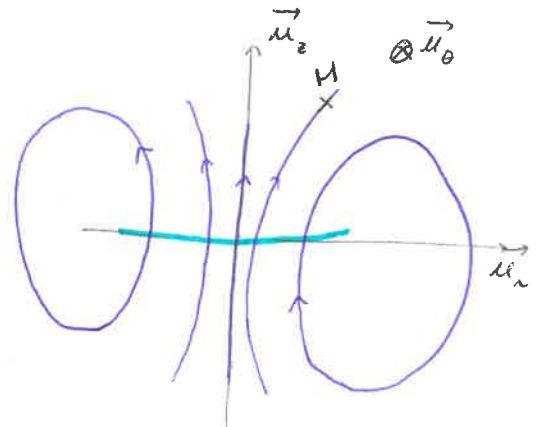
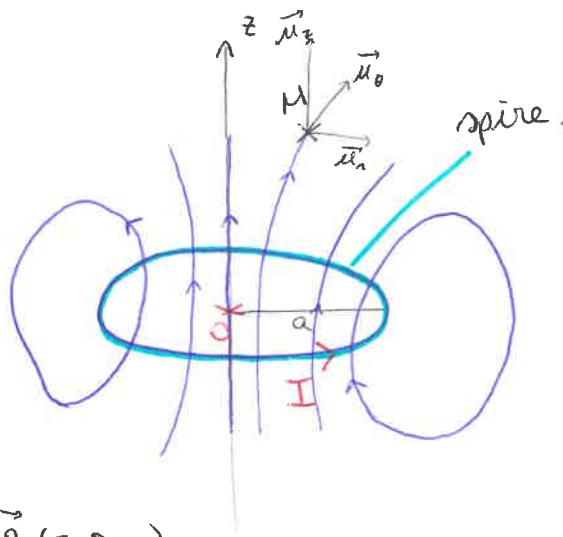


TD 23: Ex I

(groupe 7)

1)



$$\vec{B}(M) = \vec{B}(r, \theta, z)$$

$$\pi_1(M, \vec{e}_r, \vec{e}_z) = \pi_{AS} \text{ courant}$$

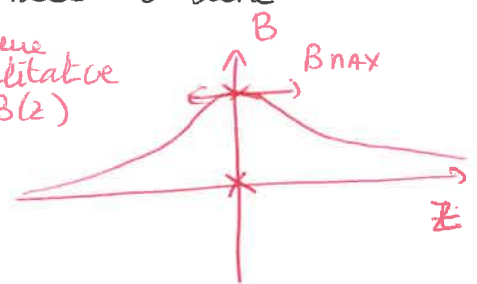
$$\vec{B}(M) \in \pi_1 \quad \checkmark$$

$$\text{Donc } \vec{B}(M) = B(r, \theta, z) \vec{e}_r + B(r, \theta, z) \vec{e}_z \quad \checkmark$$

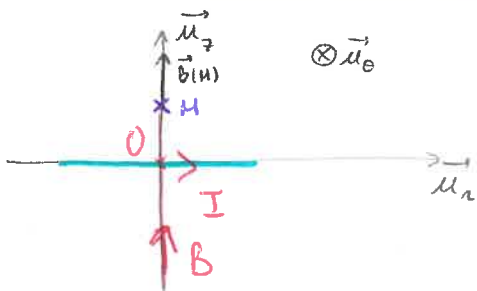
Les courants sont invariants par rotation selon θ donc $\vec{B}(M)$ est indépendant de θ . $\checkmark$

$$\Rightarrow \vec{B}(M) = B_r(r, z) \vec{e}_r + B_z(r, z) \vec{e}_z \quad \checkmark$$

allure qualitative de $B(z)$



2)



pour $n \in OZ$

$$\pi_2(M, \vec{e}_r, \vec{e}_z) = \pi_{AS} \text{ courants}$$

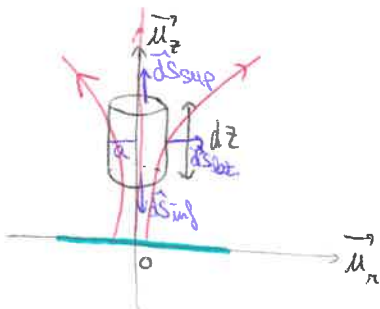
$$\text{or } \vec{B}(M) \in \pi_{AS} \text{ courant}$$

en $z=0$ B est max
 $z \rightarrow \pm \infty$ B $\rightarrow 0$

$$\text{donc } \vec{B}(M) \in (\pi_1 \cap \pi_2) \text{ donc } \vec{B}(M) = B_z(r, z) \vec{e}_z$$

avec $z=0$.

3)



Δ l'axe du cylindre élémentaire n'est PAS un tube de champ

théorème d'Ostrogradski appliquée à Maxwell-Thomson: $\Phi(\vec{B}) = 0$
à travers la surface

donc $\vec{B}$ est un vecteur à flux conservatif.

$$\Phi(\vec{B}) = \oint_{\text{entrée du cylindre}} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \oint_{\text{sortie du cylindre}} \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

$$\text{donc } S_e B_e = S_s B_s$$

donc $\vec{B}$ est uniforme dans le cylindre élémentaire car $S_s = S_e$

De plus, $\oint_{\text{à travers 3 surfaces}} (\vec{B}) = \iint_{\text{surface base sup.}} \vec{B} \cdot d\vec{S} + \iint_{\text{surface latérale}} \vec{B} \cdot d\vec{S} + \iint_{\text{surface base inf}} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$

⚠
le cylindre
est de rayon
 $r = \text{variable}$
 $\neq a = \text{const}$

$$\Rightarrow -B_z(r, z) \pi r^2 + B_r(r, z) 2\pi r dz + B_z(r, z+dz) \pi r^2 = 0 \quad \text{oui}$$

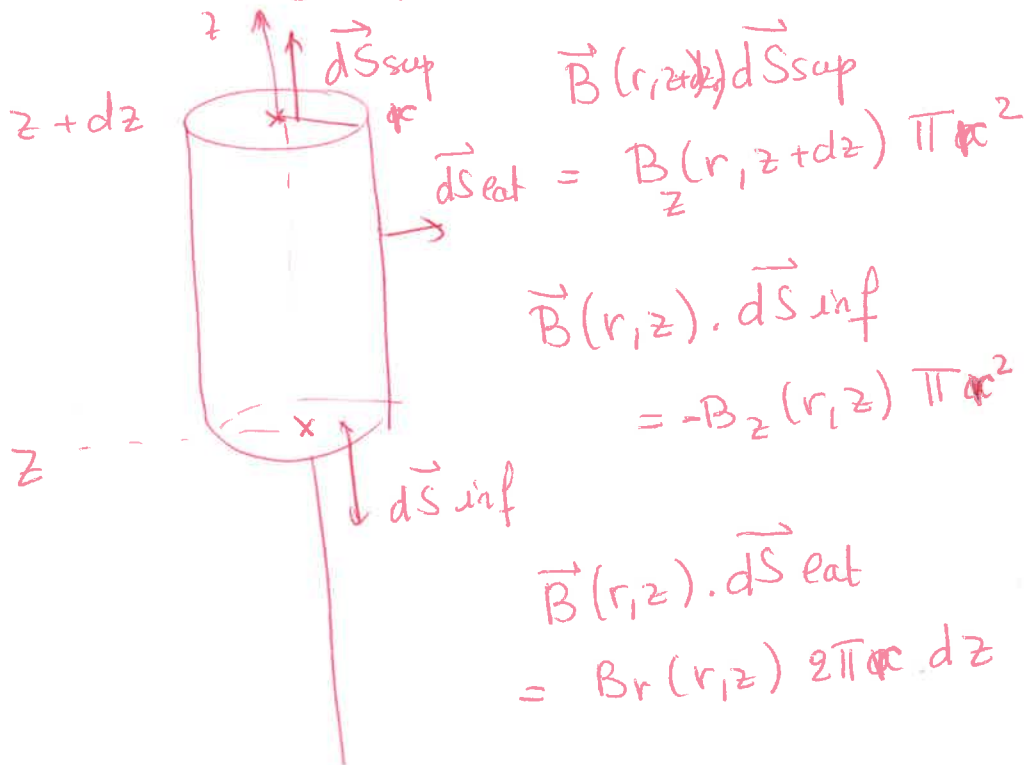
$$\Rightarrow (B_z(r, z) - B_z(r, z+dz)) \pi r^2 = B_r(r, z) 2\pi r dz$$

$$\Rightarrow -\frac{\partial B_z(r, z)}{\partial z} dz \pi r^2 = B_r(r, z) 2\pi r dz$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial B_z(r, z)}{\partial z} = -\frac{r}{r} B_r(r, z)}$$

hypothèse: en dehors de l'axe

$$\vec{B}(r, z) = B_r(r, z) \vec{u}_r + B_z(r, z) \vec{u}_z$$



détail!

$$B_r(r, z) = -\frac{r}{2} \frac{dB_z(r, z)}{dz} = -\frac{r}{2} \frac{dB_{\text{axe}}}{dz}$$

on suppose que $B_z(r, z) = B_z(r, z=0) = B_{\text{axe}}$
car le cylindre est petit.

or $B_{\text{axe}}(z)$ est une fonction décroissante pour $z > 0$

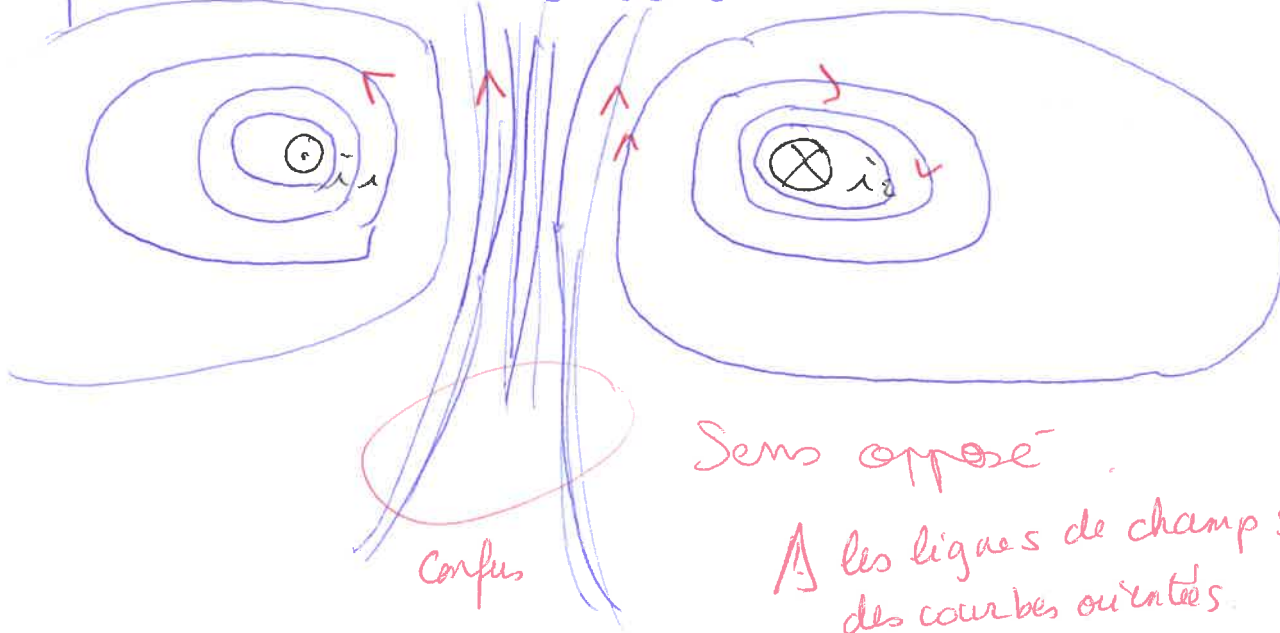
donc pour $z > 0$ $B_r(r, z) > 0$

croissante pour $z < 0$ $B_r(r, z) < 0$.

cohérent avec le
tracé des lignes de $\vec{B}$.

Vos schémas ne sont pas clairs.
vues du dessus? vue en 3D.

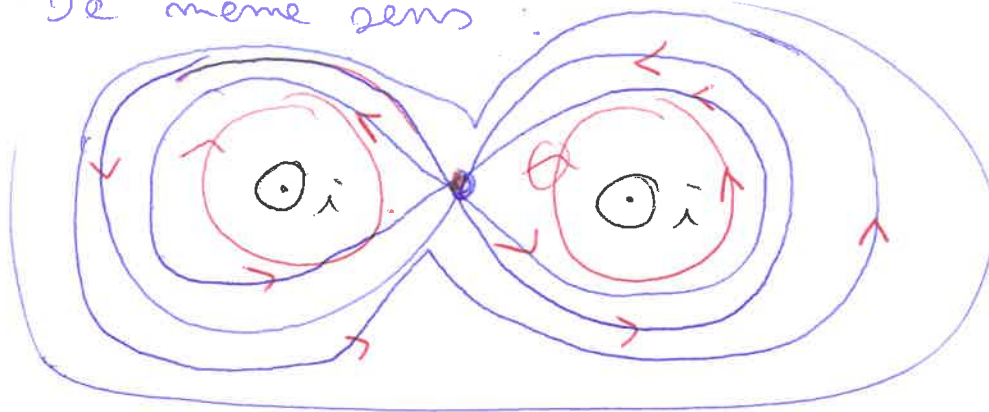
- lignes de champ créées par deux fils infinis parallèles distants de d



Sens opposé

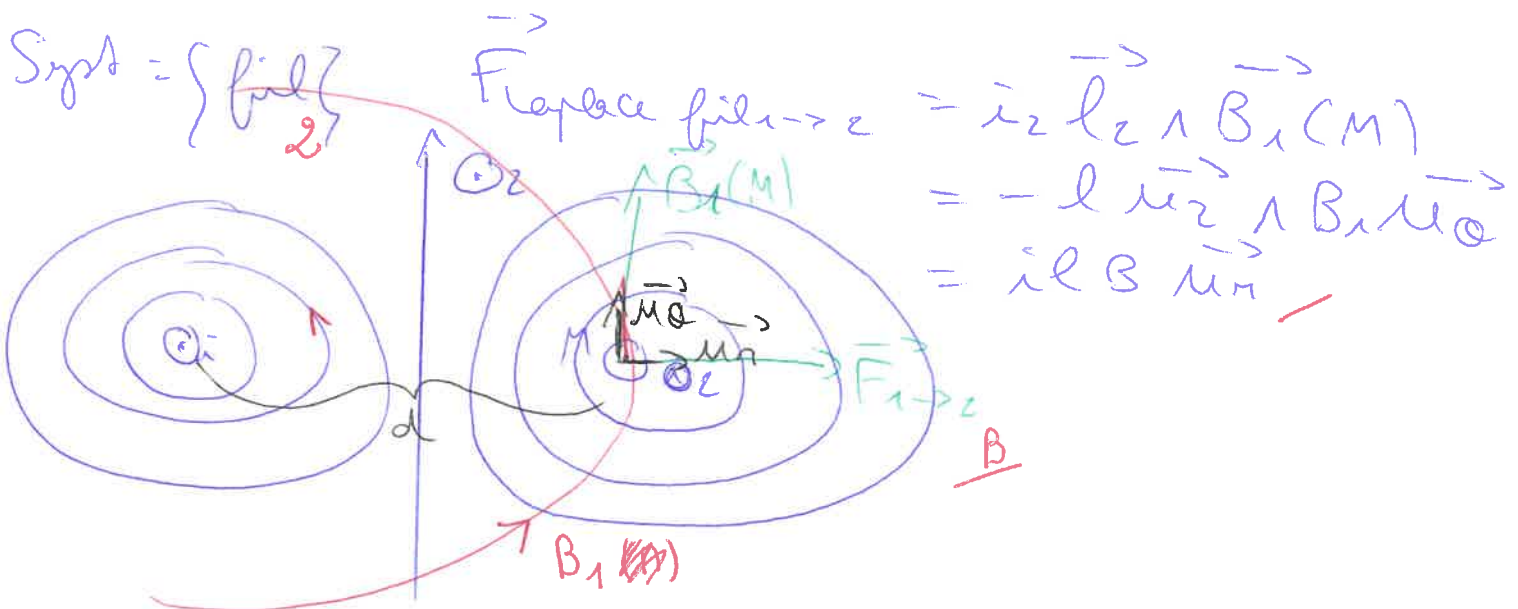
les lignes de champ sont des courbes orientées.

De même sens



Dans ce cas
l'int éraction
est attractive
↳ cf suite

Syst = {fil}

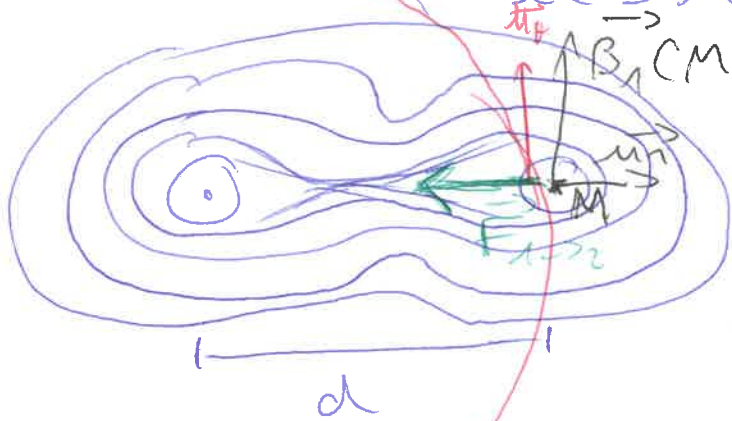


$$\begin{aligned} \vec{F}_{\text{force fil}_1 \rightarrow 2} &= I_2 \vec{l}_2 \wedge \vec{B}_1(M) \\ &= -I_2 \vec{l}_2 \wedge B_1 \vec{u}_\theta \\ &= I_2 B_1 \vec{l}_2 \end{aligned}$$

Autre cas : système = fil 2.

$$\vec{F}_{\text{Laplace } 1 \rightarrow 2} = i \vec{l}_2 \wedge \vec{B}_1(n) = i l_2 \vec{u}_z \wedge B_1 \vec{u}_\theta$$

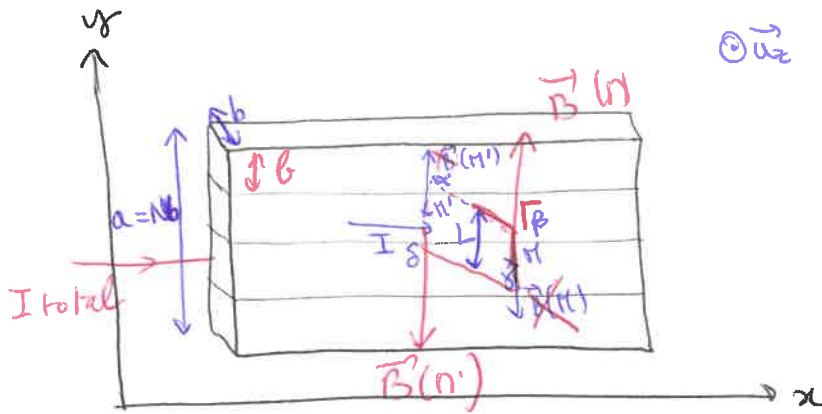
$$= -i l B \vec{u}_r \quad \text{lo}$$



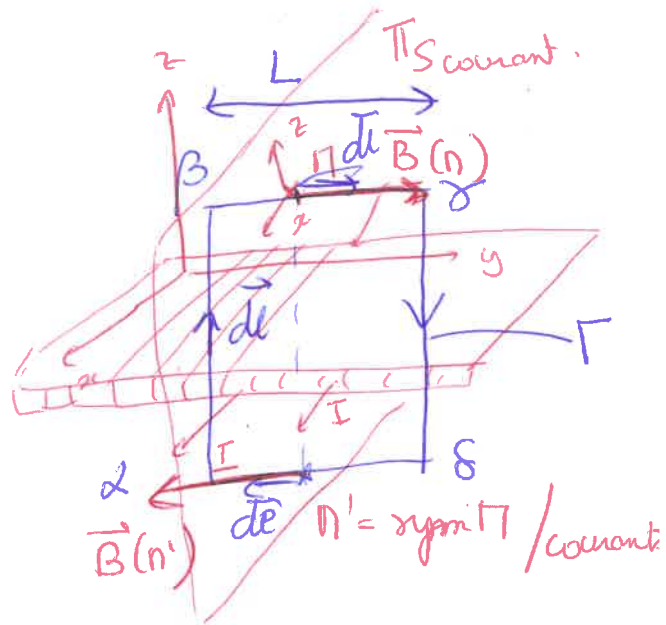
① z

$\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$ est bien attractive.

TD 23: ex III.



$\odot \vec{u}_z$



$$\vec{B}(n') = -\vec{B}(n)$$

Q1) $\phi(\vec{j}) = I_{total} = IN$

donc $j = \frac{IN}{ab} = \frac{IN}{Nb^2}$

d'où $j = \frac{I}{b^2}$ ✓

Q2). $\Pi_{Sc}(M, \vec{u}_x, \vec{u}_z)$ est un plan de symétrie de courants

et $\vec{B} \perp \Pi_{Sc}$

donc $\vec{B} = B \vec{u}_y$

→ on suppose le bus de données infini car il se trouve à proximité de celui-ci

• les courants sont invariants par translation selon x et y

donc $\vec{B} = B(z) \vec{u}_y$

→ toujours dans l'hypothèse d'un bus infini.

$$\mathcal{C}_r(\vec{B}) = \oint_r \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_{\alpha}^{\beta} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{\beta}^{\gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{\gamma}^{\delta} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{\delta}^{\alpha} \vec{B} \cdot d\vec{l}$$

car $\vec{B} \perp d\vec{l}$ colinéaire à $\vec{u}_z$ car $\vec{B} \perp d\vec{l}$

$$= + \int_{\beta}^{\gamma} B(z) dl + \int_{\delta}^{\alpha} B(z) dl$$

$$= + 2 B(z) L$$

- $I_{\text{enlacs}} = \Phi(\vec{j}_{\text{enlacs}})$
 $= -j L b$
 $= -\frac{I}{b^2} L b$
 $= -\frac{I L}{b}$

On applique le théorème d'Ampère :

$$+ 2 B(z) L = -\frac{I L}{b} \mu_0$$

donc $B(z) = -\frac{I \mu_0}{2b}$

d'où $\vec{B}(z) = B(z) \vec{u}_y = -\frac{I \mu_0}{2b} \vec{u}_y$ pour $z > 0$

$\vec{B}(z) = +\frac{I \mu_0}{2b} \vec{u}_y$ pour $z < 0$.

} $\vec{B}(z)$ est discontinue.

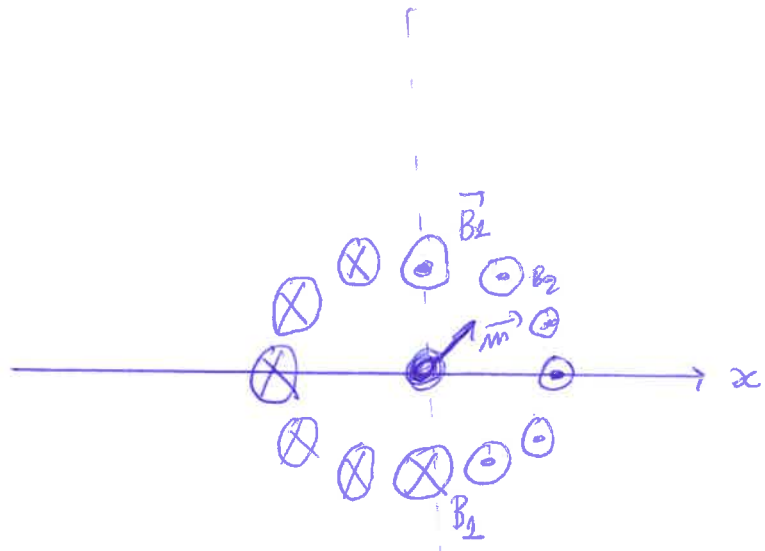
Q3) $a = Nb$

donc $\vec{B} = -\frac{I \mu_0 N}{2a} \vec{u}_y$

d'où $\|\vec{B}\| = \frac{I \mu_0 N}{2a} = \frac{1 \times 10^{-3} \times 4\pi \times 10^{-7} \times 64}{2 \times 3,25 \times 10^{-2}}$

$\|\vec{B}\| = 1,23 \times 10^{-6} \text{ T}$

B



1) Direction et sens du champ crée par B_2

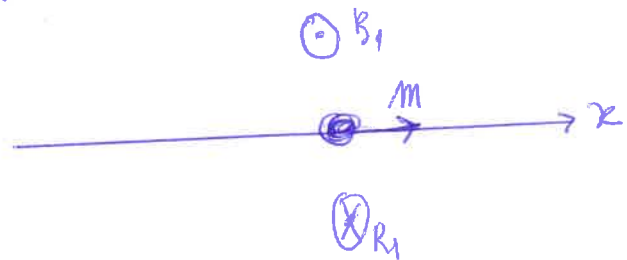
La bobine B_2 est située sur l'axe vertical

D'après la règle de la main droite $\vec{B}_2$ au centre du moteur est dirigé selon l'axe horizontal vers $+\vec{x}$

- Le moment magnétique dans $\vec{B}$ subit un couple $\vec{T} = \vec{m} \wedge \vec{B}$
l'équilibre stable est atteint lorsque $\vec{T} = \vec{0}$ et l'énergie potentielle E_p est
minimal car $E_p = -\vec{m} \cdot \vec{B}$

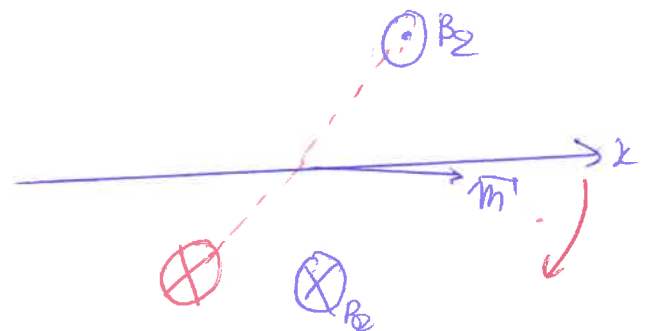
Ainsi $\vec{m}$ est colinéaire et même direction que $\vec{B}$

phase 1: B_1 alimentée

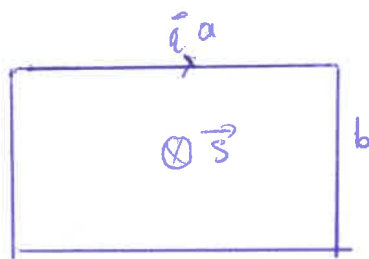


phase 2: B_2 alimentée

→ $\vec{m}$ va tourner dans le sens horaire à chaque nouvelle alimentation de bobine



2)



$$\vec{m} = i \vec{S} \quad \text{or } S = ab$$

donc $\boxed{m = iab}$ ✓

les lignes de champ magnétique produites par un aimant droit ont la même allure que celles produites par une spire placée par un courant → d'où la notion de moment magnétique pour un aimant droit $\|\vec{m}\| \approx 10^{-10} \text{ A m}^2$

3) Le moment des forces on le note $\vec{T}$

$$\vec{T} = \vec{m} \wedge \vec{B}$$

ici $\vec{m} = m \vec{n}$ ✓

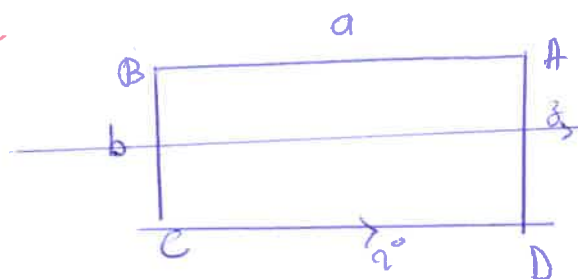
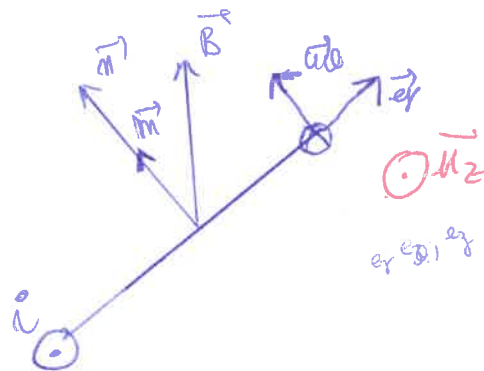
donc $\vec{T} = m \vec{n} \wedge (B_r \vec{e}_r + B_\theta \vec{e}_\theta)$ ✓

$$= m B_r (-\vec{e}_z)$$

$$\vec{T} = -m B_r \vec{e}_z$$

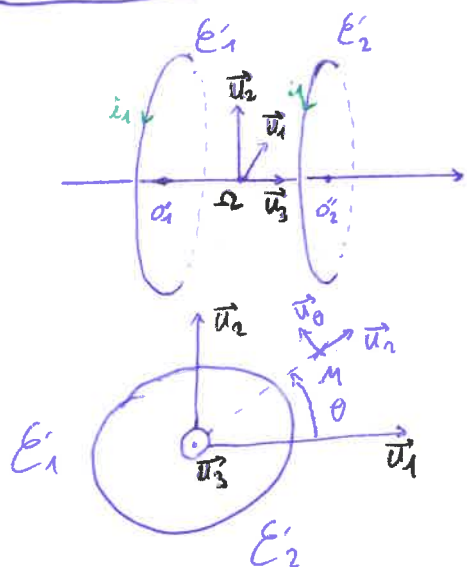
or $m = iab \times N$ ✓

donc $\boxed{\vec{T} = -iab B_r \vec{e}_z N}$



car N fils sont enroulés

Exercice n°6:



1- Le plan $\Pi_\Omega = (\Omega, \vec{u}_1, \vec{u}_2)$ est un plan de symétrie des courants donc $\vec{B}(M)$ est orthogonal au plan Π_Ω pour tout point $M \in \Pi_\Omega$. $M \in \Pi_\Omega \Rightarrow \vec{B}(M) = B(M) \vec{u}_3$

De plus, la disposition du courant est invariante par rotation d'angle θ donc représenter le champ magnétique dans le plan $(\Omega, \vec{u}_1, \vec{u}_3)$ ne perd aucune information car il représente le plan $(\Omega, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ pour $\theta = 0$.

Voir la représentation du champ $\vec{B}$ en annexe. B

2- L'équation de Maxwell faisant état de la conservation du flux de $\vec{B}$ est la loi de Maxwell-Gomson: $\text{div } \vec{B} = 0$ ✓

Sur la carte de champ, plus les lignes de champ sont proches, plus la valeur de $\|\vec{B}\|$ est grande et réciproquement.

Le flux de $\vec{B}$ à travers les surfaces Σ_1 et Σ_2 est (voir annexe pour Σ_1 et Σ_2)

$$\Phi_1 = \iint_{\Sigma_1} \vec{B}_1 \cdot d\vec{S}_1$$

$$= \vec{B}_1 \cdot \vec{S}_1$$

$$\cong 5 \times \pi \times 0,1^2$$

$$\Phi_1 \cong 1,5 \times 10^{-4} \text{ T} \cdot \text{m}^2$$

$$\cong 0,2 \text{ } \mu\text{T} \cdot \text{m}^2 \quad (\mu\text{Wb})$$

$$\Phi_2 = \iint_{\Sigma_2} \vec{B}_2 \cdot d\vec{S}_2 \cong B_2 \Sigma_2$$

$$\cong 1,5 \times \pi \times 0,2^2$$

$$\Phi_2 \cong 1,8 \times 10^{-4} \text{ T} \cdot \text{m}^2$$

$$\cong 0,3 \text{ } \mu\text{T} \cdot \text{m}^2 \quad (\mu\text{Wb})$$

Φ s'exprime aussi en Wb (Weber)

$\Phi_1 \cong \Phi_2$, c'est cohérent en ordre de grandeur, la lecture des valeurs de

B est peu précise

car $\vec{B}$ est un vecteur à flux conservatif.

3- Le théorème d'Ampère appliqué sur la ligne de champ $\mathcal{C}$ donne

$$\oint_{\mathcal{C}} (\vec{B}) = \mu_0 N i$$

$\vec{B}$ est uniforme sur $\mathcal{C}$ donc $\oint_{\mathcal{C}} (\vec{B}) = l_{\mathcal{C}} B$ où $l_{\mathcal{C}} = 12 \text{ cm}$ est la longueur de $\mathcal{C}$

$$\frac{B}{\text{m}} = \frac{\mu_0 N i}{l_{\mathcal{C}}} = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 1}{12 \times 10^{-2}}$$

$$B \cong 10^{-7} \text{ T} = 10 \text{ } \mu\text{T}$$

Par lecture graphique, le champ aux points D et E a une valeur de $8 \text{ } \mu\text{T}$ environ, l'ordre de grandeur est cohérent

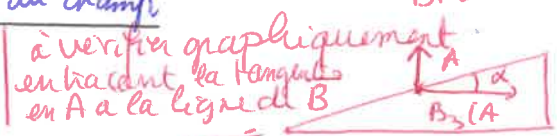
4- Par lecture graphique on lit sur la figure E

en A $r_0 = 5 \text{ cm}$
 $x_3 = 0,20 \text{ m}$.

$B_3(A) = 2,8 \mu\text{T}$ et $B_r(A) = 0,45 \mu\text{T}$.

On remarque que $B_3(A) \gg B_r(A)$, le champ est presque horizontal (sur $\vec{u}_3$), les valeurs sont donc cohérentes avec l'inclinaison du champ.

$\frac{B_r(A)}{B_3(A)} = \frac{4,5}{28} = 0,16 \ll 1$



5- $\text{div } \vec{B} = \frac{\partial B_3}{\partial x_3} + \frac{\partial B_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial B_\theta}{\partial \theta} = 0$ car B est invariant pour rotation d'angle θ et $B_\theta = 0$ (cylindrique) pour r petit on a $\frac{\partial B_3}{\partial x_3} \approx \frac{\partial B_{axe}}{\partial x_3}$

$\frac{\partial B}{\partial r} \approx \frac{B_r(r) - B_r(-r)}{r - 0}$

on $B_r(r) = -B_r(-r)$ on obtient

donc $\alpha = \frac{B_r(A)}{B_3(A)} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1,1 \text{ cm}}{4,6 \text{ cm}} \approx 0,24$

$\frac{\partial B_{axe}}{\partial x_3} + \frac{B_r(r) + B_r(-r)}{r} \approx 0$

$\Leftrightarrow B_r(r) \approx -\frac{\partial B_{axe}(r)}{\partial x_3} \frac{r}{2}$

ou ou cf autre démonstration ex I TD 23.

6- en lit la pente de B_{axe} sur la figure E:

pente = $\frac{1,75 - 4,5}{0,3 - 0,1} = -3,25 \mu\text{Tm}^{-1} = \frac{\partial B_{axe}}{\partial x_3}$

noter ces valeurs sur la figure E pour bien les mettre en évidence.

$-\frac{\partial B_{axe}(A)}{\partial x_3} \frac{r}{2} \approx 3,25 \times \frac{5 \times 10^{-2}}{2} \approx 0,406 \mu\text{T}$

On avait lu $B_r(A) = 0,45 \mu\text{T}$, l'ordre de grandeur est cohérent

B

7- On lit $B_{axe}(0) = 4,5 \mu\text{T}$ et on a $N_1 i_1 = 1 \text{ A}$ donc

si $B_{axe}(0) = \mu N_1 i_1$, $\mu = 4,5 \times 10^{-6} \text{ H.m}^{-1}$

8- $R_1 = 20 \text{ cm}$ donc $\frac{R_1}{4} = 5 \text{ cm}$, on cherche r_{max} tel que $r_{\text{max}} \geq 0$ et

$|B_3(r_{\text{max}}, \frac{R_1}{4}) - B_{axe}(0)| = \frac{1}{10} B_{axe}(0)$

$\Leftrightarrow B_3(r_{\text{max}}, \frac{R_1}{4}) = \frac{11}{10} B_{axe}(0)$ ou $B_3(r_{\text{max}}, \frac{R_1}{4}) = \frac{9}{10} B_{axe}(0)$ si $B_{axe}(0) = 4,5 \mu\text{T}$

On lit alors sur le graphique E

$r_{\text{max}} \approx 0,17 \text{ m}$ pour avoir $B_3(r_{\text{max}}, \frac{R_1}{4}) = \frac{9}{10} B_{axe}(0)$, l'autre égalité est impossible

Le cylindre est dessiné en noir sur la figure D

Sous-partie IV.A

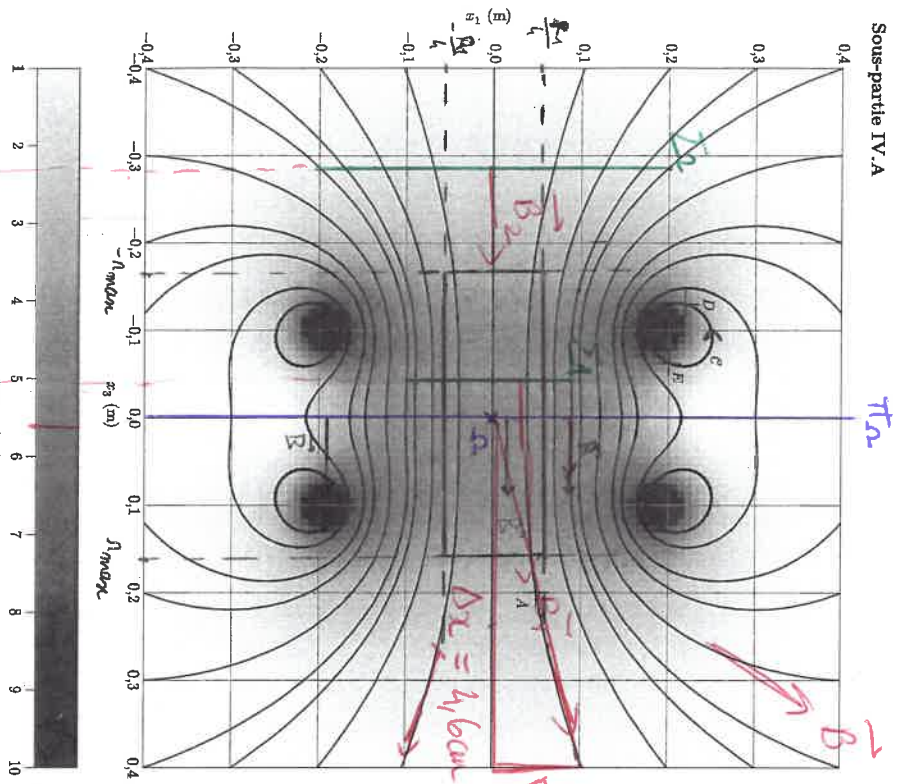


Figure D Carte de champ créé par des bobines de Helmholtz, dans le plan $(O_1, \vec{x}_3, \vec{z}_1)$

$B_2 = 2,3 \mu T$
 $B_1 = 5 \mu T$

Valeur de B donnée par le niveau de gris.

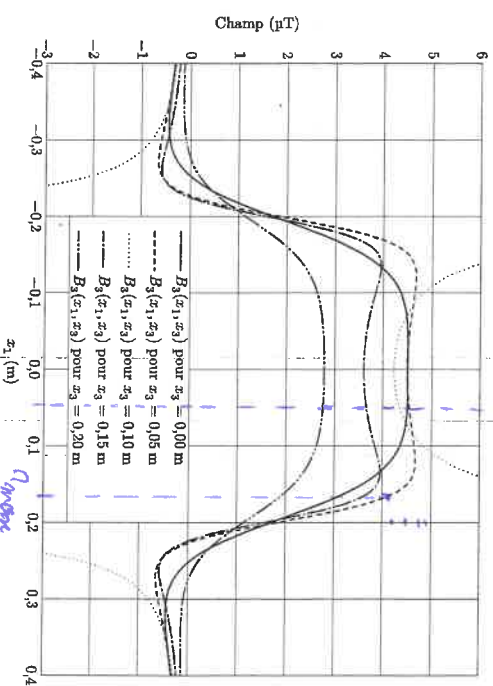
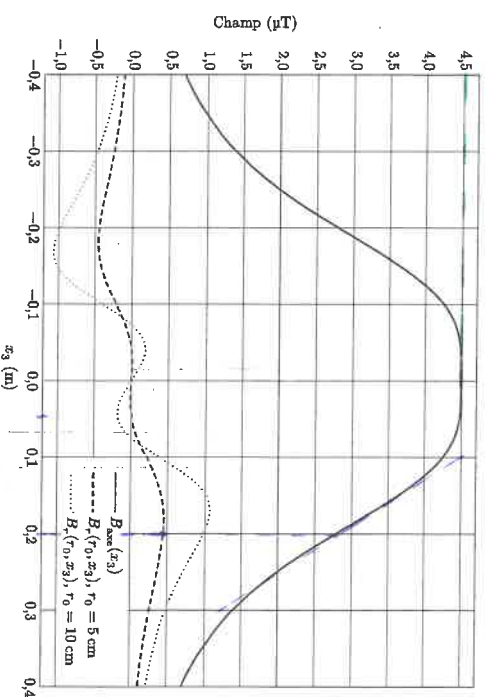


Figure E Profils du champ magnétique de long de certains segments. Sur le premier graphique, r est fixé sur chaque courbe et l'abscisse est la cote x_3 . Sur le second graphique, x_3 est fixé sur chaque courbe et l'abscisse est la coordonnée x_1 .