

Applications directes :

1. Atome de Bohr

L'atome de Bohr est une représentation de l'atome d'Hydrogène, constitué d'un proton et d'un électron.

- Donner les charges électriques de ces deux particules.
- Calculer la valeur numérique du champ électrostatique produit par un proton à une distance de $a = 53 \text{ pm}$, appelée rayon de Bohr.
- Représentez la force subie par l'électron de l'atome d'hydrogène dont la probabilité de présence maximale se trouve sur le rayon de Bohr. Déterminer la valeur de cette force.

Dans le modèle de Bohr, on suppose que l'électron est animé d'un mouvement circulaire uniforme autour du proton.

- Exprimer l'accélération de l'électron en coordonnées polaires. En déduire la vitesse de l'électron sur sa trajectoire, sachant que la masse d'un électron est de $9,0 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$.

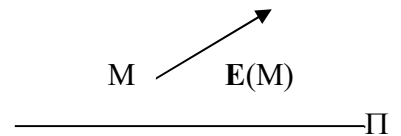
2. Champs et forces électrostatiques

Soient deux charges Q et Q' respectivement en M et M' , deux points distants de d .

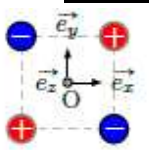
- Comparer les normes des champs électrostatiques auxquels sont soumises respectivement les charges Q et Q' .
- Même questions pour les forces subies par Q et Q' .
- On suppose que $Q' = -3Q$. Tracer l'allure des lignes du champ électrostatique, un tube de champ et préciser dans ce tube les régions où le champ est plus intense. (On pourra s'aider d'un logiciel) existe-t-il un endroit où le champ est nul ? Déterminer son abscisse sur l'axe QQ' .

3. Plan de symétrie et d'antisymétrie

- Déterminer la position de M' , symétrique de M par rapport au plan Π .
- Tracer le champ électrostatique en M' si Π est un plan de symétrie de la distribution de charges.
- Tracer le champ électrostatique en M' si Π est un plan d'antisymétrie de la distribution de charges.



4. Quadrupôle électrostatique



On considère la distribution des 4 charges à gauche.

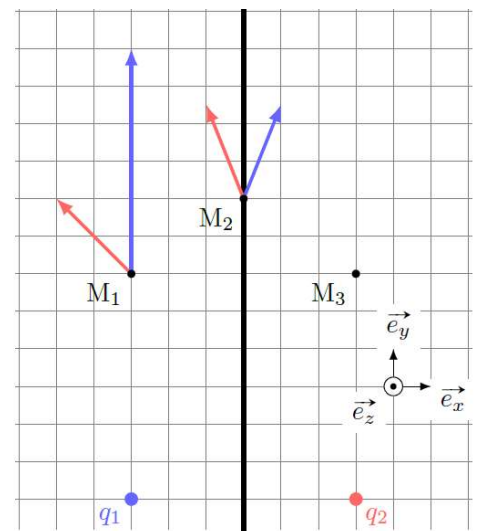
- Quels sont les trois plans de symétrie de la distribution ?
- Quels sont les deux plans d'antisymétrie de la distribution ?

5. Superposition et symétries

Sur le schéma ci-contre figurent, en M_1 et M_2 , les champs électrostatiques \vec{E}_1 et \vec{E}_2 respectivement générés par les deux charges $q_1 = +e$ et $q_2 = +e$.

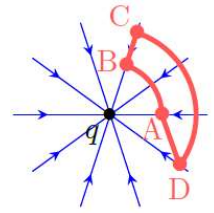
- Exprimer le champ électrostatique total \vec{E} au point M_1 en fonction des vecteurs de la base.
- Exprimer le champ électrostatique total \vec{E} au point M_2 en fonction des vecteurs de la base.

Le plan $(M_2, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, nommé P , est un plan de symétrie de la distribution de charge.



c) Quelles propositions sont correctes ?

- (a) $\vec{E}(M_3) = -2\vec{e}_x + 8\vec{e}_y$ (c) $\vec{E}(M_2) \in \mathcal{P}$
 (b) $\vec{E}(M_3) = 2\vec{e}_x + 8\vec{e}_y$ (d) $\vec{E}(M_2) \perp \mathcal{P}$

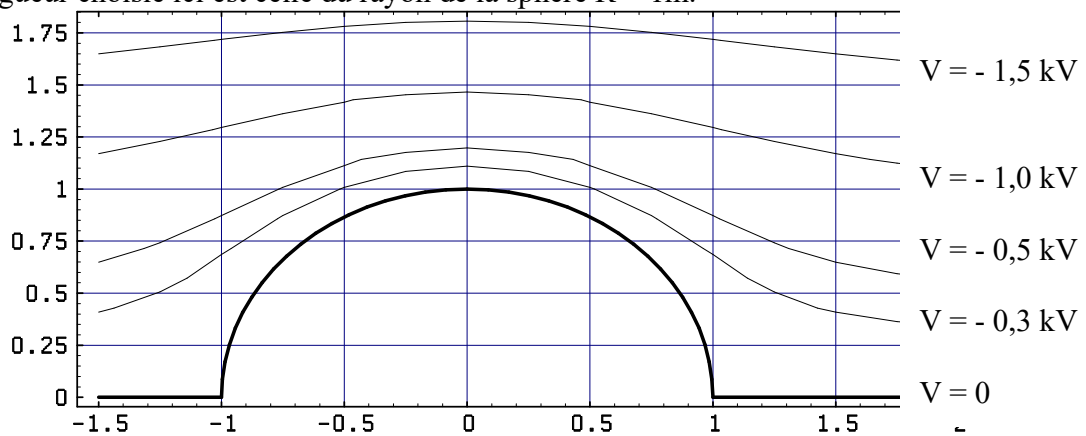


6. Signe d'une circulation électrostatique

Les lignes du champ électrostatique \vec{E} produit par une charge ponctuelle q négative convergent vers cette charge. Pour chaque chemin orienté, indiquer si la circulation C du vecteur champ électrique est positive, négative ou nulle : $A \rightarrow B$; $B \rightarrow C$; $C \rightarrow D$; $D \rightarrow A$

7. Electrification du sol

Lors d'un orage peut se développer au niveau du sol une zone chargée. On a tracé les équipotentielles au niveau d'une aspérité. Celle-ci est supposée conductrice donc sa surface est une équipotentielle. L'unité de longueur choisie ici est celle du rayon de la sphère $R = 1\text{m}$.



- Représenter l'allure de quelques lignes de champ.
- Quel est le signe de la charge portée par l'aspérité ?
- Dans quelles régions le champ est-il le plus intense ?
- Evaluer sa valeur au sommet de l'aspérité.
- La valeur du champ disruptif de l'air est de 30 kV.cm^{-1} . Commenter.

8. Boule creuse

Une boule creuse de centre O et de rayon R, porte une charge q répartie uniformément à sa surface.

- Déterminer le champ électrique créé en tout point de l'espace et représenter graphiquement la fonction trouvée. Est-ce que ce champ est continu en R ?
- En déduire le potentiel en tout point de l'espace et représenter graphiquement la fonction trouvée.
- Exprimer $V(R)$ en fonction de $E(R)$.



- Au Palais de la Découverte, une telle sphère est portée au potentiel $V_0 = 10\,000 \text{ V}$. Quelle valeur minimale doit-on donner au rayon de la sphère si la valeur du champ sur la sphère doit rester inférieure au champ disruptif de l'air $E_d = 3 \cdot 10^6 \text{ V.m}^{-1}$?

Si le champ sur la sphère devient supérieur au champ disruptif de l'air une étincelle se produit et la sphère se décharge.

- Déterminer pour ce rayon la valeur de la charge portée alors par la sphère.
- Que se passe-t-il si R diminue ? Justifier le « pouvoir des pointes »

9. Analogies entre champs électrique et gravitationnel

- Soit deux particules de charges q et q' respectivement en M et M' . Exprimer la loi de Coulomb entre ces deux particules. Donner le nom, la valeur et l'unité de la constante qui intervient dans cette expression.
- Soit deux particules de masses m et m' , respectivement en M et M' . Exprimer la force gravitationnelle qui s'exerce entre ces deux particules. Donner le nom, la valeur et l'unité de la constante qui intervient dans cette expression.
- Dresser un tableau d'analogies entre les deux situations précédentes.
- Énoncer le théorème de Gauss.
- À partir du tableau d'analogies, énoncer le théorème de Gauss gravitationnel.
- On assimile la terre à une sphère de masse uniforme. Déterminer le champ gravitationnel créé par la terre en tout point de l'espace. Représentation graphique.

10. Énergie potentielle d'une particule chargée dans un champ électrique

- Rappeler la définition de l'énergie potentielle d'un système soumis à une force conservative.
- Montrer que l'énergie potentielle d'une particule de charge q placée dans un champ électrique s'écrit $E_p = qV + \text{const}$, où V est le potentiel électrique.
- Énoncer le théorème de l'énergie cinétique lorsque la particule précédente n'est soumise qu'à la force électrique.

Un électron de masse m , de vitesse initiale nulle, est accéléré dans le vide par un champ électrostatique uniforme E .

- Proposer un dispositif expérimental qui permet de fabriquer un champ électrostatique uniforme. Quel nom donne-t-on à ce dispositif ?

On note U la différence de potentiel entre la position initiale et la position où la vitesse acquise est v . Exprimer v en fonction des données.

- Déterminer la valeur de U_{lim} telle que la vitesse de l'électron soit inférieure à 10% de la valeur maximale autorisée.

EXERCICES :

I Fonctionnement du coeur

Le coeur est un muscle qui se contracte de façon régulière. Cette contraction des muscles lui permet d'assurer la circulation sanguine dans tout le corps. On distingue deux types de tissus dans le coeur : le tissu nodal, responsable de l'élaboration et de la conduction de l'influx (activité électrique), et le tissu myocardique responsable de la contraction après stimulation par le tissu nodal.

On considère deux charges fixes positionnées sur un axe (Ox) : une charge $-q < 0$ au point A d'abscisse $x = -a$ et une charge $q > 0$ au point B d'abscisse $x = a$.

- Déterminer le vecteur champ électrostatique \vec{E} et le potentiel électrostatique V au point O , milieu de $[AB]$.

Un dipôle électrique est constitué de deux charges $-q$ située en A et $+q$ située en B ; on lui associe un moment dipolaire électrique $\vec{p} = q \overrightarrow{AB}$, de norme $p = qd$ avec $d = AB$. On repère un point M quelconque de l'espace par $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ avec O le milieu de $[AB]$. En coordonnées sphériques et à grande distance des deux charges, c'est-à-dire pour $r = OM \gg d$, on montre que le potentiel électrostatique V au point M s'écrit $V = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$.

Ce potentiel électrostatique est associé à un champ électrostatique \vec{E} .

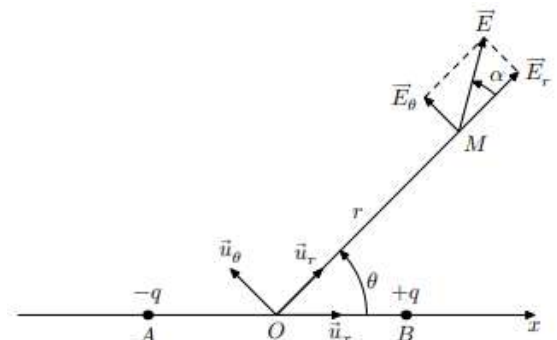


Figure 4 Dipôle électrique et coordonnées associées

- Déterminer les expressions des composantes E_r et E_θ du champ électrostatique \vec{E} à grande distance des deux charges ($r \gg d$).

3. Quelle relation a-t-on entre l'angle θ et l'angle α que fait le champ \vec{E} avec l'axe (OM) ?

4. Déterminer et dessiner le champ \vec{E} pour $\theta = 0$ et $\theta = \pi/2$.

L'enregistrement de l'activité cardiaque électrique au cours du temps est réalisé en mesurant une différence de potentiel entre deux points du corps. On appelle dérivation un système de deux électrodes exploratrices entre lesquelles on mesure une différence de potentiel. Dans l'étude des dérivations dites périphériques (ou des membres) les électrodes sont placées soit au poignet droit (point R) de potentiel V_R , soit au poignet gauche (point L) de potentiel V_L , soit à la jambe gauche (point F) de potentiel V_F . Par hypothèse, les points R , L et F sont aux sommets d'un triangle équilatéral (figure 5). On définit enfin une électrode de référence au potentiel V_W constant dont on précise les caractéristiques ci-après. Une dérivation unipolaire correspond à une différence de potentiel entre une électrode exploratrice et l'électrode de référence alors qu'une dérivation bipolaire correspond à une différence de potentiel entre deux électrodes exploratrices.

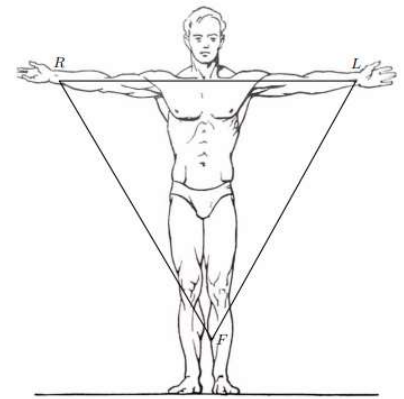


Figure 5 Dérivations périphériques

5. Combien peut-on construire de dérivation unipolaire ? de dérivation bipolaire ?

6. Quel intérêt y a-t-il à associer ces deux types de dérivations ?

La théorie d'Einthoven permet d'expliquer les tracés observés dans les dérivations périphériques (enregistrement à grande distance du cœur).

— Hypothèse 1 : à chaque moment du cycle cardiaque le cœur est assimilable à un dipôle électrique dont le vecteur moment dipolaire \vec{p} varie en module, direction et sens au cours du cycle cardiaque.

— Hypothèse 2 : l'origine de \vec{p} peut être considérée comme fixe et correspond au centre électrique O du cœur.

— Hypothèse 3 : le centre de gravité du triangle équilatéral formé par R , L et F est occupé par le centre électrique O du cœur.

7. À l'aide de l'expression du potentiel créé par un dipôle donnée précédemment, exprimer les trois potentiels V_R , V_L et V_F en fonction, notamment, des distances $r_R = OR$, $r_L = OL$ et $r_F = OF$. On n'introduira pas de variables angulaires.

8. Qu'imposent les hypothèses 2 et 3 pour le calcul précédent ?

9. En déduire la possibilité de définir par le calcul une électrode de référence de potentiel V_W nul.

On parle alors de borne centrale de Wilson. En pratique comment réaliser cette borne de Wilson ?

II. Distribution linéique

On considère une droite Oz chargée avec une densité uniforme linéique λ .

1. Définir et donner les unités de λ
2. Déterminer les éléments de symétrie de cette distribution. Que peut-on en déduire quant au champ créé par cette distribution ?
3. Tracer une surface de Gauss adaptée.
4. Déterminer le champ électrique créé par cette distribution en tout point de l'espace et en faire une représentation graphique.
5. Mêmes questions pour le potentiel.

III. Champ électrique dans une cavité

1. Calculer le champ électrique créé par une sphère uniformément chargée en volume de centre O , de rayon R en tout point de l'espace. Représenter graphiquement ce champ.
2. Exprimer le champ en un point M à l'intérieur de la cavité en fonction du vecteur \vec{OM} . Représenter ce champ.

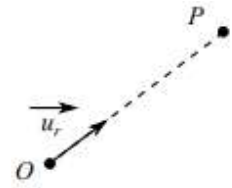
A l'intérieur de cette sphère on creuse une cavité sphérique de centre O' et de rayon R' . (R' forcément inférieur à R !). Il n'y a pas de charges à l'intérieur de cette cavité.

3. Justifier que l'application directe du théorème de Gauss pour le calcul du champ électrique en un point M de la cavité est impossible.

4. En remarquant que la cavité vide de charges peut être modélisée par la superposition d'une sphère uniformément chargée de charge $+Q$ et d'une sphère uniformément chargée de charge $-Q$, représenter en M à l'intérieur de la cavité les champs créés par chacune des deux sphères. Déterminer le champ en M et montrer qu'il y est uniforme.

IV. La structure interne de Jupiter

On notera $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ SI la constante de la gravitation universelle. On s'intéresse au champ gravitationnel $\vec{G}(P)$ créé en P par une distribution de masse.



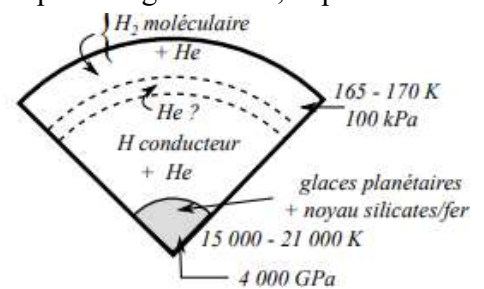
Une distribution de masse volumique μ crée un champ gravitationnel \vec{G} qui satisfait les équations locales suivantes : $\text{div} \vec{G} = -4\pi\mu$ et $\text{rot} \vec{G} = \vec{0}$

1. Comment s'exprime la force de gravitation exercée par une distribution de masse sur un point matériel P de masse m en fonction du champ de gravitation $\vec{G}(P)$?
2. Dresser une analogie entre les équations de l'énoncé et celles de l'électrostatique. Quelle est la différence fondamentale entre l'électrostatique et la gravitation ?
3. Le potentiel gravitationnel Φ est pour \vec{G} l'analogue de ce qu'est le potentiel électrostatique V pour le champ électrostatique. Laquelle des deux équations de l'énoncé permet d'assurer l'existence d'un potentiel gravitationnel Φ pour le champ de gravitation \vec{G} ? Écrire l'équation existant entre Φ et \vec{G} , au signe près. En déduire que le potentiel gravitationnel satisfait l'équation de Poisson et préciser alors le choix du signe effectué : $\Delta\Phi = 4\pi\mu$.
4. Énoncer le théorème de Gauss liant le champ électrostatique \vec{E} à la distribution volumique de charge ρ . En s'appuyant sur l'analogie établie entre l'électrostatique et la gravitation, exprimer le théorème de Gauss gravitationnel.

Distribution sphérique de masse non homogène

De manière générale, les planètes géantes possèdent :

- un noyau d'éléments lourds ;
- une enveloppe d'hydrogène et d'hélium ;
- au-delà d'une pression donnée, l'hydrogène devient métallique.



Structure interne de Jupiter - (J. Heyvaerts -

On étudie ici quelques propriétés du champ de gravitation

d'une distribution sphérique de masse non-homogène de rayon R. On associe un système de coordonnées sphériques à cette distribution dont le centre O est à l'origine du système. On notera $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$ la base de vecteurs associée.

On suppose que la masse volumique $\mu(r)$ ne dépend que de la coordonnée radiale r.

5. Justifier très précisément que le champ de gravitation est nécessairement de la forme

$\vec{G}(M) = -G(r) \vec{u}_r$, où $G(r)$ est la norme du champ de gravitation.

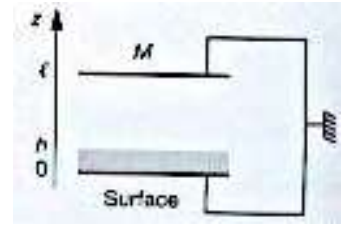
6. On note M(r) la masse contenue dans la boule de rayon r. Montrer alors que :

$$M(r) = \int_0^r 4\pi r'^2 \mu(r') dr'$$

7. En utilisant le théorème de Gauss pour la gravitation, déterminer dans le cas de ce modèle $G(r)$ pour $r > R$ (rayon de Jupiter). On appelle M_J la masse de Jupiter que l'on définira à l'aide de $M(r)$. Tracer le graphe de $G(r)$ pour $r > R$. Donner l'expression du potentiel gravitationnel $\Phi(r)$ dont dérive le champ de gravitation pour $r > R$ en le prenant nul à l'infini.

V. Mesure de charges

On cherche à détecter, par microscopie à force électrostatique, des charges électriques stockées dans un isolant déposé sur un conducteur. Deux plaques conductrices de surface S (armatures) occupent les plans $z = 0$ et $z = \ell$. Les charges sont uniformément réparties à l'intérieur d'un volume en grisé, défini par $0 \leq z \leq h$. On note ρ la densité volumique de charges dans cet espace. L'origine des potentiels électriques est choisie sur la surface conductrice étudiée en $z = 0$. Les deux surfaces conductrices sont reliées à la masse.



- A partir de l'équation de Poisson, déterminer les équations différentielles vérifiées par le potentiel dans chacune des deux régions de l'espace.
- Déterminer $V(z)$. On rappelle que le potentiel et le champ sont des fonctions continues à l'interface d'une distribution volumique de charges. Déterminer $E(\ell)$
- Représenter graphiquement $V(z)$. On prendra $h/\ell = 0,2$.
- On suppose que l'armature en $z = \ell$ porte une densité surfacique de charge σ . Le champ électrique au dessus de cette armature étant nul, déterminer en appliquant le théorème de Gauss, la valeur du champ électrique juste en dessous de cette armature, en fonction de σ .
- En déduire l'expression de σ en fonction de ρ et des dimensions du problème.
- Quelle est l'expression de la force subie par l'électrode supérieure ? Quel peut-être le principe de la mesure de la charge q présente au voisinage de la surface $z = 0$?

VI. Influence de la main dans le Thérémine

Le thérémine est un boîtier électronique avec deux antennes qui produit de la musique sans que l'instrumentiste ne touche l'instrument. Une antenne verticale est dite antenne de tonalité ou pitch car on commande la hauteur de la note en faisant varier la distance de la main droite à l'antenne verticale. L'antenne horizontale en forme de boucle est utilisée pour faire varier l'intensité du son selon la position de la main gauche. La sortie du son, proche de celui d'une scie musicale, se fait par un haut-parleur. Cet instrument exige de l'instrumentiste une grande précision des mouvements de ses mains et une quasi-immobilité du reste du corps : la note juste est difficile à atteindre. Les morceaux joués sont lents.

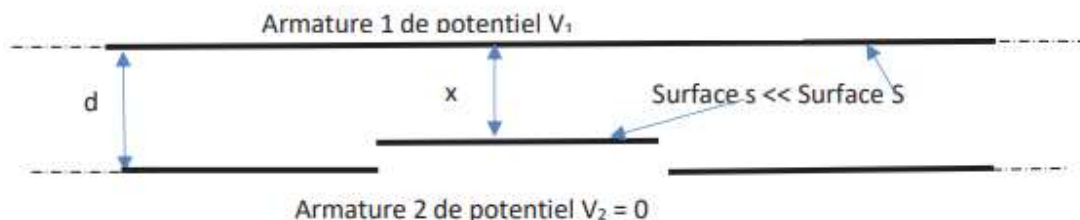


En première approche, on utilise le modèle suivant :

- L'antenne constitue l'armature 1 d'un condensateur plan de potentiel V_1 et de surface S_1
- L'autre armature, de potentiel nul est constituée par :

Le corps immobile de l'instrumentiste à la distance d de l'armature 1,

La main droite « en avant du corps », à la distance x de l'armature 1, modélisée par une surface plane $s \ll S$. S est l'aire totale des armatures en regard.



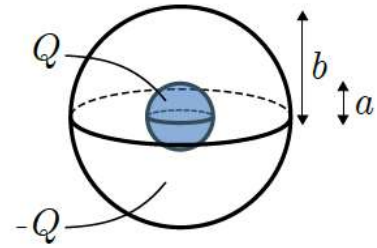
1. Rappeler l'expression de la capacité d'un condensateur plan.
2. Rappeler la méthode d'obtention de cette relation.
3. Par quelle association (série ou parallèle) peut-on modéliser le corps et la main droite de l'instrumentiste ? En déduire l'expression de la capacité C de l'ensemble, en fonction de ϵ_0 , S , s , x et d .

L'instrumentiste déplace très légèrement la main d'une quantité dx petite devant $(x-d)$. Exprimer la nouvelle capacité de l'ensemble.

4. Quelle est la variation dC de la capacité au premier ordre en fonction de ϵ_0 , s, dx, et x ?
 $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$. Faire l'application numérique pour $s = 100 \text{ cm}^2$, $x = 20 \text{ cm}$ et $dx = 0,5 \text{ cm}$.
 Commenter.

VII. Condensateur sphérique

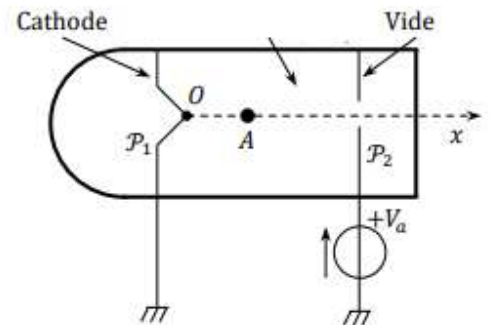
On considère un système électrique en deux parties, appelées armatures : une boule de rayon a qui est chargée positivement dans tout son volume, et dont la charge électrique totale est +Q; ainsi qu'une sphère creuse qui l'entoure, de rayon $b > a$, et qui est chargée électriquement en surface, et dont la charge électrique totale est -Q. Les deux parties sont séparées par du vide.



1. Déterminer l'expression de la densité volumique de charge ρ dans la boule de rayon a, en fonction de Q.
2. Déterminer l'expression de la densité surfacique de charge σ sur la sphère de rayon b en fonction de Q.
3. Déterminer l'expression du champ électrique dans les trois zones de l'espace $r < a$, $a < r < b$, et $r > b$. Tracer graphiquement la fonction $E(r)$.
4. En déduire le potentiel électrique $V(r)$ entre les deux armatures de ce système.
5. En déduire alors l'expression de la capacité C de ce condensateur.

VIII. Électron accéléré et champ magnétostatique

Dans un canon de microscope électronique, un électron A (masse m_e , charge électrique $-e$) est émis, avec une vitesse initiale négligeable, le long d'un axe Ox , par une plaque métallique P_1 portée à un potentiel nul. Cet électron est accéléré, dans le vide, grâce à une grille métallique P_2 portée à un potentiel constant $V_a = 100 \text{ V}$. Les plaques P_1 et P_2 sont habituellement appelées cathode et anode, respectivement.



1. Exprimer la vitesse v de A lorsqu'il atteint l'anode en fonction des données.
2. Calculer v . On indique les valeurs approximatives des constantes fondamentales suivantes :
 $m_e \approx 9 \times 10^{-31} \text{ kg}$ et $e \approx 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$.
3. Une fois la vitesse v acquise, on s'arrange à la sortie (non représentée sur la figure) du canon pour que l'électron pénètre dans une région où règne seulement un champ magnétique \vec{B} , stationnaire et uniforme, dont la direction est perpendiculaire à la direction de la vitesse incidente de l'électron. Que dire quant à la trajectoire de l'électron dans cette région ?
 A) L'électron n'est pas dévié et suit donc une trajectoire rectiligne.
 B) La trajectoire de l'électron est une parabole.
 C) La trajectoire de l'électron est circulaire de rayon proportionnel à B .
 D) La trajectoire de l'électron est circulaire de rayon proportionnel à $\frac{\sqrt{V_a}}{B}$.
4. Lorsque l'électron quitte la région où règne le champ magnétique, que peut-on dire de son vecteur vitesse \vec{v}_s et de sa trajectoire (on négligera l'influence du poids) ?
 A) Le vecteur \vec{v}_s possède une norme égale à $6 \times 10^6 \text{ m.s}^{-1}$.
 B) Le vecteur \vec{v}_s a la même direction que lorsque l'électron est rentré dans la région du champ magnétique.
 C) La trajectoire de l'électron est toujours circulaire.
 D) La trajectoire de l'électron est rectiligne.

5. On s'intéresse à l'angle θ_m , dit de déflexion magnétique, que forme la direction de \vec{v}_s avec l'axe Ox lorsque A sort de la région du champ magnétique. Cet angle est $\theta_m = \sqrt{\frac{e}{2m_e V_a}} BL^\alpha$ où α est un nombre réel et L une longueur ; précisément, L est la longueur de la trajectoire de l'électron dans la région du champ magnétique. À l'aide d'une analyse dimensionnelle, déterminer α .