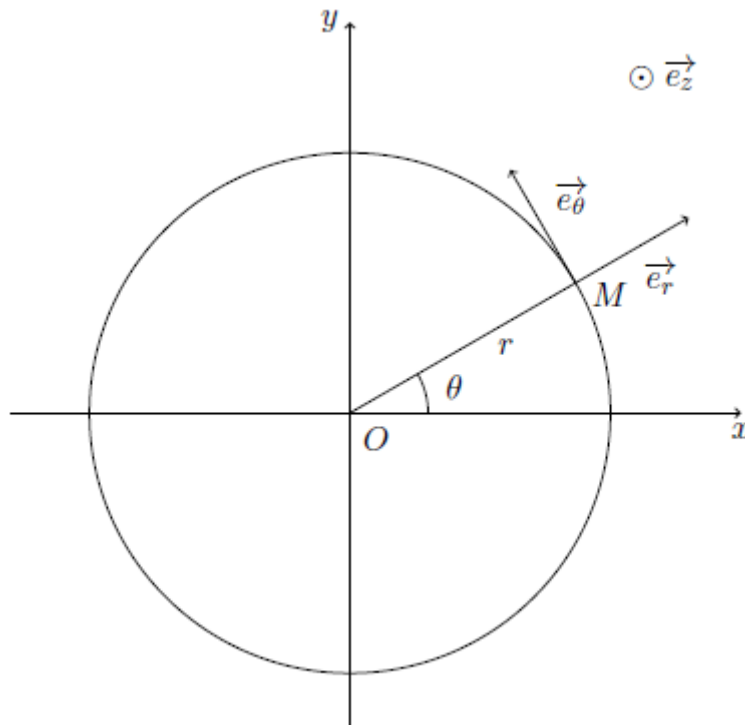


**Mouvements et trajectoires** Banque PT 2025

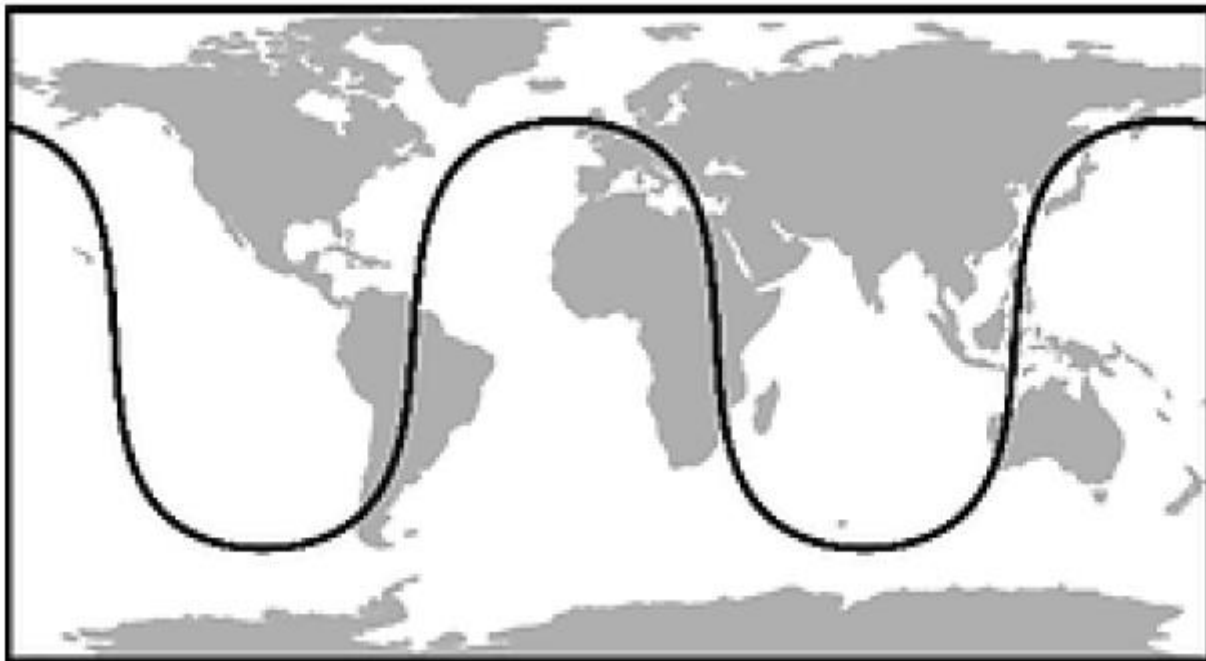
On s'intéresse au mouvement d'un satellite GPS autour de la Terre, dont la trajectoire est circulaire à une altitude  $h = 20000$  km. On considère la Terre et le satellite comme des points matériels de masses respectives  $M_T = 6 \cdot 10^{24}$  kg et  $m = 700$  kg. Le mouvement est plan et circulaire, et on repère la position  $M$  du satellite en coordonnées polaires, le centre de la Terre étant l'origine  $O$  (**figure 3** ci-dessous). On donne la valeur de la constante de gravitation :  $G = 6,7 \cdot 10^{-11}$  SI ainsi que le rayon de la Terre :  $R_T = 6400$  km.



**Figure 3** – Repérage en coordonnées polaires dans le plan du mouvement

- Q1.** Sans démonstration, écrire l'expression de la force vectorielle subie par le satellite et calculer la valeur numérique de sa norme. Toujours sans démonstration, donner l'expression du champ de gravitation  $\vec{g}(M)$  créé par la Terre au point  $M$  en fonction de  $m$ ,  $M_T$ ,  $h$ ,  $R_T$  et  $G$ . On pourra utiliser l'aide numérique suivante :  $2,6^2 \approx 6,7$ .
- Q2.** En considérant la Terre comme sphérique et de masse volumique uniforme, justifier le fait que son champ de gravitation en un point extérieur à la Terre est le même que celui d'un point matériel situé en son centre affecté de toute la masse de la Terre.
- Q3.** En utilisant la deuxième loi de Newton, justifier :
- la relation  $v^2 = \frac{G M_T}{r}$ , où  $v$  est la vitesse du satellite ;
  - que le mouvement circulaire est nécessairement uniforme.
- Q4.** En utilisant la question précédente, retrouver la troisième loi de Kepler dans le cas circulaire.
- Q5.** Calculer la période de révolution  $T_{GPS}$  des satellites GPS en secondes (rappel :  $2,6^2 \approx 6,7$ ). Comparer cette valeur avec la période d'un satellite géostationnaire.

On donne ci-dessous la projection sur la surface terrestre de la trajectoire d'un satellite GPS ainsi que quelques valeurs de latitudes et longitudes.



**Figure 4** – Projection de la trajectoire d'un satellite GPS

Lieu	Paris	Londres	Edimbourg	New York	Tokyo	Cap Horn
Latitude	48,5° Nord	51,3° Nord	55,6° Nord	40,4° Nord	35,4° Nord	55,6° Sud
Longitude	2,2° Est	0,1° Ouest	3,1° Ouest	74° Ouest	139,4° Est	67,2° Ouest

**Figure 5** – Latitudes et longitudes de quelques lieux

- Q6.** Evaluer approximativement, à  $\pm 5^\circ$  près, l'inclinaison  $\alpha$  du plan de l'orbite de ce satellite par rapport au plan équatorial.
- Q7.** On admet que le sens de la révolution du satellite est le même que celui de la rotation propre de la Terre. Sur la **figure 4**, ce sens est-il vers la droite ou vers la gauche (une justification, même succincte, est attendue) ? Quelle est la période du phénomène « le satellite se retrouve à la verticale d'un même point de la Terre » ?

## Propagation du signal

On s'intéresse dans cette partie à la propagation du signal émis par un des satellites. On considérera qu'il s'agit d'une onde électromagnétique de fréquence environ  $f = 1600$  MHz. On donne la vitesse de la lumière dans le vide ainsi que la permittivité diélectrique du vide :  $c = 3 \cdot 10^8$  m.s<sup>-1</sup> et  $\epsilon_0 = 8,8 \cdot 10^{-12}$  F.m<sup>-1</sup>.

- Q8.** En partant des équations de Maxwell, établir l'équation d'onde vérifiée par le champ électrique dans le vide, sans charges ni courants. Quelle est la relation entre  $\mu_0$ ,  $\epsilon_0$  et  $c$  ?

On considère que le satellite est à la verticale du récepteur. Localement, à l'échelle du récepteur, on peut modéliser l'onde qui arrive du satellite par une onde plane monochromatique de la forme :

$$\vec{E} = E_0 \cos(\omega t + kz) \vec{e}_x$$

- Q9.** Faire un schéma où figurent le satellite  $S$ , le récepteur  $R$  ainsi que la base directe  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ . Quels sont les direction, sens de propagation et la polarisation relativement à ce système d'axes ?
- Q10.** Vérifier que cette onde est bien solution de l'équation de propagation à une condition près à préciser reliant  $k$ ,  $\omega$  et  $c$ . Calculer numériquement  $k$  et la longueur d'onde  $\lambda$  associée.
- Q11.** Exprimer le champ  $\vec{B}$  associé à la propagation de l'onde.
- Q12.** Exprimer le vecteur de Poynting  $\vec{\Pi}$  et en déduire l'expression de la puissance moyenne  $I$  par unité de surface associée à la propagation de l'onde.
- Q13.** Au niveau du récepteur, l'amplitude du champ électrique est  $E_0 = 2,5 \cdot 10^{-6} \text{ V.m}^{-1}$ . Calculer numériquement la puissance moyenne par unité de surface à cet endroit. On pourra utiliser l'aide numérique suivante :  $2,5^2 \approx 6,3$ .
- Q14.** On considère que le satellite émet de manière isotrope. Calculer la puissance  $P$  émise par le satellite dans cette hypothèse (rappel :  $2,6^2 \approx 6,7$ ). Peut-on supposer que la puissance réelle est supérieure ou inférieure à celle-ci ?