{ordre 1}} + \underbrace{(\vec{u}(M, t) \cdot \text{grad}) \cdot \vec{u}(M, t)}_{\text{ordre 2}} \right] = -\text{grad } P(M, t) d\vec{G}$$

$$\Rightarrow \underbrace{(\rho_0 + \rho_1(M, t))}_{\text{ordre 0} \gg \text{ordre 1}} \left[\frac{\partial \vec{u}(M, t)}{\partial t} \right] = -\text{grad } (P^0 + p(M, t))$$

$$\Rightarrow \rho_0 \frac{\partial \vec{u}(M, t)}{\partial t} = -\text{grad } p(M, t)$$

Pour une propagation unidirectionnelle de l'onde selon x :

$$\boxed{-\rho_0 \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial x}}$$

On retrouve bien l'équation (1).

B

(dans le cas général l'amplitude de l'onde est complexe)

2) $\underline{p}(x, t) = \underline{p_0} e^{j(\omega t - kx)}$ dans le sens x croissant
 $\underline{p}(x, t) = \underline{p_0} e^{j(\omega t + kx)}$ dans le sens x décroissant.

3) On a la relation (1): $\frac{\partial \underline{p}(x, t)}{\partial x} = -\rho_0 \frac{\partial \underline{u}(x, t)}{\partial t}$

On $\frac{\partial \underline{p}(x, t)}{\partial x} = jk \underline{p_0} e^{j(\omega t - kx)}$

Donc, en injectant dans (1): $\frac{\partial \underline{u}(x, t)}{\partial t} = \frac{jk}{\rho_0} \underline{p_0} e^{j(\omega t - kx)}$

On intègre par rapport au temps:

$$\underline{u}(x, t) = \frac{jk}{\rho_0 j\omega} \underline{p_0} e^{j(\omega t - kx)} \Rightarrow \underline{u}(x, t) = \frac{\underline{p_0}}{\rho_0 c} e^{j(\omega t - kx)} \quad \text{dans le sens } x \text{ croissant}$$

Par analogie,

$$\underline{u}(x, t) = \frac{-\underline{p_0}}{\rho_0 c} e^{j(\omega t + kx)} \quad \text{dans le sens } x \text{ décroissant.}$$

4) Par définition $\underline{z} = \frac{p}{u} = \frac{\underline{p_0} e^{j(\omega t - kx)}}{\underline{p_0} e^{j(\omega t - kx)}} = \rho_0 c$ selon x croissant.

Par analogie, $\underline{z} = -\rho_0 c$ selon x décroissant. ✓

Puisque $\underline{z} \in \mathbb{R}$, il n'y a pas de déphasage. si $\underline{z}$ est un réel positif entre $p(x,t)$ et $u(x,t)$

si $\underline{z}$ est un réel négatif $p(x,t)$ et $u(x,t)$ sont en opposition de phase.

AD3 - TD 20

1) $p_1 e^{j(\omega t + kx)}$ est une OPH en complexe selon $-\vec{u}_x$

$p_2 e^{j(\omega t - kx)}$ est une OPH en complexe selon $+\vec{u}_x$

qui se propage

2) Pour le sens x croissant : $\underline{z} = \frac{p(x,t)}{u(x,t)}$

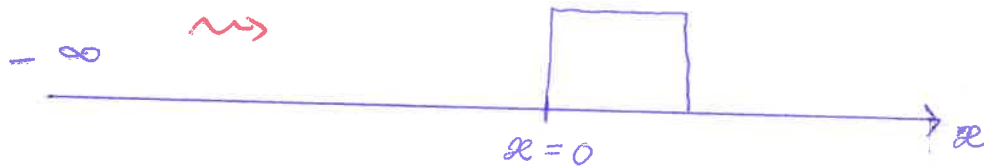
x décroissant : $\underline{z} = -\frac{p(x,t)}{u(x,t)}$

on rétablit à partir de la relation d'Euler.

$$\text{donc } \underline{u}_1(x,t) = -\frac{p_1 e^{j(\omega t + kx)}}{\underline{z}} \quad \text{et} \quad \underline{u}_2(x,t) = \frac{p_2 e^{j(\omega t - kx)}}{\underline{z}}$$

$$\text{d'où } \underline{u}(x,t) = \underline{u}_1(x,t) + \underline{u}_2(x,t) = \frac{-p_1 e^{j(\omega t + kx)}}{\underline{z}} + \frac{p_2 e^{j(\omega t - kx)}}{\underline{z}}$$

3) a)



$\underline{u}(0,t) = 0$ car il y a l'obstacle.

$$\begin{aligned} \underline{u}_1(0,t) + \underline{u}_2(0,t) &= 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{u}_1(0,t) = -\underline{u}_2(0,t) \\ \Leftrightarrow \quad \frac{-p_1 e^{j\omega t}}{\underline{z}} &= -\frac{p_2 e^{j\omega t}}{\underline{z}} \quad \Leftrightarrow p_1 = p_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{On a donc } \underline{u}(x,t) &= \frac{-p_1 e^{j(\omega t + kx)}}{\underline{z}} + \frac{p_2 e^{j(\omega t - kx)}}{\underline{z}} \\ &= \frac{p_1}{\underline{z}} \left(-e^{j(\omega t + kx)} + e^{j(\omega t - kx)} \right) \\ &= \frac{p_1 e^{j\omega t}}{\underline{z}} \left(-e^{jkx} + e^{-jkx} \right) \\ &= -\frac{p_1}{\underline{z}} 2j \sin(kx) e^{j\omega t} \quad \text{car } \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2} = j \sin(\theta) \end{aligned}$$

3) b) On a $\underline{u}(0,t) = 0$ donc il existe au moins un noeud.

Ainsi on a un système d'ondes stationnaires.

3)c) On avait $\underline{u}(x,t) = -\frac{p_1}{Z} 2j \sin(kx) e^{j\omega t}$

et $-j = e^{-j\pi/2}$ et $p_0 = p_1$

donc $\underline{u}(x,t) = \frac{p_0}{Z} 2 \sin(kx) e^{j(\omega t - \pi/2)}$

d'où $u(x,t) = \frac{2p_0}{Z} \cos(\omega t - \frac{\pi}{2}) \sin(kx) = \frac{2p_0}{Z} \cos(\omega t) \sin(kx)$

3)d) $u(x_N, t) = \frac{2p_0}{Z} \cos(\omega t) \sin(kx_N) = 0$

$\Leftrightarrow \sin(kx_N) = 0 \Leftrightarrow kx_N = 0 [\pi] = n\pi$, entier

$\Leftrightarrow x_{N_n} = \frac{n\pi}{k}$ et $k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi f}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$

Donc $x_{N_n} = \frac{n\pi \lambda}{2\pi} = \frac{n\lambda}{2}$) position des nœuds de vitesse.

3)e)
$$\begin{aligned} p(x,t) &= p_1 e^{j(\omega t + kx)} + p_2 e^{j(\omega t - kx)} \\ &= 2p_1 (e^{j(\omega t + kx)} + e^{j(\omega t - kx)}) \\ &= 2p_1 e^{j\omega t} (e^{jkx} + e^{-jkx}) \\ &= 4j p_1 e^{j\omega t} \cos(kx) \quad \text{car } \frac{e^{jkx} + e^{-jkx}}{2} = j \cos(kx) \\ &= 4 p_0 \cos(kx) e^{j(\omega t + \pi/2)} \\ p(x,t) &= 4 p_0 \cos(\omega t + \pi/2) \cos(kx) \quad \text{car } j = e^{\pi/2} \\ &= 4 p_0 \cos(\omega t) \cos(kx) \end{aligned}$$

Position des nœuds de pression : $4 p_0 \cos(\omega t) \cos(kx) = 0$

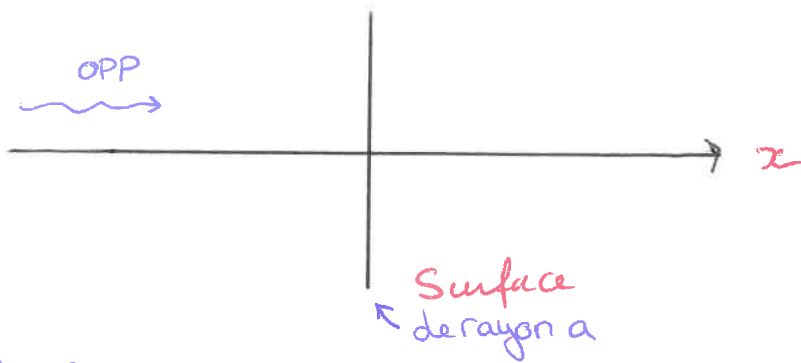
$\Rightarrow \cos(kx) = 0 \Rightarrow kx = 0 [2\pi] = n\pi + \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow x_{N_n, p} = \left(\frac{1}{2} + n\right) \frac{\lambda}{2}$

Les nœuds de pression sont les ventres de vitesses et inversement.

Ils sont décalés de $\frac{\lambda}{4}$: $x_{N_n, p} - x_{N_n, u} = \frac{\lambda}{4}$

B



$$\lambda = 5 \text{ cm}$$

$$a = 50 \text{ cm}$$

$$f = 6.8 \text{ kHz}$$

$$P_0 = 3.5 \text{ Pa}$$

$$\begin{aligned} 1. \quad c &= \lambda f \\ &= 0.05 \cdot 6.8 \cdot 10^3 \\ c &= 340 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \end{aligned}$$

cela correspond bien à la célérité d'une onde ^{sonore} dans l'air ✓

$$2. \quad p(x, t) = P_0 \cos(\omega t - kx + \varphi_0) \quad \checkmark$$

$$3. \quad \mu_0 \frac{\partial v}{\partial t} = - \frac{\partial p}{\partial x} \quad : \text{Equation d'Euler} \quad \checkmark$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = k P_0 \sin(\omega t - kx + \varphi_0)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = - \frac{k P_0}{\mu_0} \sin(\omega t - kx + \varphi_0)$$

$$v(x, t) = \frac{k P_0}{\omega \mu_0} \cos(\omega t - kx + \varphi_0)$$

$$v(x, t) = \frac{P_0}{\mu_0 c} \cos(\omega t - kx + \varphi_0) \quad \text{car} \quad c = \frac{\omega}{k} \quad \checkmark$$

$$4. \mathcal{P}(x,t) = p(x,t)v(x,t)S \quad \checkmark$$

$$= \frac{p_0^2}{\mu_0 c} \cos^2(\omega t - kx + \varphi_0) S \quad \checkmark$$

$$\text{or } \langle \cos^2(\omega t - kx + \varphi_0) \rangle = \frac{1}{2}$$

$$\text{et } S = \pi a^2$$

$$\begin{aligned} \text{done } \langle \mathcal{P}(x,t) \rangle &= \frac{\pi (p_0 a)^2}{2 c \mu_0} \\ &= \frac{\pi (3,5 \cdot 0,5)^2}{2 \cdot 340 \cdot 1} \end{aligned}$$

$$\langle \mathcal{P}(x,t) \rangle = 1,4 \cdot 10^{-2} \text{ W} \quad \checkmark$$

$$\mu_0 \approx 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

+ précision

$$\mu_0 \approx 1,2 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

à 25°C

$$\mu_0 = \frac{\rho^0 M}{RT}$$

5.

$$I = \langle \|\vec{\pi}\| \rangle = \frac{\langle \mathcal{P}(x,t) \rangle}{S} = \frac{\langle \mathcal{P}(x,t) \rangle}{\pi a^2}$$

$$I = 1,8 \cdot 10^{-2} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \quad \checkmark$$

$$\begin{aligned} \text{D'où } I_{\text{dB}} &= 10 \log\left(\frac{I}{I_0}\right) \\ &= 10 \log\left(\frac{1,8 \cdot 10^{-2}}{10^{-12}}\right) \end{aligned}$$

$$I_{\text{dB}} = 102,6 \text{ dB} \approx 103 \text{ dB.}$$

↳ Valeur élevée.