

**Applications directes :****1. Ordres de grandeurs en conduction métallique**

L'aluminium a pour masse molaire  $M = 26,98 \text{ g.mol}^{-1}$  et une masse volumique  $\mu = 2,7.10^3 \text{ kg.m}^{-3}$ .

a. Déterminer  $n$  le nombre d'atome d'aluminium par unité de volume.

On suppose que chaque atome d'aluminium libère 3 électrons de conduction.

b. Déterminer la densité volumique d'électrons de conduction. En déduire la densité volumique de charge d'électrons libres. Que vaut la densité volumique de charge positive ? Quelle est la nature des charges positives ?

c. Déterminer la valeur de la densité de courant dans un fil en aluminium de section  $s = 1 \text{ mm}^2$  traversé par un courant de 10 A.

d. En déduire la vitesse moyenne des électrons libres et la comparer à la vitesse d'agitation thermique. On donne l'énergie cinétique moyenne d'agitation thermique d'un électron  $E_c = 3 \text{ kT} / 2$  où  $k = 1,38.10^{-23} \text{ J.K}^{-1}$  est la constante de Boltzmann.

**2. Interprétation cinétique du vecteur densité de courant**

Un conducteur filiforme homogène dirigé suivant Ox de section  $s$ , constante et très petite est le siège d'un courant électrique d'intensité constante  $I$  circulant dans le sens de sa longueur. Les porteurs de charge sont des électrons de charge  $-e$ , de vitesse  $\vec{v}$  constante due au champ électrique  $\vec{E}$  créé par le générateur.

1. En admettant que chaque porteur est soumis à une force de frottement fluide  $\vec{f} = -k\vec{v}$  ( $k > 0$ ), établir l'expression de  $\vec{v}$  en fonction de  $\vec{E}$ . Que modélise cette force  $\vec{f}$  ?

Soit  $n$  le nombre de porteurs par unité de volume.

2. Etablir l'expression algébrique de  $I$  en fonction de  $s$ ,  $e$ ,  $n$ ,  $v$ .

3. Définir le vecteur densité de courant  $\vec{j}$  et l'exprimer en fonction de  $\vec{E}$ . Quelle loi établit-on ?

La conductivité de l'argent vaut  $6,2.10^7 \text{ SI}$  et sa densité électronique  $7,4.10^{22} \text{ cm}^{-3}$ .

4. En déduire la valeur numérique de  $k$  avec ses unités.

5. Par homogénéité exprimer  $k$  en fonction de la masse  $m$  d'un électron et d'un temps  $\tau$ . Calculer la valeur numérique de  $\tau$ .

6. On suppose maintenant que le fil conducteur est soumis à un échelon de tension. Comment réalise-t-on ceci expérimentalement ? En déduire l'équation différentielle qui régit la vitesse d'un électron. Proposer une interprétation physique de  $\tau$ .

**3. Loi d'Ohm dans le plasma atmosphérique produit par un éclair**

Lors d'un éclair, l'air atmosphérique forme un plasma, dans lequel circulent des électrons à une vitesse de  $2.10^5 \text{ m.s}^{-1}$ . L'intensité du courant électrique correspondant est 10 kA. Entre deux points de l'éclair distants de 50 m, la différence de potentiel est 50 MV. La température du plasma est de l'ordre de 10 000 K.

a) Quelle est la valeur du champ électrique qui règne dans le plasma ?

b) Calculer la valeur de la densité du courant électrique en supposant le plasma de géométrie cylindrique de section  $1 \text{ mm}^2$ .

c) Déterminer la densité volumique d'électrons.

d) Déterminer la conductivité du plasma et la comparer à la conductivité mesurée  $1,4.10^4 \text{ S.m}^{-1}$ .

Peut-on appliquer la loi d'Ohm locale dans le plasma ?

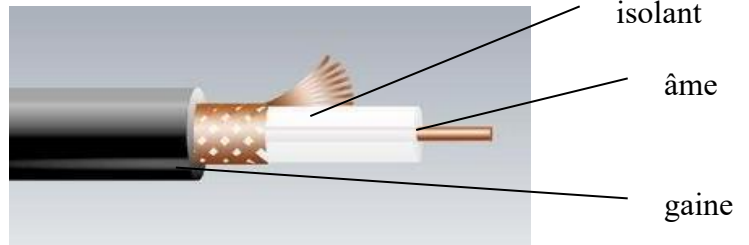
**4. Résistance électrique d'un conducteur métallique creux :**

Soit un conducteur métallique creux de longueur  $l = 5 \text{ cm}$  d'axe Ox, compris entre les rayons  $R_1 = 1 \text{ cm}$  et  $R_2 = 2 \text{ cm}$ . Il est parcouru par un courant d'intensité  $I = 2 \text{ A}$  et par un vecteur densité de courant uniforme  $\vec{j} = j \vec{u}_x$ . Le matériau est de résistivité  $\rho = 9.10^{-10} \Omega.m$ . Déterminer la valeur de  $j$  ainsi que la résistance du conducteur.

## Exercices :

### I. Résistance de fuite d'un câble coaxial

On considère un câble coaxial de longueur  $l$ . Le câble est composé de deux conducteurs cylindriques coaxiaux séparés par un isolant en polyéthylène, imparfait, de conductivité  $\gamma = 10^{-17} \text{ S.m}^{-1}$ .



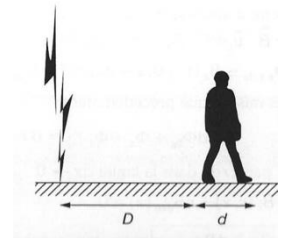
Le conducteur central, cylindre de rayon  $a$ , constitue « l'âme » du câble, de potentiel  $V > 0$ , le conducteur extérieur, de rayon  $b$ , constitue la « gaine » reliée à la masse.

On représente les pertes le long du câble par un courant électrique radial  $I$  dans le milieu diélectrique isolant.

1. Dessiner les lignes de courant dans le diélectrique.
2. Le régime est stationnaire, que peut-on en déduire ?
3. En considérant un tronçon rectiligne, de hauteur  $h$ , exprimer le vecteur densité de courant  $\vec{j}$  en fonction de  $I$ . Est-ce que  $\vec{j}$  est uniforme ?
4. Déterminer la différence de potentiel  $U$  entre l'âme et la gaine en fonction de  $I$ ,  $h$ ,  $\gamma$ ,  $a$  et  $b$ .
5. En déduire la conductance linéique de fuite.
6. AN : rayon de l'âme = 0,48 mm ; rayon de la gaine = 2,95 mm. Calculer la conductance linéique de fuite.
7. Exprimer la puissance volumique dissipée dans l'isolant. Est-elle uniforme ? En déduire la puissance perdue par effet Joule dans le câble. Conclure.
8. AN : le câble a une longueur de 10 m, il est soumis à une différence de potentiel de 100 V. Calculer la valeur de  $I$ , ainsi que la puissance dissipée par effet Joule.

### II. Comment ne pas être électrocuté par la foudre :

La foudre est modélisée par un fil semi-infini parcouru par un courant  $I$  dans l'atmosphère. Lorsque le courant arrive au niveau du sol il se répartit uniformément dans le sol. On suppose que le sol vérifie la loi d'Ohm locale.



1. Représenter graphiquement dans le sol les lignes de courant, les lignes de champ ainsi que les surfaces équipotentielles.
2. Exprimer, en fonction de  $I$ , la densité volumique de courant  $\vec{j}(r)$  où  $r$  est la distance au point d'impact de la foudre.
3. Déterminer la différence de potentiel entre les deux pieds d'une personne comme sur la figure.
4. Faire l'application numérique pour  $I = 50 \text{ kA}$ ,  $d = 1 \text{ m}$ , une résistivité du sol de  $100 \Omega.m$ ,  $D = 10 \text{ m}$  puis  $D = 100 \text{ m}$ .
5. La résistance du corps humain vaut environ  $2500 \Omega$ . Le courant maximal admissible avant électrocution étant de  $25 \text{ mA}$ , qu'advient-il dans les cas précédents ?
6. Comment se positionner, selon ce modèle pour éviter d'être électrocuté ?

### III. Prospection électromagnétique en Antarctique

L'Antarctique, continent situé autour du pôle Sud, est recouvert à 98 % d'une couche de glace pouvant atteindre 4 000 mètres d'épaisseur. C'est pourquoi la morphologie de son sous-sol reste encore peu connue, voire inconnue. La prospection électromagnétique est dès lors un outil très utile pour l'étude des sols et est actuellement largement utilisée pour étudier l'Antarctique.

On assimile le sol à un milieu conducteur de conductivité  $\gamma$ , de résistivité  $\rho = 1/\gamma$ . On modélise l'électrode en A du **document 1** par le schéma de la **figure 11**.

Dans le sol, on suppose que le vecteur densité volumique de courant en un point M placé à une distance  $r$  de A est de la forme  $\vec{j}(M) = j(r)\vec{u}_r$  en coordonnées sphériques

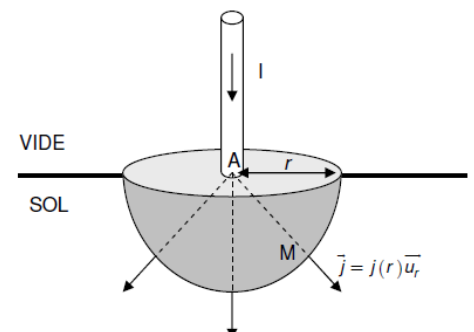


Figure 11 - Électrode au point A

## Document 1 - Principe de la prospection électrique

La prospection électrique repose essentiellement sur l'interprétation de la résistivité électrique  $\rho$  d'un terrain. Sachant que l'on ne peut pas procéder à cette mesure en laboratoire sur un échantillon prélevé sur le terrain et sorti de son environnement, il est nécessaire de la réaliser in situ (**figure 10**).

On dispose en A une électrode parcourue par un courant  $I$  stationnaire qui se répartit uniformément dans le sol. Une contre-électrode placée en B permet de recueillir ce courant.

C'est par la mesure d'une différence de potentiel d'une part et d'une intensité d'autre part que l'on accède à la valeur de cette résistivité.

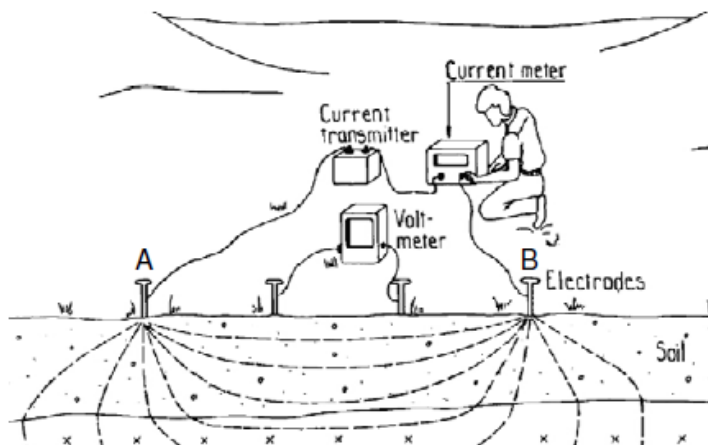
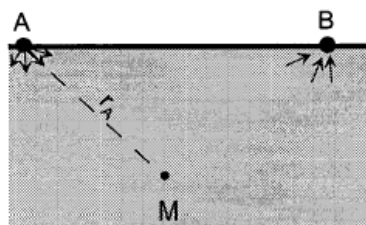


Figure 10 - Principe de la prospection électrique

Dubois Diamant Cogné (2011), *Géophysique*, DUNOD

1. Rappeler l'équation locale de conservation de la charge. Simplifier cette équation en régime stationnaire. Comment peut-on alors qualifier le champ  $\vec{j}(M)$  ?
2. Montrer alors que  $j(r) = I / (2\pi r^2)$
3. En déduire l'expression de  $\vec{E}(M)$
4. En déduire que le potentiel au point M, dû à la présence de l'électrode en A, est donné par  $V_A(M) = \frac{\rho I}{2\pi r}$  en choisissant le potentiel à l'infini nul.

La contre-électrode placée dans le sol en B permet de recueillir le courant injecté en A et de fermer le circuit électrique (**figure 12**).



5. Par analogie, établir l'expression du potentiel  $V_B(M)$  créé en M par l'électrode placée au point B. En déduire que le potentiel résultant au point M s'écrit  $V(M) = \frac{\rho I}{2\pi} \left( \frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right)$ , avec  $r_A$  et  $r_B$  les distances respectivement AM et BM.

Figure 12 - Deux électrodes placées en A et B

Lors d'une expérience sur le terrain, on injecte du courant dans le sol grâce à une batterie ou à un groupe électrogène relié aux deux électrodes A et B plantées dans le sol. On lit l'intensité du courant injecté sur un ampèremètre. On mesure des différences de potentiel sur le sol entre deux points M et N grâce à un voltmètre et deux autres électrodes plantées dans le sol (**figure 13**).

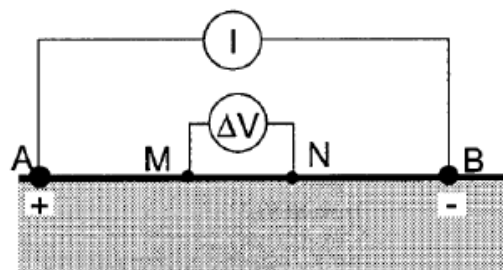


Figure 13 - Montage à quatre électrodes

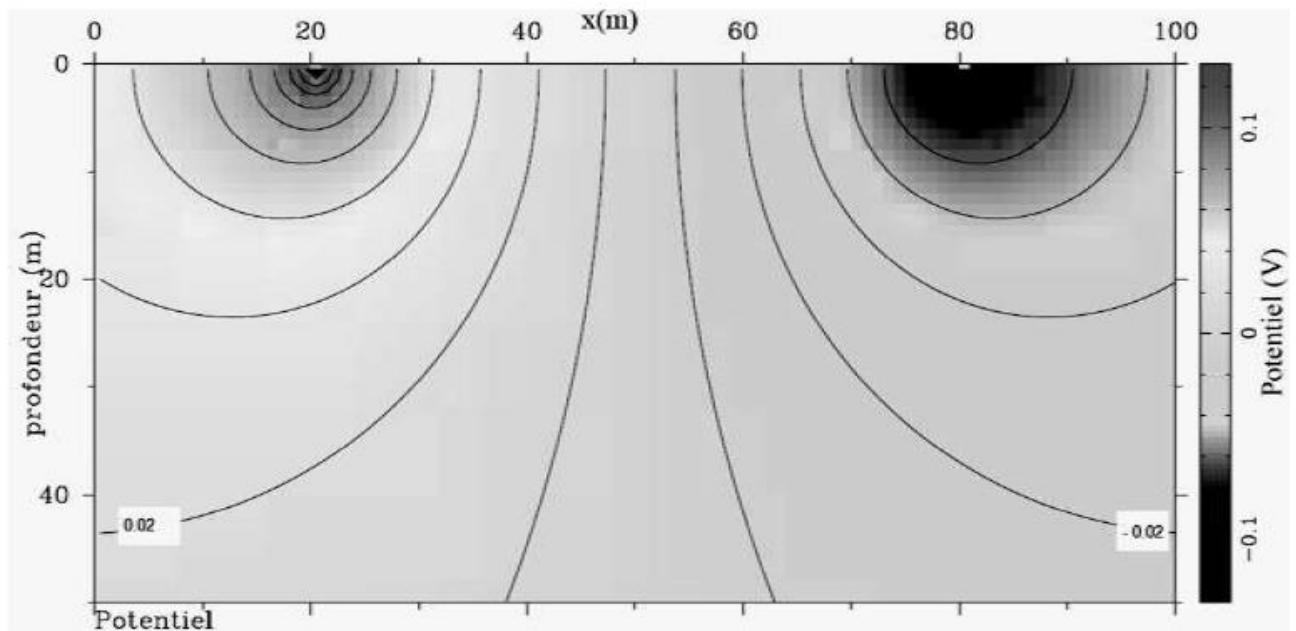
On pose  $\Delta V = V(M) - V(N)$  la différence de potentiel entre les points M et N.

6. Compléter le schéma ci-contre afin qu'il représente correctement la situation décrite.

7. Montrer que la résistivité du sol s'écrit alors  $\rho = \frac{2\pi \Delta V}{f I}$  où  $f$  correspond au facteur géométrique du montage à exprimer en fonction des distances AM, BM, AN et BN.

8. Montrer que le plan contenant la médiatrice du segment AB est une surface équipotentielle de potentiel nul.

La **figure 14** représente quelques courbes équipotentielles à l'électrode  $I = 100\text{mA}$ . Les équipotentielles à  $-0,02\text{ V}$  et  $+0,02\text{ V}$  sont repérées sur la figure.



**Figure 14** - Carte des équipotentielles, courant 100 mA, résistivité homogène

9. D'après cette carte, estimer la valeur de la résistivité du sol. Conclure sur la nature du milieu grâce aux données du tableau suivant

Eaux ou roches	Résistivité ( $\text{en } \Omega \cdot \text{m}$ )
Eau de mer	0,2
Eau de nappes	10 - 30
Eau de sources	1 000 - 10 000
Sables et graviers secs	50 - 500
Sables et graviers imbibés d'eau douce	2 - 20
Sables et graviers imbibés d'eau salée	300 - 10 000
Argiles	50 - 300
Marnes	300 - 10 000
Calcaires	20 - 100
Grès argileux	300 - 10 000
Grès, quartzites	0,5 - 5
Cinériles, tufs volcaniques	100 - 300