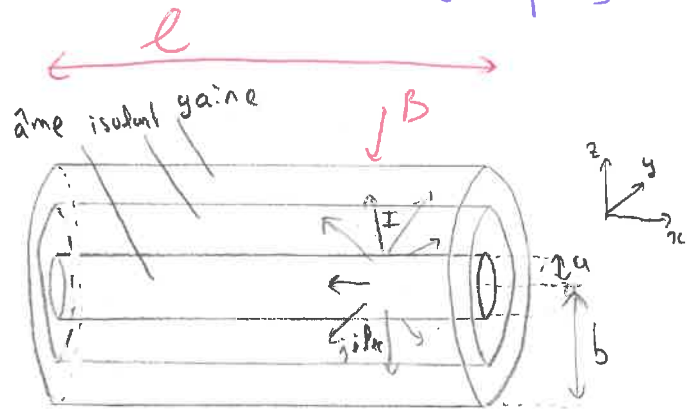
TD 22 Groupe 9

Exercice I :



1. ⚠ $\boxed{\vec{j}_{elec} = j(r)\,\vec{u}_r}$

radial ici !!!

2. Il y a bien une différence de potentiel entre l'âme et la gaine donc $\vec{j}$élec existe

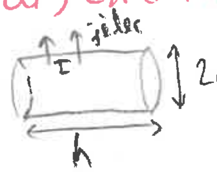
En effectuant un bilan de charges sur le câble, on retrouve
$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\vec{j}_{elec}) = 0$ avec ρ la densité volumique de charges

ainsi en régime stationnaire, $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ donc $\mathrm{div}(\vec{j}_{elec}) = 0$ ✓

ainsi $\vec{j}$élec est un vecteur à flux conservatif ⇔ ~~$\vec{j}$élec(z) = $\vec{j}$élec(z+dz)~~

$j(r)\,2\pi r \ell = j(r+dr)\,2\pi(r+dr)\,\ell = I$

3. on a que $I = \phi(\vec{j}_{elec})$
$= \iint \vec{j}_{elec} \cdot \vec{dS}$



on reconnait une distribution de charges à symétrie cylindrique

Donc $\vec{j}$élec = jélec(~~r~~) ~~$\vec{u}_r$~~ ‖ ⚠ $\vec{j}$ est radial ! regardez votre schéma !!!

D'où $I = j_{elec} \times S$ ⇔ $j_{elec} = \frac{I}{S}$

ainsi $\vec{j}$élec est ~~uniforme.~~ non !!! j dépend de r !!!

4. Par le cours : $\vec{j}_{elec} = \gamma \vec{E}$

$\vec{E}(r) = \frac{\vec{j}(r)}{\gamma} = \frac{I}{2\pi r \ell \gamma}\vec{u}_r$

~~$\Rightarrow \frac{I}{(2\pi a)h} = \gamma \frac{U}{(b-a)}$~~

$U_{âme \to gaine} = \int_{âme-gaine} \vec{E}\cdot\vec{d\ell} = \frac{I}{2\pi \ell \gamma}\int_a^b \frac{dr}{r}$

D'où ~~$U = \frac{I(b-a)}{\gamma 2\pi a h}$~~

$\vec{d\ell} = dr\,\vec{u}_r$ $\boxed{U = \frac{I}{2\pi \ell \gamma}\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$

5. on cherche la conductance linéique en $S.m^{-1}$

or $U = R \times I$ donc $\frac{1}{R} = \frac{I}{U}$ = ~~$\frac{\gamma 2\pi a h}{(b-a)}$~~ $= \frac{2\pi \ell \gamma}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$

donc conductance linéique = ~~$\frac{\gamma 2\pi a h}{(b-a)^2}$~~ $\frac{2\pi\gamma}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$

6. A.N : $\frac{\gamma 2\pi \cancel{a}}{\cancel{(b-a)}\ \ln\left(\frac{b}{a}\right)} = \frac{10^{-17} \times 2 \times 3{,}14 \times \cancel{0{,}48 \times 10^{-3}}}{\cancel{(2{,}95 - 0{,}48) \times 10^{-3}}\ \ln\left(\frac{2{,}95}{0{,}48}\right)}$

ici : $h = b - a$

$= \cancel{1{,}12}\ 3{,}5 \times 10^{-17}\ S.m^{-1} = g\ell$

7. par le cours $p_v = \vec{j}_{elec} \cdot \vec{E}$

$= \gamma E^2 = \frac{\gamma I^2}{4\pi^2 \ell^2 \gamma^2} \times \frac{1}{r^2}$

$= \gamma \frac{\cancel{U^2}}{\cancel{(b-a)^2}} =$

la puissance volumique est ~~bien uniforme~~ non (elle dépend de r

en cylindrique

$d\tau = r\,dr\,d\theta\,dz$

puissance perdue : $\iiint_{volume} p_v\, d\tau = P_{Joule}$

$\cancel{= p_v \times \pi \left((b-a)^2 - a^2\right) L}$ $\quad P_{Joule} = \frac{\cancel{\gamma} I^2}{4\pi^2 \ell^2 \gamma} \int_a^b \frac{r\,dr}{r^2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\ell} dz$

$= \frac{I^2}{4\pi^{\cancel{2}} \ell^{\cancel{2}} \gamma} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \cancel{2\pi} \cancel{\ell}$

8. A.N :

$\cancel{P_{Joule} = \frac{\gamma U^2}{(b-a)^2} \times \pi \left((b-a)^2 - a^2\right) L}$

$P_{Joule} = \frac{I^2 \left(\ln\left(\frac{b}{a}\right)\right)}{2\pi\, \ell \gamma}$

$\cancel{= \frac{10^{-17} (100)^2}{(2{,}95 - 0{,}48)^2 \times 10^{-6}} \times \pi \left((2{,}95 - 0{,}48)^2 \times 10^{-6} - (0{,}48)^2 \times 10^{-6}\right) \times 10}$

$\cancel{= 3{,}02 \times 10^{-12}\ W.}$

$P_{Joule} = R I^2$

$= G U^2$

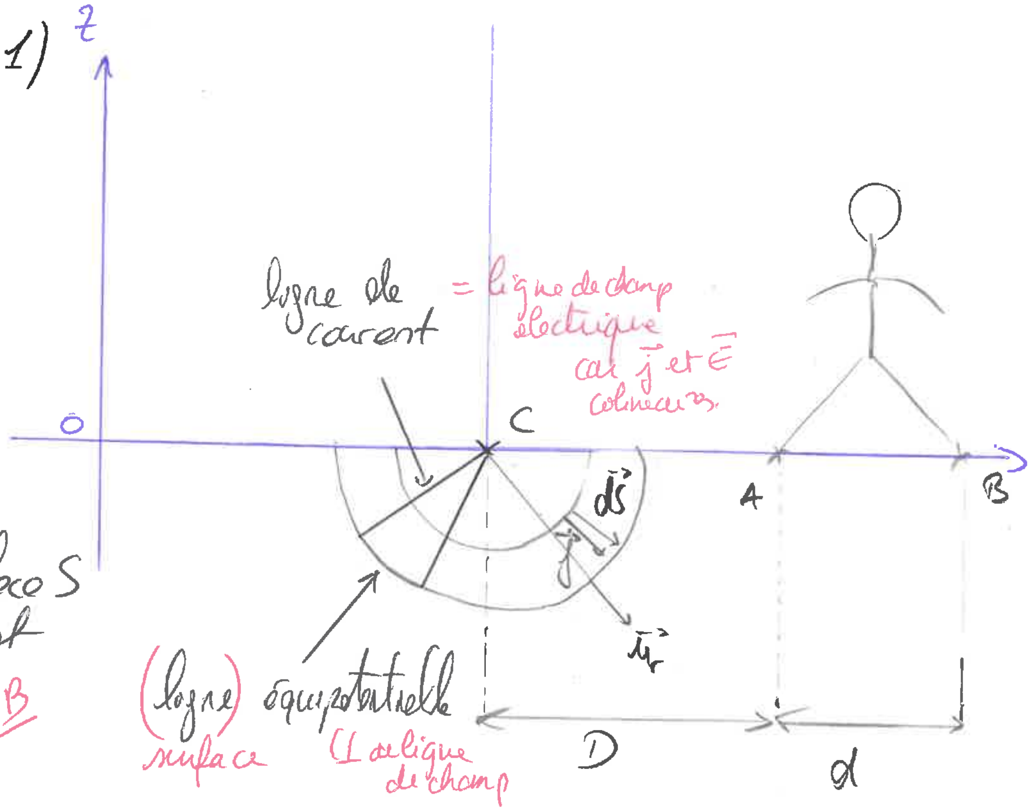
$= g\ell U^2$

$= 3{,}5 \times 10^{-17} \times 10 \times 100^2$

$P_{Joule} = 3{,}5 \times 10^{-12}\ W$

TD 22 : (Gr 1)

Ex II :



1.

ici, on travaille en géométrie sphérique => la surface S que traverse $\vec{j}$ est une demi-sphère B

2.

On a, $I = \underset{\text{à travers } S}{\phi}(\vec{j}) = \iint_S \vec{j}(r).\vec{dS}$

$$= \iint_S j(r)\vec{u_r}.dS\vec{u_r}$$

$$I = j\,2\pi r^2 \Rightarrow \boxed{\vec{j}(r) = \frac{I}{2\pi r^2}\vec{u_r}}$$

3. On a : $\vec{j}(r) = -\gamma\,\vec{\text{grad}}\,V$ ⎫ problème à symétrie sphérique : les surfaces équipotentielles sont des sphères

$$\Leftrightarrow j(r) = -\gamma \cdot \frac{dV}{dr}$$

$$\Leftrightarrow dV = -\frac{1}{\gamma}\frac{I}{2\pi r^2}dr$$

$U_{AB} = \frac{I}{2\pi\gamma}\left[-\frac{1}{r}\right]_{r_A}^{r_B}$

$= \frac{I}{2\pi\gamma}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)$

$U_{AB} = \frac{I}{2\pi\gamma}\left(\frac{1}{D} - \frac{1}{D+d}\right)$

résistivité du sol $\rho = 1/\gamma$

en intégrant entre A et B (entre les 2 pieds !)

$$U_{AB} = \int_A^B -dV = +\frac{I}{\gamma 2\pi}\int_{r_A}^{r_B}\frac{dr}{r^2} = \frac{I}{\gamma 2\pi(d_{AB}+D)} = \frac{I\cdot R}{2\pi(d_{AB}+D)}$$

$= V_A - V_B$

4. AN : • $U_{CB} = \dfrac{50 \cdot 10^3 \cdot 100}{2\pi \cdot (1+10)} = \underline{\underline{72\ 340\ V}}$ (D = 10 m)

• $U_{CB} = \dfrac{50 \cdot 10^3 \cdot 100}{2\pi \, (1+100)} = \underline{\underline{7879\ V}}$ (D = 100 m)

D = 10 m $U_{AB} = 7{,}2\ kV$ D = 100 m $U_{AB} = 79\ V$

5. La loi d'Ohm dans le corps donne.

$I_{corps} = \dfrac{U_{corps}}{R_{corps}}$:

• D = 10 m

$\Rightarrow I_{corps} = \dfrac{\cancel{72\ 340}}{2500} = \cancel{29\ A}$

$= 2{,}9\ A$

(c'est beaucoup) en effet

• D = 100 m

31,5 mA

$\Rightarrow I_{corps} = \cancel{3{,}15}\ A$

(semble élevé encore à cette distance)

6. Il faut idéalement se placer le plus loin possible du point d'impact de la foudre.

↳ ou les 2 pieds sur la même équipotentielle $\Rightarrow U_{AB} = 0$

TD22 Exo3 Gr 5

$\boxed{1}$ $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\vec{j_{elec}}) = 0$

qui se simplifie en régime stationnaire : $\mathrm{div}(\vec{j_{elec}}) = 0$

Alors $\vec{j}$ est un ~~ff~~ champs à flux conservatif. B

$\boxed{2}$ on $I = \phi(\vec{j}) = \iint_S \vec{j} \cdot \vec{dS}$

et ici $\phi_{entrée}(\vec{j}) = \phi_{sortie}(\vec{j})$ d'après Q1

alors $\phi_{entrée}(\vec{j}) = I = \phi_{sortie}(\vec{j}) = j(r) \underbrace{\frac{4\pi r^2}{2}}$

~~Volume~~
Surface d'une demi sphère B

d'où $\boxed{j(r) = \frac{I}{2\pi r^2}}$

$\boxed{3}$ par la loi d'Ohm local : $\vec{j} = \gamma \vec{E}$

on en déduit alors $\boxed{\vec{E}(M) = \frac{I \, \vec{u_r}}{2\pi r^2 \gamma}}$ Δ hom. vect

$\boxed{4}$ on sait que $\vec{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, V$ et $\gamma = \frac{1}{\rho}$

d'où $V = -\int \frac{I}{2\pi r^2 \gamma} dr = \frac{I\rho}{2\pi r} + cst$

or $\lim_{r \to +\infty} V = 0$ donc $cst = 0$

Ainsi $\boxed{V(M) = \frac{\rho I}{2\pi r}}$

5 Comme l'électrode en B permet de récupérer le courant son sens est inversé, donc de façon analogue :

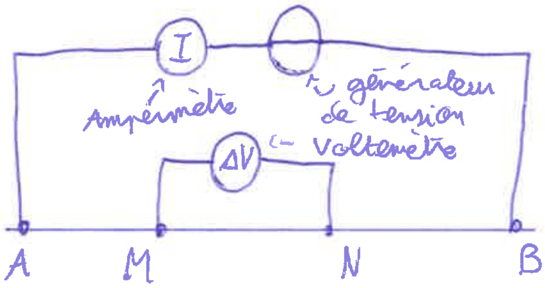
$$V_B(M) = \frac{-\rho I}{2\pi r_B}$$

et par le théorème de superposition on a :

$$V(M) = V_B(M) + V_A(M) = \frac{\rho I}{2\pi}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)$$

on a bien $\boxed{V(M) = \frac{\rho I}{2\pi}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)}$

6



B

7 par un travail similaire à la Q5 ~~et~~

~~en notant r_{AM}=~~

on obtient $V(M) = \frac{\rho I}{2\pi}\left(\frac{1}{AM} - \frac{1}{BM}\right)$

et $V(N) = \frac{\rho I}{2\pi}\left(\frac{1}{AN} - \frac{1}{BN}\right)$

alors $\Delta V = V(M) - V(N) = \frac{\rho I}{2\pi}\left(\frac{1}{AM} \cancel{+} - \frac{1}{AN} - \left(-\frac{1}{BN} + \frac{1}{BM}\right)\right)$

posons $f = \frac{1}{AM} \cancel{+} - \frac{1}{AN} - \left(+\frac{1}{BM} \cancel{+} - \frac{1}{BN}\right)$

Ainsi on a $\boxed{\rho = \frac{\Delta V\, 2\pi}{I\, f}}$

Exo 3 (suite)

$\boxed{8}$ le plan contenant la ~~d~~ médiatrice du segment AB correspond à M=N

Alors $B = \left(\frac{1}{AM} + \frac{1}{AN} - \left(\frac{1}{BM} + \frac{1}{BN}\right)\right) = 0$

d'où $\Delta V = 0$

Ainsi ce plan est bien une surface équipotentiel le de potentiel nul

$\boxed{9}$ avec les valeurs apportées par le graphique faisons une application numérique de la formule trouvée en Q7

$$\rho = \frac{\Delta V 2\pi}{I B} = \frac{(0{,}02-(-0{,}02)) \times 2\pi}{100\times10^{-3} \times \left(\frac{1}{20} - \frac{1}{40} - \frac{1}{40} + \frac{1}{20}\right)} = \cancel{-831.66}$$

problème

AM = 20 m
AN = 40 m
BM = 40 m
BN = 20 m

$\rho = 25\,\Omega.m$

sols calcaires.