

Thème : Ondes électromagnétiques, dispersion, absorption

APPLICATIONS DIRECTES

1. Ecriture d'une OPPM

On considère une onde électromagnétique plane progressive harmonique se propageant dans le vide dans la direction et le sens d'un axe Oz. Ecrire l'expression du champ électromagnétique (\vec{E}, \vec{B}) lorsqu'elle est polarisée rectilignement suivant x. Représenter cette onde à l'instant $t = 0$.

2. Amplitude du champ de laser

L'onde émise par un laser He-Ne, de longueur d'onde 633 nm, du laboratoire est assimilée localement à une OPPH polarisée rectilignement. On admet que le laser émet une puissance moyenne P, uniformément répartie dans un faisceau de section S.

Calculer l'amplitude E_0 du champ \vec{E} , l'amplitude B_0 du champ magnétique, la valeur $\langle u \rangle$ de la densité moyenne d'énergie dans le faisceau, ainsi que le nombre de photon émis par unité de temps.

AN : $P = 3 \text{ mW}$ et $S = 1 \text{ mm}^2$.

3. Réflexion normale d'une OPPH

Une OPPH incidente est caractérisée par les composantes du champ \vec{E}_i :

$\vec{E}_i = E_{0y} \exp j(\omega t - kx + \phi_y) \vec{u}_y$. Cette onde se propage dans le demi-espace $x < 0$ et rencontre un plan conducteur parfait confondu avec le plan $x = 0$, où on suppose le champ électrique nul.

1. Déterminer le champ réfléchi \vec{E}_r et le champ résultant $\vec{E} = \vec{E}_i + \vec{E}_r$, dans le demi-espace $x < 0$.
2. Déterminer l'expression du champ \vec{B} total dans le demi-espace $x < 0$.
3. Représenter graphiquement E et B. Déterminer la distance qui sépare les nœuds de E des nœuds de B.

On rappelle les relations de passage du champ électromagnétique à l'interface d'équation $z = 0$, de deux milieux : $\vec{E}(z = 0^+) - \vec{E}(z = 0^-) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_z$; $\vec{B}(z = 0^+) - \vec{B}(z = 0^-) = \mu_0 \vec{J}_s \wedge \vec{u}_z$

4. Quelle est dans cet exercice l'équation de l'interface ? Déterminer, à la surface du métal, la valeur de la densité surfacique de charge et celle de la densité surfacique de courant.

4. Propagation dans un milieu dispersif et absorbant

On considère qu'une onde monochromatique se propage dans un milieu dispersif et absorbant selon l'axe Ox. Soit v_ϕ sa vitesse de phase et δ sa distance caractéristique d'amortissement. Donner l'expression de la vibration $s(x,t)$. En déduire l'expression du vecteur d'onde complexe.

5. Condition de propagation d'une onde électromagnétique dans un plasma

La couche atmosphérique comprise entre 60 km et 800 km d'altitude, exposée au rayonnement solaire, s'ionise et constitue un plasma. La relation de dispersion de la propagation des ondes électromagnétiques dans l'ionosphère

s'écrit $k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$, où ω_p est appelé la pulsation plasma. . $\omega_p = 2\pi f_p$ avec f_p de l'ordre de 10 MHz.

- a) Déterminer la condition sur ω pour qu'une onde électromagnétique plane puisse se propager dans le plasma.
- b) En déduire alors la vitesse de phase et la vitesse de groupe de cette onde.
- c) Représenter graphiquement ces deux vitesses en fonction de ω .
- d) Comment s'exprime le champ électrique lorsque la condition précédente n'est pas vérifiée ? Quel nom lui donne-t-on alors ?
- e) Parmi les deux fréquences suivantes $f_1 = 162 \text{ kHz}$ et $f_3 = 1\,227 \text{ MHz}$, déterminer celle qui correspond à une fréquence radio en modulation d'amplitude et celle utilisée pour les communications par satellites.

EXERCICES :

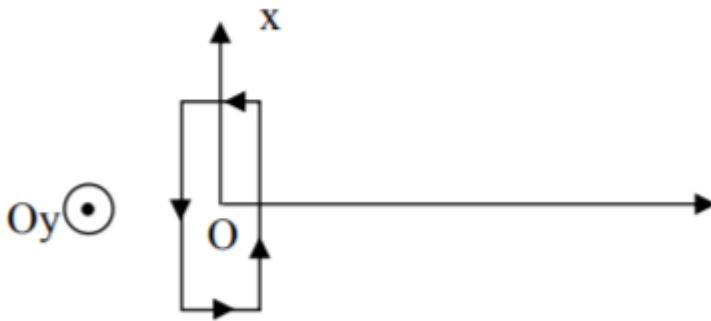
I. Principe du radar

Un radar situé en O émet une onde électromagnétique en direction d'un obstacle métallique situé sur l'axe Oz appelé cible. L'onde sera considérée comme plane et l'obstacle placé orthogonalement à Oz, sera assimilé à un plan conducteur parfait de section S, suffisamment grande pour que l'on puisse négliger effets de bord et diffraction. Les ondes se propagent dans l'air qui sera assimilé au vide pour ses propriétés électromagnétiques. L'amplitude du champ électrique de l'onde incidente est E_0 , celle-ci est monochromatique de pulsation ω et polarisée rectilignement selon la direction Ox. L'obstacle est situé en $z = L$.

- 1) Ecrire l'expression du champ électrique $\vec{E}(M,t)$ de l'onde incidente en un point M à un instant t.
- 2) Que vaut le champ électrique dans le métal de la cible ?
- 3) Montrer qu'il existe nécessairement une onde réfléchie dont on donnera l'expression du champ électrique en un point M à un instant t.
- 4) Un radar émet une impulsion électromagnétique et reçoit un écho après une durée de 2,60 ms. A quelle distance L se trouve l'obstacle ?

II. Etude d'un détecteur d'ondes électromagnétiques

L'onde **réfléchie** de l'exercice précédent de fréquence 3 GHz, d'amplitude E_0 , émise en $z = L$, qui se propage selon Oz, dans le sens z décroissant, est détectée par le radar. Le détecteur est modélisé par un cadre rectangulaire orienté de côtés $h = 5,00$ mm selon Oz et $l = 10,0$ cm selon Ox de vecteur normal \vec{n} colinéaire à \vec{u}_y , de centre $z = 0$. Sur ce cadre, supposé centré au point O, sont bobinés $N = 1000$ tours de fils en série, reliés à un voltmètre électronique qui présente une grande impédance d'entrée.



1. Donner l'expression du champ électromagnétique de l'onde.
2. Calculer la longueur d'onde, et en déduire qu'on peut supposer que le champ magnétique de l'onde réfléchie est uniforme sur le détecteur.
3. En déduire l'expression littérale du flux du champ magnétique de cette onde réfléchie à travers le cadre.
4. En déduire l'expression de la valeur efficace de la tension instantanée

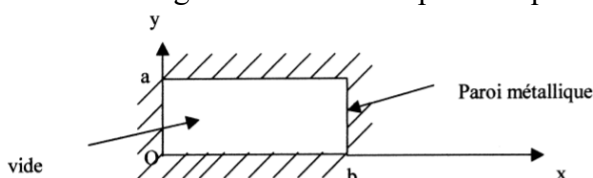
détectée en fonction de E_0 , c , ω , h , l et N .

La plus petite valeur efficace de la tension détectable est, compte tenu des parasites $V_{\text{seff}} = 0,01$ mV.

5. Quelle est la plus petite valeur efficace de champ électrique réfléchi que l'on puisse détecter ?
6. En déduire la puissance moyenne surfacique rayonnée minimale.

III. Etude générale d'un guide d'onde

Pour être dirigée vers sa cible, l'onde émise est guidée au moyen d'un guide d'onde vers le foyer d'un miroir parabolique. Le guide d'onde est de section rectangulaire dans le plan Oxy, ses parois sont formées d'un métal parfait. On cherche à propager une onde transverse électrique de pulsation ω dans l'espace vide à l'intérieur du guide dont le champ électrique se met sous la forme :



$$\vec{E}(M, t) = E(x, y)e^{i(\omega t - kz)}\vec{u}_x.$$

Le guide est de hauteur a selon Oy et de largeur b selon Ox.

1. Rappeler les 4 équations de Maxwell dans le vide.
 2. A partir de l'équation de Maxwell-Gauss, montrer que la fonction $E(x,y)$ ne dépend que de y . Est-ce que l'onde est plane ? On pose $E(x,y) = E(y)$.
 3. Etablir l'équation de propagation du champ électrique dans le vide.
 4. En déduire l'équation différentielle vérifiée par $E(y)$. On pose $\chi^2 = (\omega/c)^2 - k^2$.
- On rappelle les relations de passage du champ électromagnétique à l'interface d'équation $z = 0$, de deux milieux : $\vec{E}(z = 0^+) - \vec{E}(z = 0^-) = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\vec{u}_z$; $\vec{B}(z = 0^+) - \vec{B}(z = 0^-) = \mu_0\vec{J}_S \wedge \vec{u}_z$.

5. Déterminer, en la justifiant soigneusement, la valeur de $E(y)$ en $y = 0$ et en $y = a$. En déduire qu'on a nécessairement $\chi^2 > 0$.
6. En déduire que $E(y) = E_0 \cdot \sin(\chi y)$ où E_0 est une constante qu'on ne cherchera pas à déterminer et que $\chi = \pi n/a$ où n est un entier strictement positif.
7. Déterminer le champ magnétique sous forme complexe associé à cette onde, puis donner sa forme réelle. Quelles relations de continuité doit vérifier ce champ ? Est-ce le cas ?
8. Calculer le vecteur de Poynting, puis sa valeur moyenne temporelle, en déduire la puissance moyenne traversant une section droite du guide d'onde.
9. Que se passe-t-il si $k^2 < 0$? En déduire que le guide d'onde est un filtre passe-haut, dont on déterminera l'expression de la fréquence de coupure f_c .
10. AN : $a = 10$ cm, calculer f_c .
11. Sachant que la fréquence de l'onde est 3 GHz, quelles sont les valeurs possibles de n ?
12. Déterminer E_0 si $n = 1$, $a = b$ et que la puissance moyenne rayonnée par l'onde vaut 1 mW.

IV. Pression de radiation

On rappelle les relations de passage du champ électromagnétique à l'interface d'équation $z = 0$, de deux milieux : $\vec{E}(z = 0^+) - \vec{E}(z = 0^-) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_z$; $\vec{B}(z = 0^+) - \vec{B}(z = 0^-) = \mu_0 \vec{J}_S \wedge \vec{u}_z$.

On considère une OPPH électromagnétique, d'amplitude E_0 polarisée rectilignement selon y qui se propage dans le vide dans le demi-espace $x < 0$ et rencontre un plan conducteur confondu avec le plan $x = 0$.

1. Déterminer à la surface du métal, la valeur du champ magnétique, celle la densité surfacique de charge ainsi que celle de la densité surfacique de courant.
2. On suppose que les courants surfaciques, déterminés précédemment, sont répartis en volume à la surface du conducteur sur une épaisseur a , de l'ordre de quelques profondeurs de peau.
 - a. Donner une relation entre \vec{j} la densité de courant électrique, \vec{j}_S et a .
 - b. Quelle est la valeur de \vec{E} pour $x > a$? de \vec{B} pour $x > a$?

On fait l'hypothèse que la densité de courant \vec{j} est la source du champ magnétique pour $0 < x < a$ et que $\vec{B} = B(x,t) \vec{u}_z$. On cherche à déterminer la pression de radiation exercée sur le conducteur.

- c. Donner une relation entre $\vec{B}(x)$ et \vec{j} pour $0 < x < a$. En déduire l'expression du courant élémentaire di traversant une section dS du conducteur en fonction de B .
 - d. Déterminer la force de Laplace subie par un élément de courant. La représenter et en déduire ce que l'on peut appeler « pression de radiation élémentaire », ainsi que son expression. L'intégrer pour trouver l'expression de la valeur moyenne de la pression de radiation.
 - e. Montrer que la pression de radiation est égale à la densité d'énergie magnétique en $x = 0$ dans le conducteur.
3. Application : Une sphère de rayon a et de masse volumique ρ est placée à une distance r du soleil. Cette sphère est soumise d'une part à l'attraction gravitationnelle du soleil, d'autre part à la pression de radiation due au rayonnement solaire.
- a. Déterminer la valeur moyenne du vecteur de Poynting transporté par l'onde électromagnétique.
 - b. Si P_0 est la puissance moyenne émise par le soleil, exprimer la puissance reçue par la sphère de rayon a en fonction de P_0 , r et a .
 - c. Exprimer la puissance reçue par la sphère en fonction de la pression de radiation exercée par le soleil à la surface de la sphère.
 - d. Montrer que si a est inférieur à une certaine limite a_0 que l'on précisera la sphère est repoussée par le soleil au lieu d'être attirée.
- AN : $M_S = 2 \cdot 10^{30}$ kg, puissance émise par le soleil $P_0 = 3,8 \cdot 10^{26}$ W, $\rho = 3 \cdot 10^3$ kg.m⁻³.

V. Pavillon exponentiel et adaptation d'impédance :

Un pavillon acoustique rigide de longueur L , d'axe de révolution Ox et de section circulaire $S(x)$ (figure 3) contient un fluide au repos de pression P_0 , de masse volumique μ_0 et de coefficient de compressibilité isentropique χ_S constant. Les effets de pesanteur sont négligés.

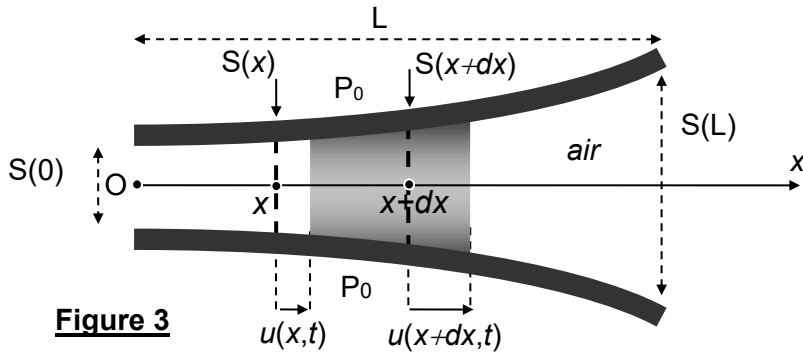


Figure 3

L'équilibre est perturbé par une onde sonore de faible amplitude qui se propage dans le pavillon suivant Ox. Elle est caractérisée par le déplacement longitudinal $u(x,t)$ du fluide situé au repos à l'abscisse x , par la pression acoustique $p(x,t)$ et par la vitesse acoustique $\vec{v}(x,t) = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \vec{e}_x$ dont la composante radiale est négligée. L'équation d'Euler les relie par l'équation différentielle :

$$\frac{\partial p(x,t)}{\partial x} = -\mu_0 \frac{\partial v(x,t)}{\partial t}.$$

Le champ de pression dans le fluide dépend du temps et de l'espace par la relation :

$$P(x,t) = P_0 + p(x,t) \quad |p(x,t)| \ll P_0$$

1. Exprimer l'accroissement relatif δ du volume $S(x)dx$ de la tranche de fluide entre l'état de repos et l'état de mouvement. En déduire la surpression correspondante $p(x,t)$ en fonction de χ_s , u , $\frac{\partial u}{\partial x}$ et $\frac{d \ln S(x)}{dx}$.

2. Démontrer l'expression de l'équation d'onde à laquelle obéit $p(x,t)$ dans le pavillon :

$$\frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial x^2} = \frac{d \ln S(x)}{dx} \frac{\partial p(x,t)}{\partial x}.$$

La section circulaire du pavillon varie selon la loi : $S(x) = S(0) e^{x/a}$, avec $a > 0$.

3. Sachant que l'onde sonore se propage à la célérité C , écrire l'équation de propagation précédente en fonction de C , a et de dérivées spatiales et temporelles de $p(x,t)$.

L'onde sonore est considérée plane progressive harmonique, de la forme :

$$p(x,t) = P_m \exp[j(\omega t - kx)].$$

Le nombre d'onde \underline{k} est, a priori, complexe : $\underline{k} = k' - jk''$, k' et k'' étant réels.

4. Mettre en évidence dans l'expression de $p(x,t)$ les termes d'amortissement et de propagation.
5. Etablir la relation de dispersion reliant \underline{k} , ω , a et C .
6. Montrer que le pavillon se comporte comme un filtre passe-haut ; préciser sa pulsation de coupure ω_c en fonction de a et C .
7. Exprimer la fréquence de coupure f_c en fonction de C , L , $S(0)$ et $S(L)$.

❖ La fréquence de coupure du pavillon acoustique est $f_c = 150 \text{ Hz}$.

8. L'onde sonore progressive se propage suivant $x > 0$. Déterminer le réel k' en fonction de C , ω_c et ω , ainsi que le réel k'' en fonction uniquement de a .
9. Déterminer la puissance moyenne transférée par l'onde sonore à travers la surface $S(x)$ perpendiculaire à sa direction de propagation, en fonction de P_m , μ_0 , C , $S(0)$, ω et ω_c . Commenter.

Le pavillon acoustique est intercalé dans le raccordement de deux conduites de sections $S(0)$ et $S(L)$ comme l'indique la figure 4 ci-dessous :

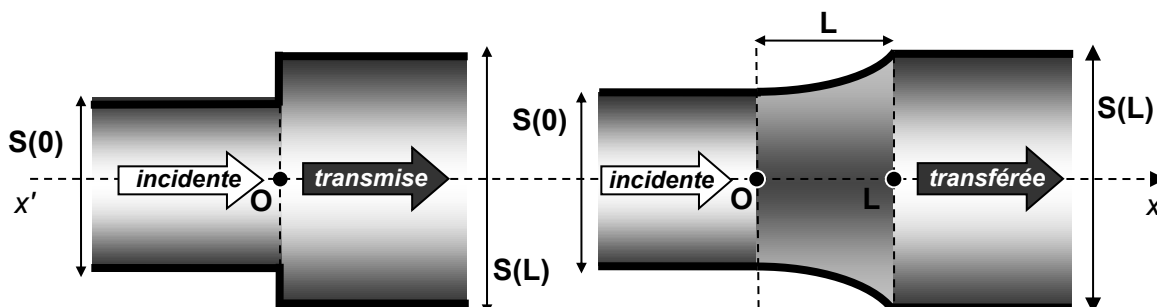


Figure 4

10. Déterminer, pour $\omega > 10 \omega_c$, le coefficient de transmission $T_{\text{pav}} = \frac{\langle P_{\text{transférée}} \rangle}{\langle P_{\text{incidente}} \rangle}$ relatif aux puissances acoustiques incidente à l'entrée et transférée à la sortie du pavillon de longueur L . Que peut-on dire du rapport des intensités sonores transférée et incidente $\frac{I_{\text{transférée}}}{I_{\text{incidente}}}$? Commenter.
11. Comparer T_{pav} au coefficient de transmission en puissance $T = 4\alpha / (1+\alpha)^2$ de la conduite en l'absence de pavillon en exprimant le rapport $\frac{T_{\text{pav}}}{T}$ en fonction de $\alpha = S_L / S_0$. Préciser la valeur numérique de ce rapport pour $\alpha = 9$. Commenter en précisant le gain en décibel obtenu par le pavillon intercalé.

VI. Chaîne unidimensionnelle infinie d'oscillateurs harmoniques

On considère une chaîne unidimensionnelle infinie d'oscillateurs harmoniques identiques, de constante de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 . Les masses sont toutes égales et désignées par des indices entiers successifs $n \in \mathbb{N}$. On note m cette masse des masselottes entre les ressorts, $\vec{r}_n(t) = x_n(t)\vec{u}_x$ le vecteur position de la n ème masse et $u_n(t)$ son déplacement par rapport à sa position d'équilibre. Le référentiel est supposé galiléen. On ne prend en compte que les interactions harmoniques entre les masses.

Initialement, à $t = 0$, la chaîne est au repos. La distance entre deux atomes successifs à l'équilibre a (figure 1) est égale à la longueur à vide, $\ell_0 = a$. On prend comme origine sur l'axe la position repérée par $n = 0$ à $t = 0$.

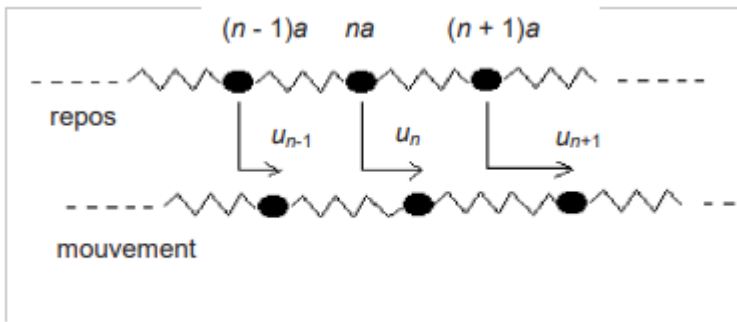


Figure 1 - Chaîne d'oscillateurs identiques

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, écrire la position initiale de la n ème masse ($x_n(0)$) en fonction de n et de a . En déduire son écart $u_n(t)$ par rapport à sa position d'équilibre en fonction de $x=n\cdot a(t)$, n et a .
2. Établir que l'équation du mouvement de la n ème masse, se met sous la forme : $\ddot{u}_n(t) = \omega_0^2 [u_{n+1} + u_{n-1} - \alpha u_n]$ avec α , constante réelle à déterminer.

On s'intéresse à la propagation d'ondes mécaniques dans cette chaîne. On cherche à savoir s'il existe un réel q strictement positif tel que, en notation complexe, on puisse écrire : $\underline{u}_n(t) = U_0 \exp(i(\omega t - qna))$ avec $i^2 = -1$, ω et U_0 strictement positifs.

3. Cette onde est-elle harmonique ? Que représentent U_0 et ω ?

Cette onde présente une périodicité spatiale s'il existe une p ème masse (avec $p > n$) telle que : $\underline{u}_p(t) = \underline{u}_n(t)$. On définit la longueur d'onde comme la plus petite distance séparant deux telles masses au repos.

4. Établir l'expression de la longueur d'onde λ en fonction de a . Que représente finalement q ?
5. Montrer que la relation de dispersion, reliant ω et q , est $\omega^2 = 4\omega_0^2 \left(\sin \frac{qa}{2} \right)^2$. Représenter graphiquement la fonction : $\omega(q)$ en se restreignant à l'intervalle $[0, 2\pi/8]$
6. Rappeler les définitions et les significations de la vitesse de groupe v_g et de la vitesse de phase v_φ . Comment lit-on ces vitesses sur le graphe de la question précédente ?
7. La chaîne est-elle dispersive ? Quelle condition doit satisfaire ω pour que q existe ? Préciser la nature du filtre que constitue la chaîne d'oscillateurs vis-à-vis de ces ondes.
8. Déterminer v_g et v_φ pour $q \ll \pi/a$ et pour $q = \pi/a$. On précisera la nature de l'onde dans les deux cas.