

APPLICATIONS DIRECTES :

1. Propagation de la chaleur dans le combustible

Citer les trois modes de transfert thermique et donner leurs spécificités.

Indiquer le rôle de chacun de ces modes dans la propagation d'un incendie.

2. Ordres de grandeurs :

Dans le massif central, le granite est à une température de 200°C à 4000 m de profondeur. On donne pour le granite : sa capacité thermique massique $c = 900 \text{ J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$, sa masse volumique $\mu = 2,75.10^3 \text{ kg.m}^{-3}$ et sa conductivité thermique $\lambda = 2,9 \text{ SI}$.

1. Retrouver les unités de λ à partir de la loi de Fourier.
2. Quelle énergie libérerait le refroidissement de 200°C à 15°C d'un bloc de granite cubique de 1 km de côté ?
3. La puissance thermique d'une centrale nucléaire vaut typiquement $P = 1000 \text{ MW}$. Combien d'années devrait fonctionner une centrale nucléaire pour libérer la même quantité d'énergie ?
4. Etablir l'équation de la chaleur en conduction unidirectionnelle axiale.
5. En déduire par analyse dimensionnelle, un ordre de grandeur (en années) du temps τ_c que prendrait le refroidissement de ce cube de granite, plongé dans l'océan, de température supposée constante égale à 15°C.

3. Conduction à une jonction métallique

Un barreau métallique de section constante $s = 2 \text{ cm}^2$ est constitué de deux barreaux de même section soudés, l'un en aluminium, l'autre en cuivre de conductivités thermiques respectives $\lambda_{Al} = 200 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$ et $\lambda_{Cu} = 380 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$, et de longueurs respectives $l_1 = 80 \text{ cm}$ et $l_2 = 50 \text{ cm}$. Les extrémités libres de barreau d'aluminium et du barreau de cuivre sont respectivement maintenues aux températures $T_1 = 180^\circ\text{C}$ et $T_2 = 0^\circ\text{C}$. Une gaine isolante permet d'isoler thermiquement la surface latérale des barreaux.

On suppose le régime stationnaire.

- a. Montrer, à partir d'un bilan énergétique sur un système élémentaire, que la densité de flux thermique est uniforme dans le barreau 1. Qu'en est-il dans le barreau 2 ?
- b. Exprimer P_1 , la puissance thermique dans le barreau 1, en fonction de λ_1 , T_1 , T_j température au niveau de la jonction et l_1 . De même pour P_2 .
- c. Quelle est la nature de l'association entre les deux barreaux, série ou parallèle ? Quelle relation a-t-on alors entre les puissances thermiques de chaque barreau ? entre les densités de flux thermiques ? En déduire la température T du barreau au niveau de la jonction.
- d. Déterminer littéralement puis numériquement, le gradient de température le long du barreau d'aluminium, ainsi que le long du barreau de cuivre.
- e. Déterminer ensuite, littéralement puis numériquement la densité de flux de thermique et la quantité de chaleur qui traverse la jonction en une minute.
- f. Par analogie avec la résistance électrique, définir la résistance thermique d'un barreau. AN

4. Résistance thermique d'un mur

On suppose que l'on est en régime stationnaire. On considère un mur en béton d'épaisseur 30 cm et de surface 15 m^2 séparant une pièce à 20°C de l'extérieur à 0°C.

- a. Rappeler l'ordre de grandeur de la conductivité thermique du béton.
- b. Déterminer un ordre de grandeur de la densité de flux thermique à travers ce mur. En déduire la puissance thermique qui traverse le mur.
- c. Rappeler la définition de la résistance thermique. La calculer pour le mur précédent.

L'équation de la chaleur pour une conduction unidirectionnelle axiale s'écrit $\frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$.

- d. Donner le nom et les unités de toutes les grandeurs introduites.

D s'exprime en fonction de la masse volumique μ , de la capacité thermique massique c et de la conductivité thermique λ .

- Déterminer l'expression de D en fonction des variables précédentes par analyse dimensionnelle.
- Exprimer la capacité thermique volumique C_v du béton en fonction de c et μ . On donne Capacité thermique volumique ($\text{kJ.m}^{-3}.\text{K}^{-1}$) : béton : 2500. Calculer D pour le béton.
- Déterminer la durée caractéristique du transfert thermique par conduction dans le mur. Pour quelles durées est-on dans le régime quasistationnaire ?

5. transfert thermique à travers une enceinte cylindrique

Soit maintenant une enceinte cylindrique en béton de 30 cm d'épaisseur, de 2,5m de hauteur et de rayon intérieur 1m. La température à l'intérieur de l'enceinte est de 20°C et 0°C à l'extérieur. On reprend les caractéristiques du béton de l'AD4. On néglige le transfert thermique à travers le sol et le toit de l'enceinte.

- Exprimer la loi de Fourier dans cette situation.
- En déduire l'expression du flux thermique. Que peut-on déduire pour cette quantité sachant que le régime est stationnaire ? Calculer sa valeur.
- Définir, puis déterminer la résistance thermique de l'enceinte. AN

EXERCICES :

I. Résolution de problème : épaisseur de la couche de graisse d'un dauphin

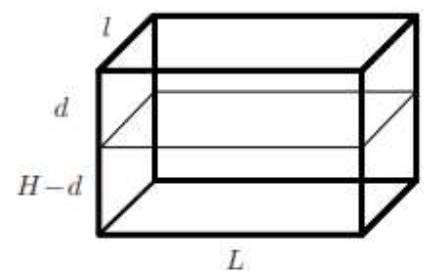
Un grand dauphin pèse en moyenne 150 kg et mesure en moyenne 3 mètres de long. Il mange en moyenne 5 kg de poisson par jour, dont l'apport énergétique moyen est de 100 kcal pour 100 g de poisson (1 kcal = 4,2 kJ). Sa température interne est de 36°. Il est isolé de l'eau par une couche de graisse de conductivité thermique $\lambda_g = 0,2 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$.

En détaillant vos hypothèses et les étapes de votre raisonnement, estimer l'épaisseur moyenne de la couche de graisse d'un grand dauphin. On pourra assimiler le dauphin à un cylindre, et utiliser la résistance thermique de la couche de graisse. Remarque : il est possible que certaines données du texte ci-dessus soient inutiles. Il est également possible que certaines valeurs numériques utiles à la résolution soient manquantes ; vous les estimerez alors avec bon sens.

II. Modélisation d'une voiture en régime permanent

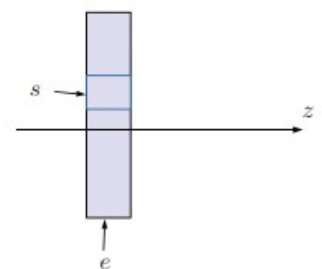
On assimile une automobile à un parallélépipède creux de hauteur $H = 1,5$ m, de largeur $l = 1,75$ m et de longueur $L = 4,0$ m, réalisée en partie avec un matériau 1 hybride d'épaisseur $e_1 = 10$ cm, de conductivité thermique $\lambda_1 = 0,10$ S.I. et en partie en verre d'épaisseur $e_2 = 2,0$ mm et de conductivité thermique $\lambda_2 = 1,2$ S.I.

On peut simplifier le modèle en supposant que les vitres occupent une hauteur $d = 0,50$ m des parois verticales. Le toit, le sol et les parties basses des parois verticales sont constitués du matériau 1. On néglige les effets de bord et/ou la conduction par les coins.



- Rappeler la loi de Fourier en définissant les grandeurs utilisées. Par analyse dimensionnelle, préciser quelle est l'unité de la conductivité thermique λ_i .

On considère un morceau de paroi de surface s , d'épaisseur e et de conductivité thermique λ . La température est supposée ne dépendre que de la variable position sur la normale à cette paroi notée Oz.



- Etablir, en régime permanent, le lien entre la différence des températures de part et d'autre de la paroi $\Delta T = T_{\text{ext}} - T_{\text{int}}$ et le flux thermique (ou puissance thermique) Φ qui traverse, de l'extérieur vers l'intérieur, une surface s de paroi d'un matériau de conductivité thermique λ . En déduire la résistance thermique de cet élément de paroi en fonction de s , e et λ .

3. A quelle situation physique correspond une association en série de résistances thermiques ? A quelle situation physique correspond une association en parallèle de résistances thermiques ?
4. Donner l'expression des résistances thermiques des parties suivantes du véhicule en fonction des données nécessaires :
 - (a) R_1 résistance thermique du toit (le sol de la voiture possède la même résistance thermique),
 - (b) R_2 résistance thermique des parties latérales en matériau 1 (de hauteur $H - d$),
 - (c) R_3 résistance thermique de toutes les vitres (partie latérale de hauteur d).
5. Faire un schéma électrique équivalent de la voiture et en déduire sa résistance thermique totale R_v .
6. Calculer la valeur numérique de R_v et celle de R_3 (partie vitrée). Comparer la puissance thermique totale perdue par la voiture et celle traversant les vitres. Commenter.
7. En réalité, le rapport entre l'écart de température $\Delta T = T_{ext} - T_{int}$ et le flux thermique total Φ entrant dans la voiture par les parois est différent du résultat précédent. De quel autre phénomène de transfert fallait-il vraisemblablement tenir compte ? Exprimer, pour le plafond, la résistance qui doit être rajoutée à R_1 en appelant h le coefficient de la loi de Newton entre le matériau 1 et l'air. Commenter. Faire le nouveau schéma électrique équivalent.

Par la suite, on prendra $G = 1 / R_v = 150 \text{ W.K}^{-1}$ pour le rapport $\Phi / \Delta T$.

On suppose que : • l'appareil de conditionnement de l'air de la voiture permet de refroidir l'habitacle en été, de le réchauffer en hiver et de renouveler l'air en même temps,

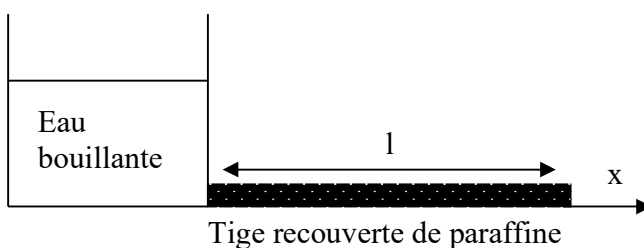
• la pression est toujours la même à l'extérieur et à l'intérieur et est égale à la pression standard $p = p_0 = 1,0135 \text{ Pa}$,

• et l'habitacle est maintenu à la température de consigne $T_C = 293 \text{ K}$.

8. Chacun des n passagers dégage une puissance thermique $p = 75 \text{ W}$. Exprimer la puissance P_1 fournie par le conditionneur en fonction de n , p , G et $\Delta T = T_{ext} - T_{int}$.

9. Calculer les deux valeurs de P_1 pour $n = 4$ passagers, en été $T_{ext} = 303 \text{ K}$ ou en hiver $T_{ext} = 263 \text{ K}$. Commenter le signe. Pour quelle température extérieure n'y aurait-il pas besoin de conditionnement ? L'ordre de grandeur vous paraît-il vraisemblable ?

III. Conductivité thermique de l'étain



Versons de l'eau bouillante dans un récipient métallique. Nous observons une fusion progressive de la paraffine jusqu'à une distance x_1 du récipient. Cette valeur x_1 dépend de la nature (verre, bois, métal) de la tige cylindrique de rayon R , maintenue à une température constante $T_o = 373 \text{ K}$ à une de ses extrémités ; elle caractérise la conduction thermique de la tige considérée.

On admet que les pertes thermiques par rayonnement et convection de la surface latérale de la tige s'expriment par $dP = k(T(x) - T_a) dS$, en posant dP : puissance thermique cédée par un élément de surface latérale dS ; $T(x) - T_a$ écart de température entre l'élément de conducteur à l'abscisse x et le milieu extérieur de température T_a ; k coefficient conducto-convectif caractéristique de cet échange.

1. En effectuant un bilan énergétique d'une portion élémentaire de tige comprise entre les abscisses x et $x+dx$, établir l'équation différentielle du 2^{ème} ordre vérifiée par $\theta(x,t) = T(x) - T_a$.
2. Comment est modifié le bilan précédent si on suppose le régime stationnaire atteint ? En déduire l'équation différentielle $\theta(x)$.
3. On suppose que la tige est assez longue pour que la température de son extrémité soit confondue avec la température ambiante $T(l \rightarrow \infty) = T_a$. Montrer que dans ces conditions $\theta(x) = \theta_o \cdot \exp(-x/\delta)$ est

solution de l'équation différentielle. δ étant une longueur caractéristique qu'il faut déterminer en fonction de k , λ (conductivité thermique) et du rayon R de la tige.

4. On compare dans les conditions précédentes, la conduction thermique de deux tiges de mêmes dimensions, en cuivre et en étain. La fusion de la paraffine recouvrant chaque tige se produit jusqu'aux abscisses $x_1 = 15,6$ cm pour le cuivre et $x_2 = 6,4$ cm pour l'étain. Evaluer la conductivité thermique λ_2 de l'étain en sachant que $\lambda_1 = 390 \text{ W.m}^{-1}\text{.K}^{-1}$ pour le cuivre. Le coefficient k conserve la même valeur pour les deux tiges.

IV. Etude d'un fusible en céramique

Un fusible en céramique est constitué d'un fil métallique cylindrique de section S , de longueur L . On donne la masse volumique μ , les conductivités thermique λ et électrique σ , la capacité thermique massique c du fil métallique. On considère que toutes ces grandeurs sont uniformes dans le fil métallique et indépendantes de la température.

Le fil métallique est soudé à ses deux extrémités sur des plots de cuivre massif que l'on considère conducteur électrique et thermique parfait. Le cuivre est maintenu à une température constante T_0 . Il s'agit de la température de l'air extérieur au fusible.

Le fil métallique est inséré dans une gaine en silice assurant une isolation latérale thermique et électrique parfaite.

Le fil métallique est parcouru par un courant d'intensité I .

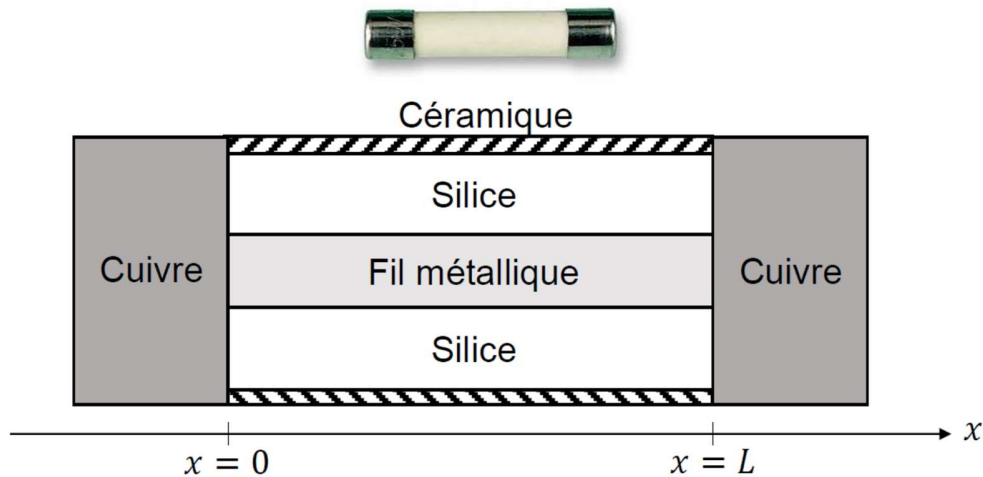


Figure 1 : Fusible en céramique

On considère que la température ne dépend que de la position et du temps $T = T(x, t)$.

1. Rappeler la loi de Fourier. Préciser sa signification physique ainsi que celle de chacun de ses termes. Donner les unités de chaque terme.
2. Montrer que l'équation aux dérivées partielles vérifiée par la température peut s'écrire sous la forme

$$\mu c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{I^2}{\sigma S^2} + \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}.$$

3. Établir le profil de température dans le fil métallique en régime stationnaire. Tracer l'allure de ce profil.

La température de fusion du métal est notée T_f .

4. Donner la position x_{fusion} du fil métallique où débute la fusion du métal lorsque le courant atteint l'intensité maximale I_{max} supportée par le fusible.

Pour différents instruments électriques (multimètres, GBF, ...) on dispose au laboratoire d'un ensemble de fusibles dont les valeurs d'intensités maximales admissibles varient. On cherche à déterminer au laboratoire le diamètre D du fil métallique constituant chaque fusible, de l'ordre du micromètre. On mesure la longueur des fusibles : $L = 3,0$ cm.

5. Proposer une méthode optique permettant de déterminer avec du matériel usuel de laboratoire le diamètre des fils métalliques des différents fusibles. Une description rigoureuse du principe de la méthode est attendue.

Les différents fusibles sont composés du même type de métal. Les mesures pour chacun de l'intensité maximale en fonction de leur diamètre sont effectuées pour $T_0 = 293 \text{ K}$ et résumées dans le tableau suivant :

$I_{max} \text{ (A)}$	0,8	1,0	2,0	2,5	4,0	5,0	6,3
$D \text{ (}\mu\text{m)}$	57	64	100	114	145	160	188

6. En explicitant votre méthode, déterminer l'élément chimique le plus probable constituant le fil métallique du fusible.

Données relatives à l'aluminium :

- L'aluminium libère exactement trois électrons de conduction par atome ;
- masse volumique de l'aluminium $\mu_{Al} = 2,6989 \text{ g.cm}^{-3}$;
- masse molaire atomique de l'aluminium $M_{Al} = 27,0 \text{ g.mol}^{-1}$;
- capacité thermique massique de l'aluminium $c_{Al} = 897 \text{ J.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$;
- enthalpie massique de fusion de l'aluminium $\Delta h_{fus,Al} = 398 \text{ kJ.kg}^{-1}$.

Caractéristiques de différents métaux :

- température de fusion : T_f
- conductivité thermique : λ
- conductivité électrique : σ

	Plomb	Argent	Aluminium
$T_f \text{ (K)}$	600,7	1235	933,5
$\lambda \text{ (W.m}^{-1}.\text{K}^{-1})$	35,3	429	237
$\sigma \text{ (unité S.I. « de base »)}$	$4,81.10^6$	$6,30.10^7$	$3,77.10^7$

On entend par unité S.I. « de base » l'unité non préfixée (exemple : le mètre et pas le centimètre)

V. Formation d'une couche de glace à la surface d'une patinoire naturelle (CCP TSI 2020)

Document :

La solidité de la glace La couleur de la glace peut donner une indication de sa solidité. La glace bleue pâle est la plus solide. La glace blanche opaque ou glace de neige est, en général, seulement à moitié aussi solide que la glace bleue pâle. La glace grise n'est pas sécuritaire. L'épaisseur de la glace doit être de 15 cm pour la marche ou le patinage individuels, 20 cm pour le patinage en groupe ou les jeux et 25 cm pour les motoneiges.

1. Lors du déplacement des joueurs de hockey sur la glace, la lame du patin crée une fine couche d'eau liquide à la surface de la glace. Donner une cause physique à sa création.

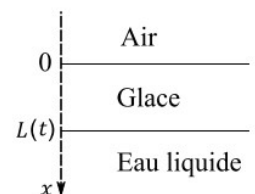
L'eau liquide d'un grand lac est à la température de congélation $T_E = 0^\circ\text{C}$. L'air au-dessus du lac est à la température $T_A = -10^\circ\text{C}$. Ces deux températures sont supposées constantes. À l'instant initial, l'eau est liquide puis le lac se couvre progressivement d'une couche de glace.

On suppose que la température $T(x)$ ne dépend que du temps et d'une seule coordonnée d'espace, que la glace est un milieu isotrope et que la pression est constante.

L'épaisseur de la couche de glace à l'instant t est notée $L(t)$. À l'instant $t=0$, $L(0) = 0$.

Le transfert thermique de la glace vers l'air est modélisé par la loi de Newton : $\varphi = h(T_o(t) - T_A)$ avec φ le flux thermique surfacique, $T_o(t) = T(0,t)$ la température de la glace en $x = 0$ et h le coefficient de transfert en $\text{W m}^{-2} \text{K}^{-1}$.

Le référentiel choisi est associé à l'interface entre l'air et la glace.



La masse volumique de la glace, supposée incompressible et indilatable, est notée ρ ; la conductivité thermique de la glace est notée λ et la capacité thermique massique de la glace est notée c . Ces grandeurs associées à la glace sont supposées indépendantes de la température et de la pression.

2. Citer trois modes de transfert thermique.
3. En utilisant la loi de Fourier, donner l'expression du vecteur densité de flux thermique noté $\overrightarrow{J_{Th}}$ à l'intérieur de la glace.
4. À l'aide d'un bilan thermique local à une dimension sur un parallélépipède de surface S et d'épaisseur dx , établir une relation différentielle entre la température et la norme du vecteur densité de flux thermique au sein de la glace.
5. En déduire l'équation de la diffusion thermique.
6. En se plaçant dans le cadre de l'approximation quasi stationnaire, montrer que pour $0 \leq x \leq L(t)$:

$$T(x,t) = T_o(t) + (T_E - T_o(t))x/L(t).$$
7. Déduire de la continuité du flux thermique en $x = 0$ l'expression de $L(t)$ en fonction de $T_o(t)$:

$$L(t) = \frac{\lambda(T_E - T_o(t))}{h(T_o(t) - T_A)}$$

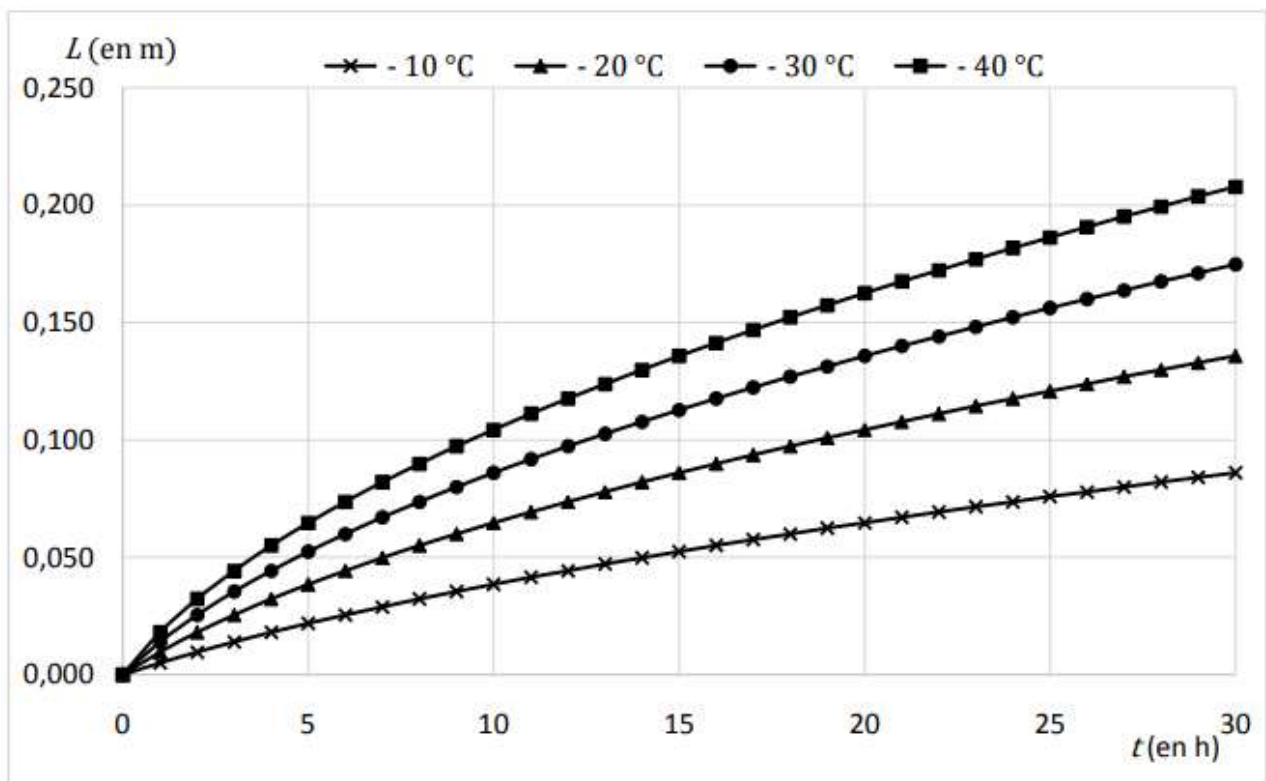


Figure 8 - Simulation graphique représentant l'épaisseur de la couche de glace L en fonction du temps t pour différentes températures T_A de l'air

8. On admet que l'épaisseur de la couche de glace en fonction du temps est représentée par la simulation graphique en figure 8. Au bout de 20 heures, les joueurs de hockey peuvent-ils considérer que la glace est suffisamment solide pour pouvoir jouer dessus ?
9. En utilisant la figure 8, commenter puis expliquer l'évolution de la vitesse de formation de la glace pour une même température de l'air T_A , puis pour différentes températures de l'air T_A .
10. De quelle autre grandeur, encore non citée jusqu'à présent, a-t-on eu besoin pour résoudre numériquement le problème et proposer la simulation en figure 8 ? Donner sa définition et préciser l'unité

VI. Température dans le tunnel de Fréjus : Evolutions saisonnières de la température dans le sol

Le tunnel routier du Fréjus relie la vallée de l'Arc, en France, au val de Suse, en Italie. Long d'environ 13 km, le tunnel passe sous le col du Fréjus dans les Alpes cottiennes. La pointe Fréjus culmine à une altitude de 2934 m.

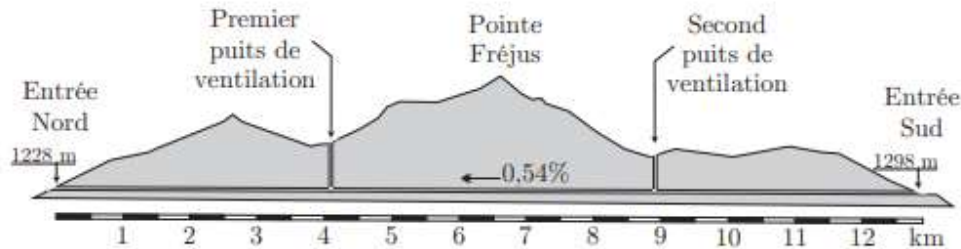


FIGURE 1 – Tunnel de Fréjus

La roche environnante dans le tunnel a une température constante tout au long de l'année d'environ 30° C.

On se place au sommet de la pointe Fréjus à une altitude de 2934 m. On assimile la roche à un milieu semi-infini de conductivité thermique κ , de masse volumique ρ_s et de capacité thermique massique c_s . Sa surface est plane et horizontale et est soumise à la variation de température extérieure $T(z=0,t) = \theta_0 + T_0 \cos(\omega t)$ avec $\theta_0 = 0^\circ \text{ C}$. (Voir figure 2).

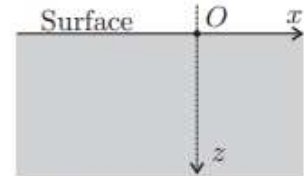


FIGURE 2 – Sol

- Calculer la moyenne temporelle de la température extérieure en $z = 0$. Calculer les températures maximale et minimale. Proposer une valeur numérique pour T_0 pour les évolutions annuelles de température.
- Le flux thermique élémentaire, défini comme la quantité d'énergie traversant une surface élémentaire dS pendant dt , est noté $\delta\phi_Q$. Rappeler la définition du vecteur $\vec{j}_Q$, densité de flux thermique. Quelle est sa dimension ?
- Rappeler la loi de Fourier, ainsi que ses conditions d'application. En déduire les dimensions de la conductivité thermique κ .
- On étudie une tranche mésoscopique de sol comprise entre z et $z + dz$ de surface S . Quelle est l'énergie thermique δQ reçue par cette tranche entre t et $t + dt$?
- Etablir l'expression de sa variation d'énergie interne dU en fonction de $\partial j_Q / \partial z$ et S puis en fonction de ρ_s , c_s , S et $\partial T / \partial t$.
- En déduire l'équation de la chaleur à une dimension. Définir D , le coefficient de diffusivité thermique et donner ses unités.

On cherche des solutions de la forme $T(z,t) = \theta_0 + T_0 e^{i(\omega t - kz)}$ vérifiant la condition aux limites $T(z=0,t) = \theta_0 + T_0 \cos(\omega t)$.

- Interpréter cette forme de solution. Déterminer la relation de dispersion correspondante. En déduire l'expression de $\underline{k}$ qu'on mettra sous la forme $\underline{k} = k' + ik''$ avec $k' > 0$. Quelle est la signification physique de k' et k'' . Déterminer l'expression correspondante de la solution réelle $T(z,t)$.
- Calculer la profondeur z_e à partir de laquelle les oscillations annuelles de température ne s'écartent pas de θ_0 de plus de 1%. Que peut-on dire de la température dans le tunnel routier de Fréjus ? Pour les roches granitiques constituant le Fréjus on donne $\rho_s = 2,65 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, $c_s = 8,50 \times 10^3 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$ et $\kappa = 3,00 \text{ si}$.
- Que peut-on dire des variations quotidiennes de la température à la profondeur z_e ? En termes de filtrage fréquentiel, comment se comporte le sol ?

VII. Température d'origine géophysique

1. Le tunnel routier du Fréjus relie la vallée de l'Arc, en France, au val de Suse, en Italie. Long d'environ 13 km, le tunnel passe sous le col du Fréjus dans les Alpes cottiennes. La pointe Fréjus culmine à une altitude de 2934 m.

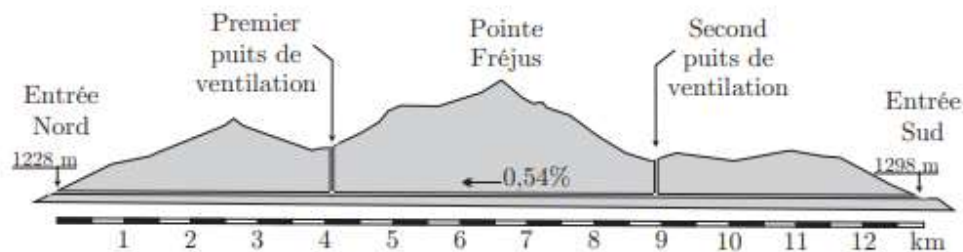


FIGURE 1 – Tunnel de Fréjus

La température moyenne de 30°C relevée dans le tunnel de Fréjus peut être expliquée par un modèle géothermique simple de la croûte terrestre. On considère qu'au niveau des Alpes, l'épaisseur de la croûte terrestre continentale est $L_c = 45,0$ km. Les roches granitiques qui constituent une partie des Alpes contiennent des éléments radioactifs comme l'uranium, le thorium et le potassium. La chaleur produite par ces éléments radioactifs est directement proportionnelle à leur concentration

Dans les modèles couramment utilisés cette concentration décroît exponentiellement avec la profondeur, de sorte que la puissance volumique dégagée peut s'écrire $P = P_0 \exp(-z/H)$ avec $H = 10,0$ km. On prendra $P_0 = 2,50 \mu\text{W} \cdot \text{m}^{-3}$. La croûte terrestre repose sur le manteau terrestre, à la fois plus dense et plus chaud que la croûte. On admet enfin qu'au niveau de l'interface $I_{c/m}$ entre la croûte et le manteau ce dernier génère un flux surfacique constant $\vec{j}_m = -j_m \vec{u}_z$ avec $j_m = 35,0 \text{ mW} \cdot \text{m}^{-2}$.

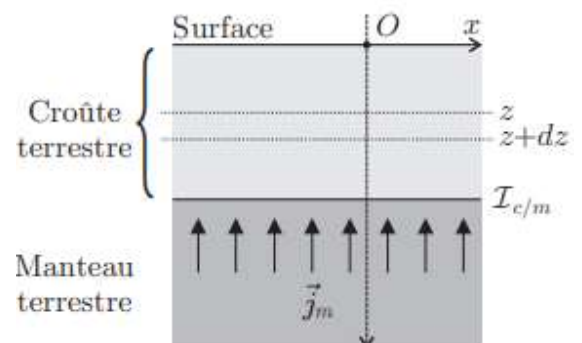


FIGURE 3 – Modèle géophysique

- a. Effectuer, *en régime stationnaire*, le bilan thermique dans une tranche de croûte terrestre de surface S , comprise entre z et $z + dz$.
- b. En déduire la température $T(z)$ en fonction de : H , L_c , P , j_m , κ et $\theta_0 = 0^\circ \text{C}$ la température moyenne de surface en $z = 0$.
- c. Exprimer le flux thermique total $\vec{j}_S = j_S \vec{u}_z$ au niveau de la surface en $z = 0$.
- d. Comparer les deux termes proportionnels à z et simplifier l'expression de $T(z)$. Calculer la température au centre du tunnel de Fréjus ($z = 1,70$ km) puis j_S .

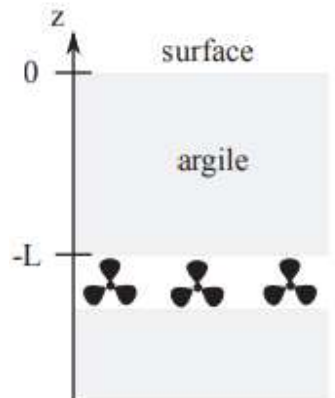
VIII. Stockage des déchets radioactifs

Le projet français Cigéo vise à enfouir, sous 500 m de roches argileuses, les déchets nucléaires dits « de moyenne et haute activité à vie longue » (demi-vie > 31 ans) - soit les plus dangereux - sur un terrain situé à cheval sur les départements de la Meuse et de la Haute-Marne (site de Bure). Afin de préparer ce projet, un laboratoire souterrain a été mis en service sur ce site en 2 000 par l'Agence nationale pour la gestion des déchets radioactifs (Andra).

Les combustibles usés, qui constituent l'essentiel des déchets de haute activité et qui resteront radioactifs des centaines de milliers d'années, sont actuellement entreposés dans les installations d'Orano (ex-Areva) à La Hague (Manche) sous forme de « colis » vitrifiés.

On étudie de manière très simplifiée la possibilité de stocker de tels déchets radioactifs, sous une couche argileuse d'épaisseur $L = 500$ m.

Du fait de la radioactivité des produits de fission, les déchets sont exothermiques. Ils sont vitrifiés dans des colis qui dégagent une puissance $P_0 = 2,0$ kW dans la première décennie du stockage et décroissante dans le temps. N colis sont entreposés à 500 m sous la surface. Ils sont uniformément répartis sur une surface S .



La température dans l'argile est notée $T(z, t)$. L'argile a une masse volumique ρ_a , une conductivité thermique λ_a , une capacité thermique massique c_a et une diffusivité thermique Da , toutes uniformes.

Conductivité thermique de l'argile	$\lambda_a = 1,5 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
Masse volumique de l'argile	$\rho_a = 1,7 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$
Capacité thermique massique de l'argile	$c_a = 7 \cdot 10^2 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$

L'épaisseur de la couche dans laquelle seront entreposés les déchets radioactifs est négligeable devant L .

$T(z, t)$ est solution de l'équation de la chaleur $\frac{\partial T}{\partial t} = Da \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$.

1. Exprimer Da en fonction des données. AN. Calculer la valeur de τ , durée caractéristique de diffusion.
2. Interpréter les deux conditions aux limites suivantes :

$$\left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=-L} = -\frac{N \cdot P_0}{2 \lambda_a \cdot S} \quad \text{et} \quad T(z = 0, t) = T_{\text{ext}}.$$

3. Donner l'expression de $T(z)$ en régime permanent. Que vaut $T(-L)$?

Température annuelle moyenne de l'atmosphère sur le site de Bure : $T_{\text{ext}} = 13^\circ \text{C}$.

La température dans l'argile ne doit pas dépasser $T_{\text{max}} = 100^\circ \text{C}$ afin que ses propriétés de confinement ne soient pas dégradées. Le stock total de déchets français représente $N = 3,6 \cdot 10^4$ colis.

4. Estimer la surface S nécessaire à leur enfouissement

On se propose dans la suite de simuler numériquement l'évolution temporelle du champ de température $(z, t) \rightarrow T(z, t)$ de la couche supérieure d'argile au cours du temps.

Notations

- h est le pas de la subdivision uniforme $(t_i)_{i \in \llbracket 0, N_t \rrbracket}$ de l'intervalle de temps $[0, \Delta t = 3\tau]$ où τ est la durée caractéristique de diffusion thermique.

$$t_i = i \cdot h \text{ et } \tilde{T}^i(z) \text{ est l'approximation de } T(z, t_i) \text{ pour } i \in \llbracket 0, N_t \rrbracket$$

- k est le pas de la subdivision uniforme $(z_n)_{n \in \llbracket 0, N_z \rrbracket}$ de l'intervalle $[-L, 0]$

$$z_n = n \cdot k \text{ et } \tilde{T}_n(t) \text{ est l'approximation de } T(z_n, t) \text{ pour } n \in \llbracket 0, N_z \rrbracket$$

En **conclusion** : $\tilde{T}_n^i$ est l'**approximation numérique de la solution** $T(z = n \cdot k, t = i \cdot h)$ sur un maillage spatial de pas k et une discrétisation temporelle de pas h .

Présentation du schéma numérique explicite centré en espace :

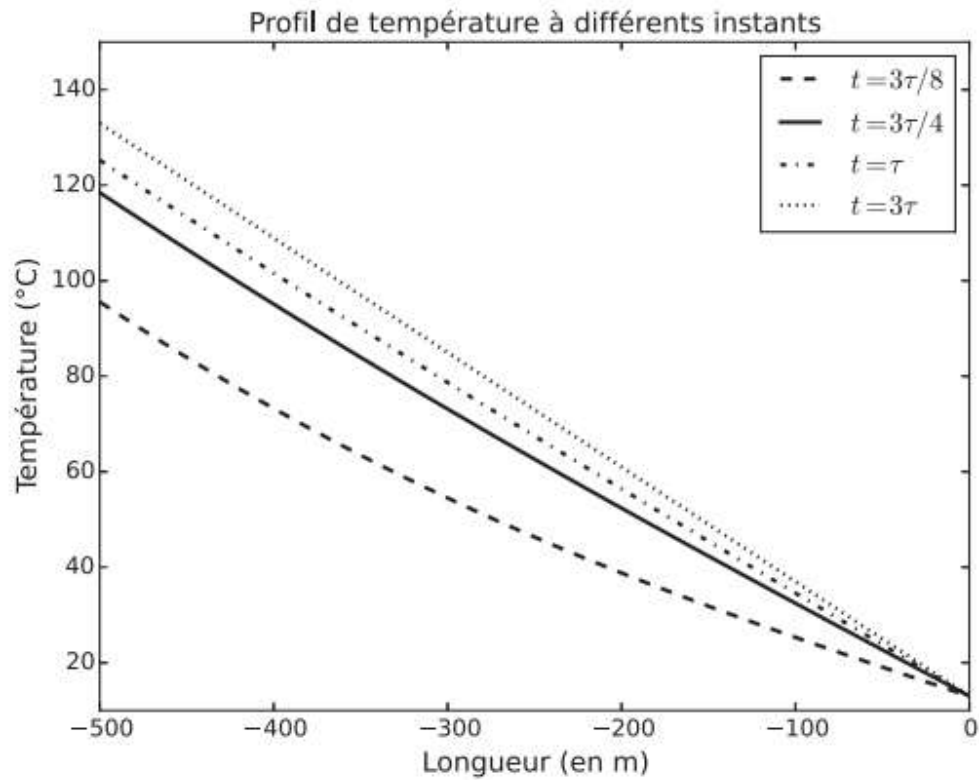
$$\frac{\tilde{T}_n^{i+1} - \tilde{T}_n^i}{h} = D_a \frac{\tilde{T}_{n+1}^i - 2\tilde{T}_n^i + \tilde{T}_{n-1}^i}{k^2}. \quad (7)$$

Stabilité du schéma numérique : le schéma numérique est stable si $r \leq \frac{1}{2}$ avec $r = \frac{D_a \cdot h}{k^2}$.

On propose les lignes de code suivantes. Initialement, le champ de température de l'argile est uniforme de valeur égale à Text.

```
1      #Constantes numériques
2  lambda_a, c_a, rho_a = 1.5, 7e2, 1.7e3
3  D_a = ...      #coefficient de diffusivité thermique
4  P0, N, L, S = 2e3, 36000, 5e2, 1e8
5  tau = ...      #temps caractéristique de diffusion thermique
6  Text = 13.
7  Nt, Nx = 30000, 50
8  h = ...      #pas discrétisation temporelle
9  k = ...      #pas discrétisation spatiale
10     #coefficient r
11  r = D_a * h / k**2
12  assert(r < 0.5)
13     #initialisation champ température
14  T = [[Text for j in range(Nx)] for i in range(Nt)]
15  T[0][0] = T[0][1] + N * P0 / (2 * lambda_a * S) * k
16     #Schéma numérique explicite
17  for t in range(Nt - 1):
18      for x in range(1, Nx - 1):
19          T[t + 1][x] = T[t][x] + ...
20      T[t+1][0] = T[t+1][1] + N * P0 / (2 * lambda_a * S) * k
```

Après traitement des données, on obtient le réseau de courbes ci-dessous :



1. Donner l'expression du pas de discrétisation temporelle h en fonction de Δt et N_t .
2. Justifier que $\left. \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right|_{z_n, t_i} \approx \frac{\tilde{T}_{n+1}^i - 2\tilde{T}_n^i + \tilde{T}_{n-1}^i}{k^2}$.
3. Quel est l'intérêt de la ligne 12 ? Que traduisent les lignes 15 et 20 ?
4. Compléter la ligne 19.
5. Commenter le réseau de courbes obtenu. Quelle(s) critique(s) pourrait-on formuler au sujet des lignes de code proposées ?