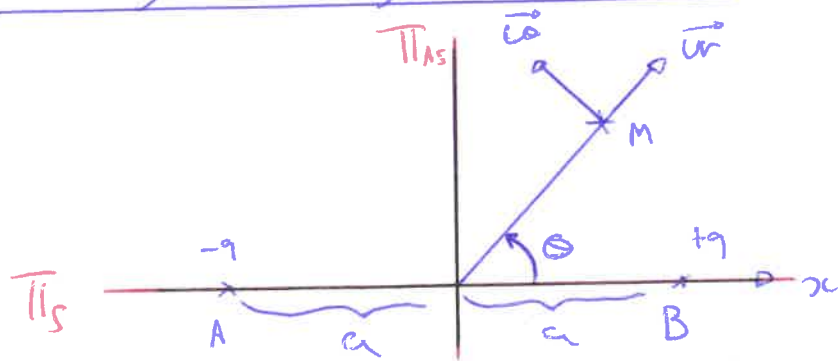


Exercice I, TD 21, Groupe 11



Q1) D'après le théorème de superposition :

$$\vec{E}(O) = \vec{E}_{-q}(O) + \vec{E}_{+q}(O) = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 a^2} \vec{u}_x - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a^2} \vec{u}_x$$

$$\text{d'où } \vec{E}(O) = \frac{-q}{2\pi\epsilon_0 a^2} \vec{u}_x$$

σ_s en sphérique : $\vec{E}_+(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$, avec $\vec{E} = -\text{grad } V$

$$V(r) = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad \checkmark$$

Ainsi, d'après le théorème de superposition :

$$\begin{aligned} V(M) &= V_+(M) + V_-(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{BM}\|} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{AM}\|} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\|\vec{BM}\|} - \frac{1}{\|\vec{AM}\|} \right) \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi } V(O) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a} \right) = 0 \quad \checkmark$$

$$\text{Q2) On a } V(r, \theta) = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\vec{P} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

et $\vec{E}(M) = -\text{grad } V$, avec $\vec{E}(M) = E_r \vec{u}_r + E_\theta \vec{u}_\theta$ ✓

$$\text{Alors } E_r = \frac{\partial V}{\partial r} \quad \checkmark \quad \text{et } E_\theta = \frac{\partial V}{\partial \theta} \frac{1}{r} \quad \checkmark$$

$$\text{d'où } \frac{\partial V}{\partial r} = \frac{-2\rho \cos \theta}{4\pi \epsilon_0 r^3} \Rightarrow E_r = \frac{\rho \cos \theta}{2\pi \epsilon_0 r^3}$$

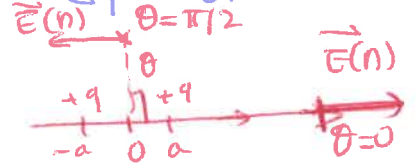
$$\text{D'autre part } \frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{-\rho \sin \theta}{4\pi \epsilon_0 r^3}$$

$$\text{Alors } E_\theta = \frac{\rho \sin \theta}{4\pi \epsilon_0 r^3}$$

$$\text{Q3) } \tan \alpha = \frac{E_\theta}{E_r} = \frac{\rho \sin \theta}{4\pi \epsilon_0 r^3} \times \frac{2\pi \epsilon_0 r^3}{\rho \cos \theta} = \frac{1}{2} \tan \theta$$

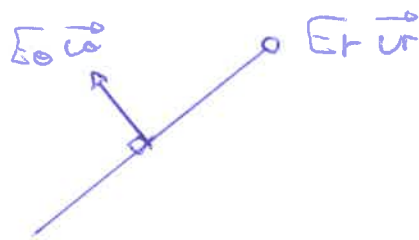
$$\text{Q4) Pour } \theta = 0, \vec{E}(M) = \vec{E}_r(M) = E_r \vec{u}_r$$

$$\text{d'où } \vec{E}(M) = \frac{\rho}{2\pi \epsilon_0 r^3} \vec{u}_r$$



$$\text{De plus, pour } \theta = \frac{\pi}{2}, \vec{E}(M) = E_\theta \vec{u}_\theta = \frac{\rho}{4\pi \epsilon_0 r^3} \vec{u}_\theta$$

$$\text{On a donc } E_\theta = \frac{1}{2} E_r$$



Q5) On peut construire 3 dérivées unipolaires.

$$(V_R - V_F, V_R - V_L, V_F - V_L)$$

Et 3 dérivées bipolaires. $(V_W - V_R, V_W - V_L, V_W - V_F)$

Q6) L'association de ces deux types de dénominations permet de mieux suivre l'activité électrique dans le corps. Cela permet de détecter dans quelle partie du corps il pourrait y avoir un problème de circulation.
... ou plutôt la cohérence des résultats.

Q7) On prend $\theta = 1$ alors,
n'a pas de sens!

$$\begin{cases} V_R = \frac{\vec{P} \cdot \vec{OR}}{4\pi \epsilon_0 (\Gamma_R)^3} \\ V_L = \frac{\vec{P} \cdot \vec{OL}}{4\pi \epsilon_0 (\Gamma_L)^3} \\ V_F = \frac{\vec{P} \cdot \vec{OF}}{4\pi \epsilon_0 (\Gamma_F)^3} \end{cases}$$

Q8) Si l'origine de $\vec{p}$ est fixe et placée au centre de gravité du triangle équilatéral :

$\Gamma_R = \Gamma_L = \Gamma_F$, d'où $V_R = V_L = V_F$ ✓

Q9) Comme tous les potentiels sont égaux, on peut définir une électrode de référence au potentiel nul.

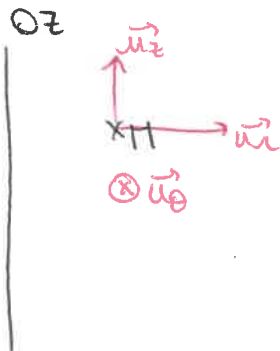
La loi de Wilson peut être réécrite *bof!*

$$V_W = V_R + V_L + V_F = \frac{\vec{P}}{4\pi \epsilon_0 D^3} (\vec{OR} + \vec{OL} + \vec{OF}) = \vec{0}$$

TD 21 - Ex II

- 1) λ : densité de charge par unité de distance
 $[\lambda] = C \cdot m^{-1}$ ✓

2)



identifier les notations Π_s = plan de symétrie

$$\Pi_1 (M, \vec{u}_r, \vec{u}_z) = \Pi_s \text{ des charges}$$

$$\Pi_2 (M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta) = \Pi_s \text{ des charges}$$

$$\Pi_3 (M, \vec{u}_z, \vec{u}_\theta) \neq \Pi_s \text{ des charges}$$

donc $\vec{E}(M) \in (\Pi_1 \cap \Pi_2) \Rightarrow \vec{E}(M) = E(M) \vec{u}_r$
les charges sont

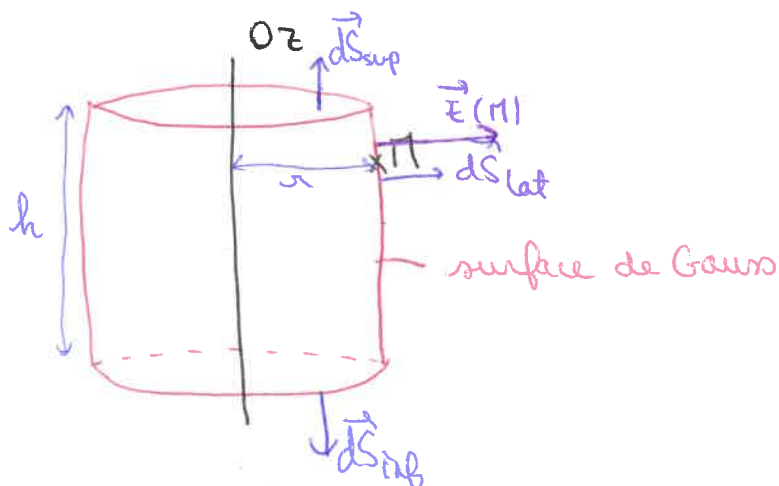
Comme ~~$\vec{E}$ est~~ invariante par rotation selon θ
 alors $E(r, \theta, z) = E(r, z)$.

Or ~~$\vec{E}$ est~~ *les charges sont* invariant par translation selon z
 alors $E(r, z) = E(r)$

Ainsi $\vec{E}(M) = E(r) \vec{u}_r$ ✓

Le champ est radial cylindrique . ✓

3)



4) on va appliquer le théorème de Gauss

$$\oint_{S_{\text{fermée}}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

$$\begin{aligned} \oint_{S_{\text{fermée}}} \vec{E} \cdot d\vec{S} &= \iint_{S_{\text{latérale}}} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \underbrace{\iint_{S_{\text{sup}}} \vec{E} \cdot d\vec{S}}_{=0 \text{ car } \vec{dS}_{\text{sup}} \perp \vec{E}(r)} + \underbrace{\iint_{S_{\text{inf}}} \vec{E} \cdot d\vec{S}}_{=0 \text{ car } \vec{dS}_{\text{inf}} \perp \vec{E}(r)} \\ &= E(r) 2\pi r h \end{aligned}$$

$$Q_{\text{int}} = \lambda h$$

$$\text{D'où } E(r) 2\pi r h = \frac{\lambda h}{\epsilon_0}$$

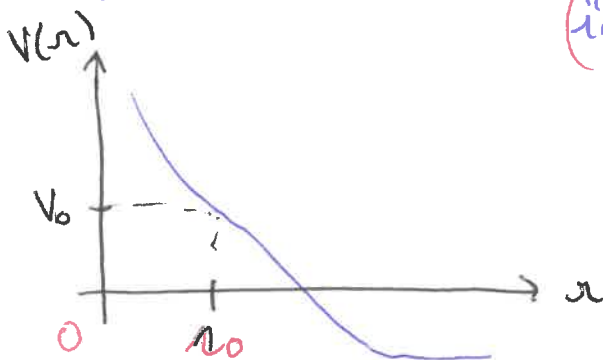
$$\text{donc } \boxed{\vec{E}(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{u}_r}$$



$$\text{Q5) } \vec{E} = -\text{grad } V \text{ donc } E(r) \vec{u}_r = -\frac{dV}{dr} \vec{u}_r$$

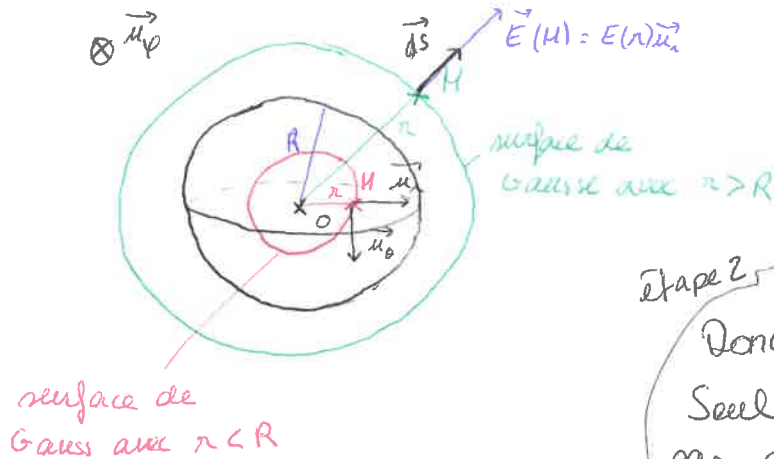
$$\text{donc } V = -\int \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{dr}{r} + \text{cte}$$

$$\text{On pose cste} = V_0 \text{ pour } r_0 = r \text{ (1m)} \text{ donc } \boxed{V = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{r_0}{r}\right) + V_0}$$



TD 21 : Ex III]

(groupe 7)



TB pour l'expression de $\vec{E}(r)$

1)

La rotation d'angle θ et la rotation d'angle φ laissent les charges invariantes.

Donc $E(M)$ est indépendant de θ et φ .

Seule la translation selon $\vec{u}_r$ ne laisse pas les charges invariantes.

étape 2

étape 1 : plans de symétrie des charges qui passent par M :
 $\pi_1(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ et $\pi_2(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\varphi)$. T.S. charges
 or $\vec{E}(M) \in (\pi_1 \cap \pi_2)$ donc $\vec{E}(M) = E(M)\vec{u}_r$.
→ $\vec{E}(r) \in \pi_{S \text{ charges}}$ donc

⇒ Ainsi on a : $\vec{E}(M) = E(r)\vec{u}_r$.

$$\Phi(\vec{E}) = \oint_{S_{\text{gauss}}} \vec{E}(r) \cdot d\vec{s} = E(r) \oint_{S_{\text{gauss}}} ds = E(r) 4\pi r^2 = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad \text{si } r > R$$

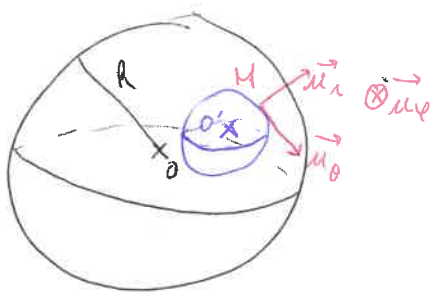
$$\Rightarrow \vec{E}(r) = \frac{Q}{4\pi r^2 \epsilon_0} \vec{u}_r \quad \text{pour } r > R.$$

$$\text{si } r < R : Q_{\text{int}} = \rho \text{ Volume} = \rho \frac{4}{3} \pi r^3 \Rightarrow \vec{E}(r) = \frac{\rho \frac{4}{3} \pi r^3}{\epsilon_0 4\pi r^2}$$

$$\Rightarrow \vec{E}(r) = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \vec{u}_r \quad \text{pour } r < R. \quad \checkmark$$

$$2) \vec{OM} = r \vec{u}_r \quad \text{donc} \quad \vec{E}(r < R) = \frac{\rho \vec{OM}}{3\epsilon_0} \quad \checkmark$$

3)



$$\vec{E}(M) = E_r(M)\vec{u}_r + E_\theta(M)\vec{u}_\theta + E_\varphi(M)\vec{u}_\varphi$$

plans qui passent par M :

$$\pi_1(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta) \neq \pi_S$$

$$\pi_2(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\varphi) \neq \pi_S$$

$M \notin \Pi_s$ donc ce n'est pas un cas de haute symétrie, le théorème de Gauss n'est donc pas applicable.

4) • champ au point M dans la sphère uniformément chargée de charge $+Q$: $\vec{E}_+(M) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{OM}$



↳ de centre O

• champ au point M dans la sphère uniformément chargée de charge $-Q$: $\vec{E}_-(M) = -\frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{OM}$



• Théorème de superposition : $\vec{E}(M) = \vec{E}_+(M) + \vec{E}_-(M) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} (\vec{OM} - \vec{OM})$
 $\vec{E}(M) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{OO'}$ indépendant de M .

↳ pour faire la carte on a rajouté une sphère chargée uniformément en volume de signe opposé.

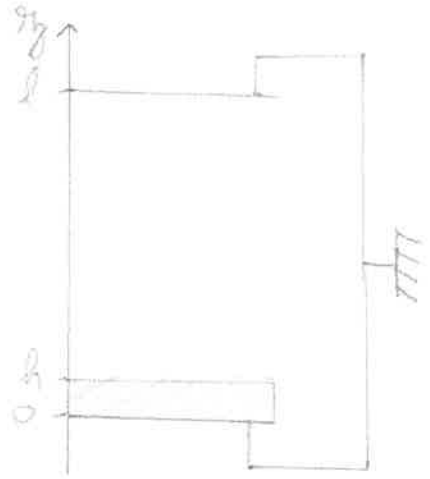
a) Le problème est unidirectionnel.
Donc avec l'équation de Poisson, on a:

* Pour $0 \leq y \leq h$:

$$\frac{d^2 V}{dy^2} = - \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

* Pour $h \leq y \leq l$:

$$\frac{d^2 V}{dy^2} = 0$$



b) Intégrons deux fois chacune des deux équations pour déterminer $V(y)$.

* Pour $0 \leq y \leq h$:

$$\frac{dV}{dy} = - \frac{\rho}{\epsilon_0} y + A \quad \text{où } A \text{ est une constante.}$$

Suis:

$$V(y) = - \frac{\rho}{2\epsilon_0} y^2 + A y + C$$

Or, la surface chargée est reliée à la masse, donc:

$$V(y=0) = 0 = C$$

$$\text{donc } \underline{V(y) = - \frac{\rho}{2\epsilon_0} y^2 + A y}$$

* Pour $h \leq y \leq l$:

$$\frac{dV}{dy} = B \quad \text{où } B \text{ est une constante.}$$

Et:

$$V(y) = B y + D$$

Et comme la seconde armature est reliée à la masse:

$$V(y=l) = 0$$

$$\Rightarrow B l + D = 0 \text{ donc } D = -B l \text{ d'où } \underline{V(y) = B(y-l)}$$

Par ailleurs, le champ électrique est continu en h :

$$E(y=h^-) = E(y=h^+)$$

$$\Rightarrow -\frac{dV}{dy}(y=h^-) = -\frac{dV}{dy}(y=h^+)$$

$$\Rightarrow -\frac{\rho h}{\epsilon_0} + A = B$$

De même, le potentiel V est continu en h :

$$V(y=h^-) = V(y=h^+)$$

$$\Rightarrow -\frac{\rho h^2}{2\epsilon_0} + Ah = B(h-l)$$

$$\Rightarrow -\frac{\rho h^2}{2\epsilon_0} + Ah = \left(-\frac{\rho h}{\epsilon_0} + A\right)(h-l)$$

$$\Rightarrow A = \frac{\rho h}{\epsilon_0 l} \left(\frac{h}{2} + (l-h)\right)$$

$$\Rightarrow A = \frac{\rho h}{\epsilon_0 l} \left(l - \frac{h}{2}\right)$$

Alors:

$$B = A - \frac{\rho h}{\epsilon_0}$$

$$= \frac{\rho h}{\epsilon_0} \left(1 - \frac{h}{2l}\right) - \frac{\rho h}{\epsilon_0}$$

$$\text{d'où } B = -\frac{\rho h^2}{2l\epsilon_0}$$

Ainsi:

• Pour $0 \leq y \leq h$:

$$V(y) = -\frac{\rho}{2\epsilon_0} y^2 + \frac{\rho h}{\epsilon_0 l} \left(l - \frac{h}{2}\right) y \quad \underline{B}$$

• Pour $h \leq y \leq l$:

$$V(y) = -\frac{\rho h^2}{2l\epsilon_0} (y-l) \quad \underline{B}$$

Enfin:

$$E(l) = -\frac{dV}{dy}(l) = -B$$

donc:

$$E(l) = \frac{\rho h^2}{2l\epsilon_0}$$

$$\vec{E}(l) = \frac{\rho h^2}{2l\epsilon_0} \vec{u}_z$$

ainsi: $\phi(\vec{E}_2) = \cancel{E_z(P)} \cdot S_{\text{sup}}$
 $\phi_{\substack{\text{à l'intérieur} \\ \text{S gauss}}}$ $= \cancel{E_z}$

Suis avec le théorème de Gauss:

$$\phi_{\substack{\text{à l'intérieur} \\ \text{S gauss}}}(\vec{E}_2) = \frac{Q_{\text{int S gauss}}}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow \cancel{E_z(y)} S_{\text{sup}} = \frac{\sigma S_{\text{sup}}}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow E_z(y) = \frac{\sigma}{\cancel{\epsilon_0}}$$

$$\vec{E}_2(z) = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_z$$

$$\vec{E}_2(l) = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_z$$

ici le problème ne dépend pas de g .

On note $\vec{E}_n$ le champ généré par la plaque en $z = 0$ (qui correspond à E de la question c).

Le champ électrique au dessus de l'armature en $z = l$ s'écrit, d'après le principe de superposition:

$$\begin{aligned} \vec{E}(l^+) &= \vec{E}_1(l) + \vec{E}_2(l^+) = \vec{0} \\ &= \frac{\rho h^2}{2\epsilon_0} \vec{u}_z + \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_z = \vec{0} \\ \Rightarrow \frac{\sigma}{\epsilon_0} &= -\frac{\rho h^2}{2\epsilon_0} \end{aligned}$$

égalité de $\vec{E}_2(l) = \vec{E}(l)$
 $-\frac{\sigma}{\epsilon_0} = +\frac{\rho h^2}{2\epsilon_0}$

Alors, en dessous de l'armature, on a:

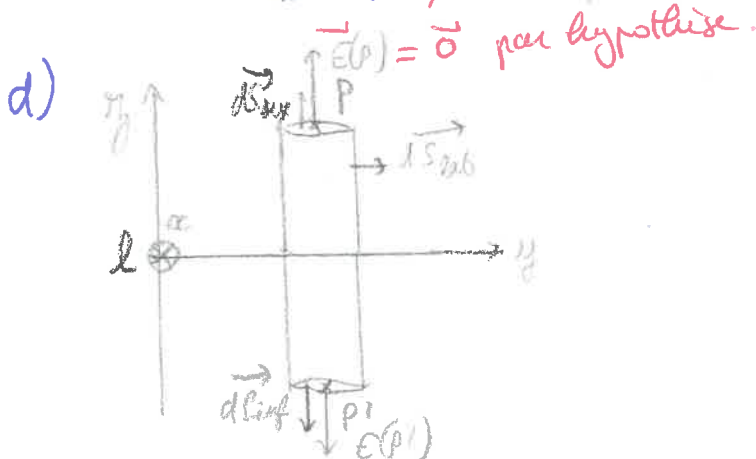
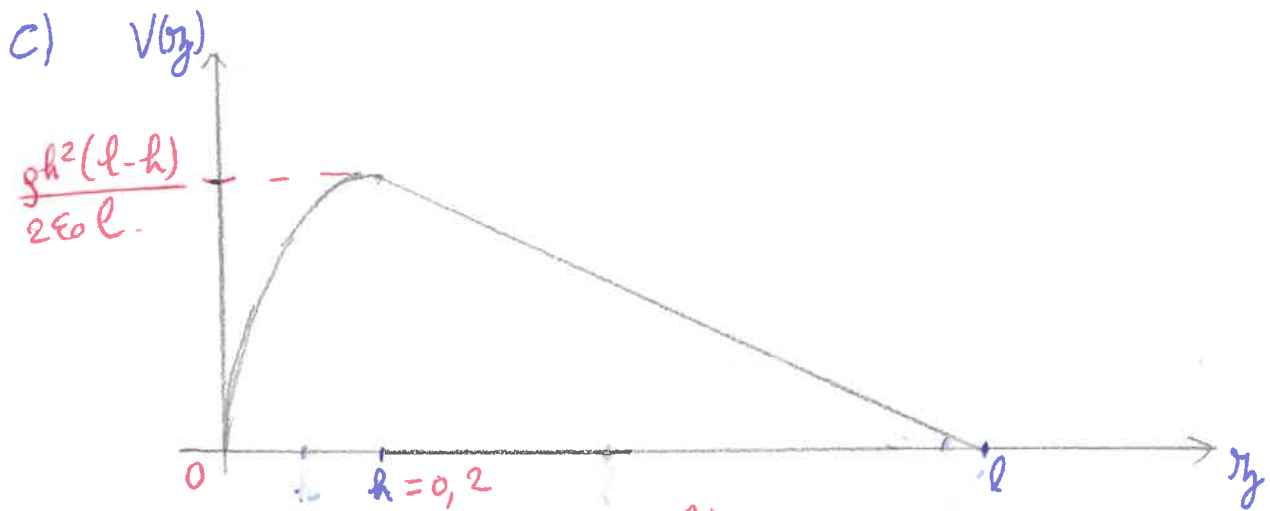
$$\begin{aligned} \vec{E}(l^-) &= \vec{E}_1(l) + \vec{E}_2(l^-) \\ &= \frac{\rho h^2}{2\epsilon_0} \vec{u}_z - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_z \end{aligned}$$

$$\text{d'où } \vec{E}(l^-) = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_z$$

e) On a vu que $\frac{\sigma}{\epsilon_0} = -\frac{\rho h^2}{2\epsilon_0}$

d'où: $\sigma = -\frac{\rho h^2}{2l}$

σ est négatif



Déterminons le champ électrique généré par l'armature occupant le plan $y = l$. On le notera $\vec{E}_2$.

Comme les plans $(P, \vec{u}_x, \vec{u}_z)$ et $(P, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ sont des plans de symétrie des charges, $\vec{E}_2(P)$ est colinéaire à $\vec{u}_y$. ✓

De plus, les translations selon x et z laissent les charges invariantes donc $\vec{E}_2(P)$ ne dépend que de y .

donc $\vec{E}_2(P) = E(y) \vec{u}_y$. ✓

On choisit comme surface de Gauss le cylindre représenté sur le schéma.

Calculons le flux de $\vec{E}$ à travers cette surface fermée:

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{E})_{\text{à travers } S_{\text{Gauss}}} &= \Phi(\vec{E}_1)_{\text{à travers } S_{\text{sup}}} + \Phi(\vec{E}_1)_{\text{à travers } S_{\text{inf}}} + \Phi(\vec{E}_2)_{\text{à travers } S_{\text{latérale}}} \\ &= \iint_{S_{\text{sup}}} \underbrace{E_2(P)}_{=0} dS_{\text{sup}} + \iint_{S_{\text{inf}}} E_2(P') dS_{\text{inf}} + \underbrace{\iint_{S_{\text{latérale}}} \vec{E}_2 \cdot d\vec{S}_{\text{lat}}}_{=0 \text{ car } \vec{E} \perp d\vec{S}_{\text{lat}}} \\ &= \cancel{E_2(P) S_{\text{sup}}} + E_2(P') S_{\text{inf}} \end{aligned}$$

où $S_{\text{sup}} = S_{\text{inf}}$ et $\cancel{E_2(P)} = \cancel{E_2(P')}$.

f) La force subie par l'électrode supérieure s'écrit:

$$\vec{F} = Q \vec{E}(l) \quad -$$

$$\text{où } Q = \sigma S \quad -$$

$$\Rightarrow \vec{F} = - \frac{\rho^2 h^4 S}{\epsilon_0 l^2} \vec{u}_z \quad - \quad \text{charge totale} = \rho h S = q$$

$$\vec{F} = - \frac{q^2 h^2}{S \epsilon_0 l^2} \vec{u}_z$$

↳ en mesurant $\|\vec{F}\|$ on accède à la valeur de q .