

2026/2027

Thème : Systèmes linéaires

APPLICATIONS DIRECTES :**1. Valeurs moyennes et efficaces**Rappeler les définitions des valeurs moyenne et efficace d'un signal $e(t)$.

On considère un signal T périodique, tel que

pour $0 < t < T/2$, $e(t) = 5 \text{ V}$
 et pour $T/2 < t < T$, $e(t) = 0$.

Représenter $e(t)$ graphiquement. Calculer les valeurs moyenne et efficace de $e(t)$.**2. Modèle de Thévenin :**

Donner le schéma électrocinétique d'un générateur de Thévenin. Orienter courant et tension, et donner la relation entre ces deux grandeurs.

On branche une résistance réglable aux bornes de ce générateur.

On mesure une différence de potentiel de 22 V à ses bornes quand il est traversé par un courant de 2 A.

La différence de potentiel monte à 30 V lorsque l'intensité du courant descend à 1,2 A.

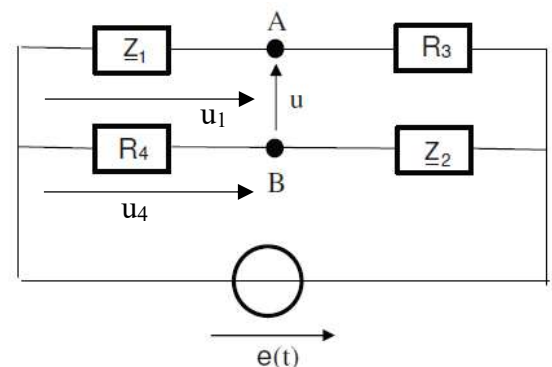
Sachant que la fém et la résistance interne du générateur restent les mêmes, qu'a-t-on modifié dans le circuit pour faire varier les valeurs précédentes ? Déterminer la valeur numérique de cette grandeur dans les deux situations précédentes.

Déterminer la fém et la résistance interne du générateur de Thévenin.

3. Etude d'un pont de Wheatstone

Un pont de Wheatstone est représenté ci-contre. Il permet de déterminer l'impédance d'un composant par une méthode dite « de zéro ».

1. Exprimer $\underline{u}_1$ en fonction de $\underline{e}$, R_3 et $\underline{Z}_1$.
2. Exprimer $\underline{u}_4$ en fonction de $\underline{e}$, R_4 et $\underline{Z}_2$.
3. Exprimer $\underline{u}$ en fonction de $\underline{u}_1$ et $\underline{u}_4$.
4. Montrer que si $\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2 = R_3 \cdot R_4$ alors $u = 0$

**4. Circuit LR**Un circuit série composé d'une bobine idéale d'inductance L associée en série avec une résistance R est soumis à un échelon de tension. On enregistre le régime transitoire aux bornes de la résistance à l'aide d'une interface Sysam et de Latis pro.

Après avoir justifié les valeurs prises par cette tension à l'instant initial et en régime permanent, représenter l'allure de la courbe obtenue.

Mêmes questions si on s'intéresse à la tension aux bornes de la bobine.

Déterminer l'équation différentielle dont est solution la tension aux bornes de la résistance.

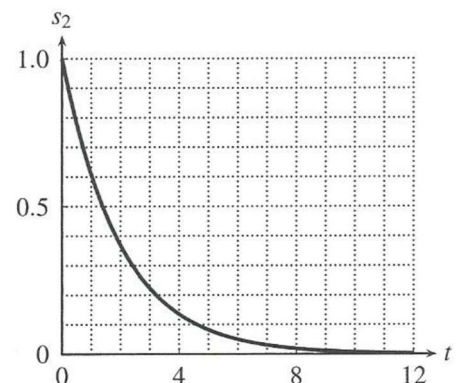
En déduire l'équation différentielle dont est solution la tension aux bornes de la bobine.

5. Système d'ordre 1

On donne la réponse à un échelon d'un système d'ordre 1. Déterminer la valeur numérique de la constante de temps de ce système.

Pour quelles valeurs de t (en ms sur le graphe) a-t-on le régime transitoire ? Le régime permanent ? Le régime permanent est-il stationnaire ou sinusoïdal forcé ?Le système d'ordre 1 est un circuit RC série où le condensateur est initialement déchargé. Sachant que s_2 est une tension, aux bornes de quel dipôle a-t-elle été relevée ? Est-ce que s_2 est une fonction continue du temps ?

Quelle est la valeur de l'échelon ?



Ecrire l'équation différentielle dont $s_2(t)$ est solution.

Dessiner le circuit qui permet d'étudier la réponse fréquentielle correspondant à cette réponse indicielle. S'agit-il d'un filtre d'ordre 1 ou 2 ? En remplaçant le condensateur par son dipôle équivalent en haute et basse fréquence déterminer la nature du filtre. Donner sa fonction de transfert et la valeur numérique de sa pulsation de coupure.

6. Filtrage graphique

Soit le diagramme de Bode asymptotique de la fonction

de transfert $\underline{H} = \frac{\underline{S}}{\underline{E}}$ donné ci-contre.

Déterminer la nature, l'ordre et la bande passante de ce filtre.

Sachant que les tensions sont exprimées en V et le temps en s, déterminer l'expression de $s(t)$ si :

$$e_1(t) = 0,4 \quad ; \quad e_2(t) = 0,2 \cdot \cos(2\pi \cdot 10 \cdot t)$$

$$e_3(t) = 0,4 \cdot \cos(2\pi \cdot 10^2 \cdot t)$$

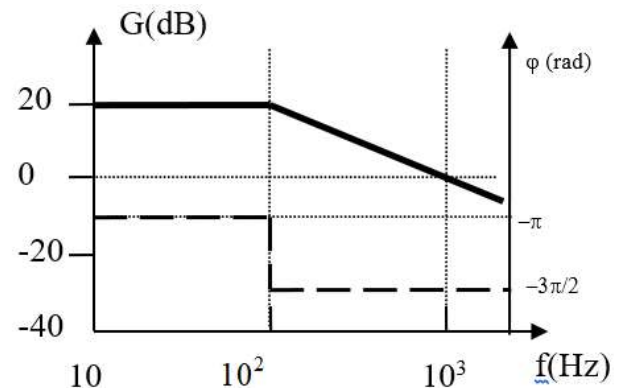
$$e_4(t) = 5 \cdot \cos(2\pi \cdot 10^3 \cdot t) \quad ; \quad e_5(t) = 5 \cdot \cos(2\pi \cdot 10^4 \cdot t)$$

Représenter graphiquement $e_1(t)$ et $s_1(t)$ sur le même graphe ; $e_2(t)$ et $s_2(t)$ sur le même graphe ; $e_3(t)$ et $s_3(t)$ sur le même graphe ; $e_4(t)$ et $s_4(t)$ sur le même graphe.

Tracer le spectre de Fourier de $e(t) = e_1(t) + e_2(t) + e_3(t) + e_4(t) + e_5(t)$ puis celui de $s(t)$.

Quels noms particuliers donne-t-on à $e_1(t)$ et $s_1(t)$ dans $e(t)$ et $s(t)$? à $e_2(t)$ et $s_2(t)$ dans $e(t)$ et $s(t)$?

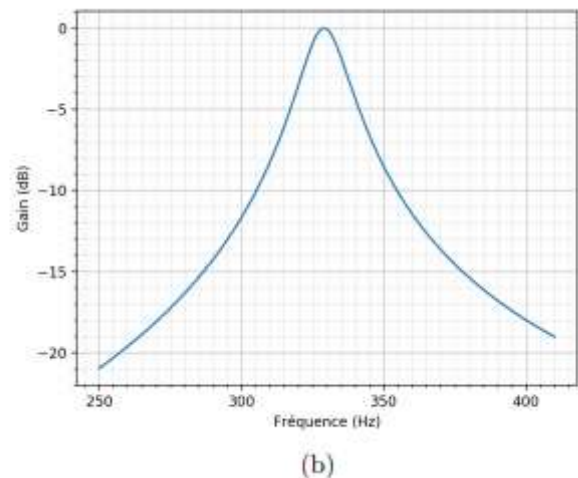
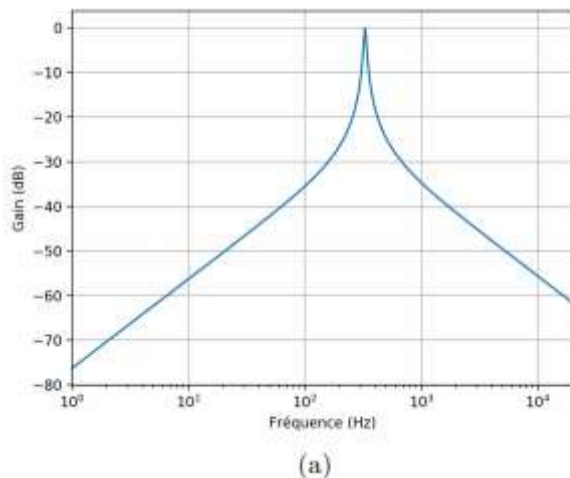
Tracer à l'aide de python $e(t)$ et $s(t)$.



7. Diagramme de Bode

On donne le diagramme de Bode en gain d'un même filtre tracé à deux échelles différentes :

1. Dire en le justifiant rapidement, de quel type de filtre il s'agit. Quelle est sa fréquence centrale caractéristique ?
2. Donner une estimation de sa bande-passante à -3 dB après l'avoir définie.
3. Evaluer le facteur de qualité de ce filtre. Peut-on dire que le filtre est très sélectif ?
4. Estimer, en le justifiant, de quel facteur est atténuée la composante spectrale fondamentale de valeur 315 Hz d'un signal en sortie de ce filtre.

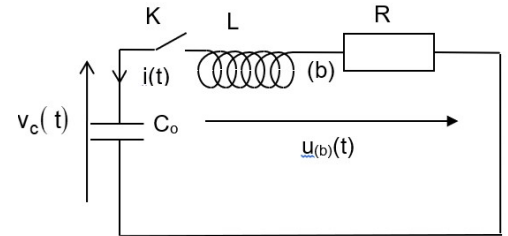


5. Tracer numériquement le diagramme de Bode de ce filtre à l'aide du script python « diag Bode ordre 2 universel » qui se trouve dans la partie cours du site, électrocinétique, révisions de première année, « annexe ». Vérifier graphiquement la valeur du gain pour 315 Hz, lire graphiquement la valeur du déphasage pour 315 Hz.

6. On suppose que $e(t) = E \cdot \cos(2\pi ft)$ avec $E = 1V$ et $f = 315 \text{ Hz}$. En déduire l'expression de $s(t)$ et les valeurs numériques caractéristiques. Tracer graphiquement, à l'aide de python, $e(t)$ et $s(t)$ sur le même graphique sur trois périodes.
7. On suppose que $e(t)$ est un signal carré d'amplitude $E = 1V$, de valeur moyenne $E_0 = 2V$ et de fréquence $f = 315 \text{ Hz}$. Représenter graphiquement $e(t)$. Prévoir la forme de $s(t)$ et le représenter graphiquement sur le graphe précédent. Utiliser le script python « Action ordre 2 sur carré » afin de vérifier vos prédictions.

8. Caractéristiques d'un système d'ordre 2

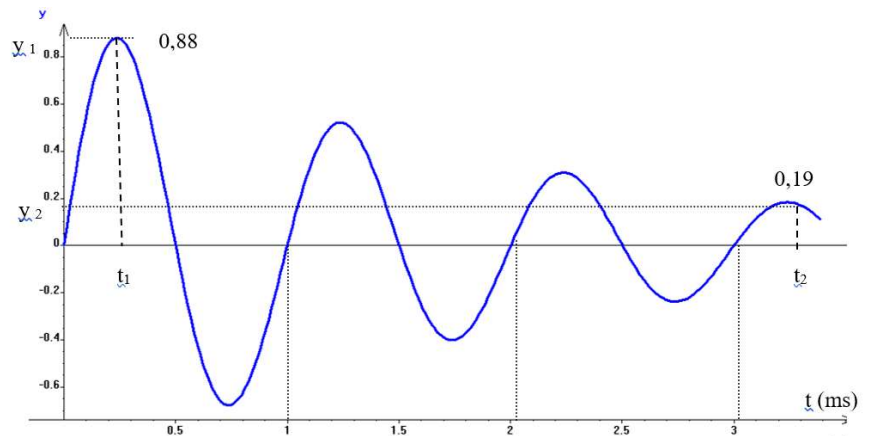
Une bobine réelle, en série avec un condensateur de capacité C_0 forme un circuit résonant, dont le modèle électrique est représenté ci-contre. A $t=0$ le condensateur est initialement chargé la tension à ses bornes vaut $v_c(0) = U_0$, et on ferme l'interrupteur.



- 1) Après avoir rappelé quelles sont les grandeurs électrocinétiques continues pour un condensateur et une bobine, déterminer $v_c(t=0^+)$ et $i(t=0^+)$. En déduire la valeur de la tension aux bornes de la bobine à l'instant $t = 0^+$.

Que deviennent ces valeurs lorsque le régime permanent est atteint ?

On a enregistré à l'aide d'un capteur numérique la courbe ci-contre.



- 2) Quelle est la grandeur mesurée ? (unité des ordonnées SI)

- 3) Etablir l'équation différentielle dont $i(t)$ est solution. On posera

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC_0}} \text{ et } m = \frac{R}{2L\omega_0}.$$

- 4) D'après la courbe précédente quelle condition a-t-on sur m ?

- 5) Déterminer un ordre de grandeur du facteur de qualité du montage.

- 6) On pose $\Omega = \omega_0 \sqrt{1 - m^2}$. Quel nom donne-t-on à cette grandeur ? Déterminer sa valeur numérique à l'aide de la courbe précédente.

- 7) Donner l'expression de $y(t)$ en fonction du produit $m\omega_0$ et de Ω .

- 8) Montrer comment la connaissance du rapport des amplitudes $y(t_1) = y_1$ et $y(t_2) = y_2$ permet de trouver la valeur du produit $m\omega_0$. AN

- 9) En déduire une expression de ω_0 en fonction du produit $m\omega_0$ et de Ω , puis calculer la valeur numérique de ω_0 .

- 10) On rappelle que $Q = 1/2m$. Calculer Q et comparer à la valeur estimée à la question 4.

- 11) Tracer cette courbe en utilisant un script python de résolution d'équations différentielles.

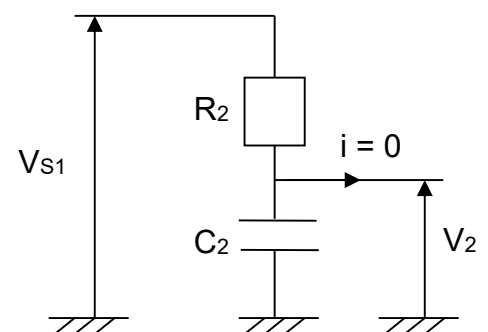
9. Stabilité d'un filtre

1. On considère le schéma ci-contre. On se place en régime sinusoïdal forcé. Montrer que la fonction de transfert est donnée par l'expression littérale suivante :

$$H_1 = \frac{V_2}{V_{S1}} = \frac{1}{1 + jR_2C_2\omega}$$

Déterminer la nature de ce filtre.

2. À partir de la fonction de transfert, déterminer l'équation différentielle reliant $V_2(t)$ à $V_{S1}(t)$.



3. Dans le cas où $V_{S1}(t) = V_{S10} \cdot \cos(\omega t)$, avec $V_{S10} > 0$, donner la forme générale de la solution $V_2(t)$ de l'équation précédente. On ne déterminera aucune des constantes d'intégration.
4. Donner deux arguments permettant de justifier la stabilité de ce système.

EXERCICES

I. Stratégies de charge d'un condensateur

Lorsqu'un condensateur est utilisé comme une batterie, la question de sa recharge se pose. L'énergie est prélevée sur le réseau électrique, et on souhaiterait que 100% de cette énergie soit transférée au condensateur.

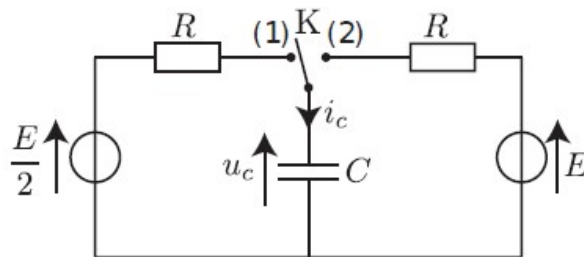
Nous allons montrer que ceci dépend de la stratégie de charge retenue.

On appelle "rendement de la charge du condensateur" le rapport entre l'énergie stockée par le condensateur à l'issue de la charge et de l'énergie fournie par le générateur au cours de cette charge :

$$\eta = \mathcal{E}_{\text{stockée}} / \mathcal{E}_{\text{fournie}}$$

De manière générale, la charge se fait à travers la résistance totale du circuit R . On note C la capacité du condensateur et E la tension finale à atteindre aux bornes du condensateur.

1. Montrer par des arguments dimensionnels que l'expression du rendement η ne peut pas dépendre des valeurs de R , C ou E . On fera l'hypothèse que η s'écrit sous la forme $\eta = E^\alpha R^\beta C^\gamma$ et on montrera que les exposants sont forcément nuls.



Premier procédé de charge :

L'interrupteur K est d'abord dans la position intermédiaire où il n'établit aucun contact.

Le condensateur étant initialement déchargé, on bascule l'interrupteur K dans la position (2) à $t = 0$.

2. Après avoir établi les expressions de $u_c(t)$ et $i_c(t)$, et avoir tracé graphiquement ces deux fonctions, calculer l'énergie électrique fournie par le générateur sur l'ensemble de la charge.
3. Quelle est la valeur du rendement de la charge avec la méthode envisagée ? Peut-il être optimisé en changeant la résistance R ?

Second procédé de charge :

On souhaite utiliser une méthode qui permet d'améliorer le rendement de la charge. On réalise une charge en deux temps. Le condensateur est initialement déchargé. L'interrupteur K est d'abord dans la position intermédiaire où il n'établit aucun contact. Puis il est fermé en position (1) à $t = 0$. Lorsque le régime transitoire qui s'ensuit est achevé, l'interrupteur est basculé en position (2).

4. Déterminer l'expression de $u_c(t)$ pendant la première phase de la charge.
5. Déterminer en fonction de R et de C l'expression de l'instant t_1 pour lequel la tension u_c aux bornes du condensateur atteint 99% de sa valeur finale au cours de cette première étape. Dans la suite, on considérera que la charge est totalement achevée à cet instant t_1 et qu'on passe en phase 2 (basculement de l'interrupteur en position (2)).

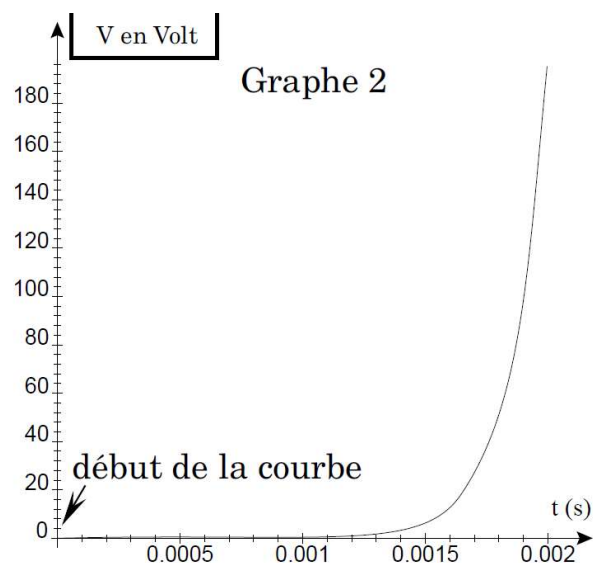
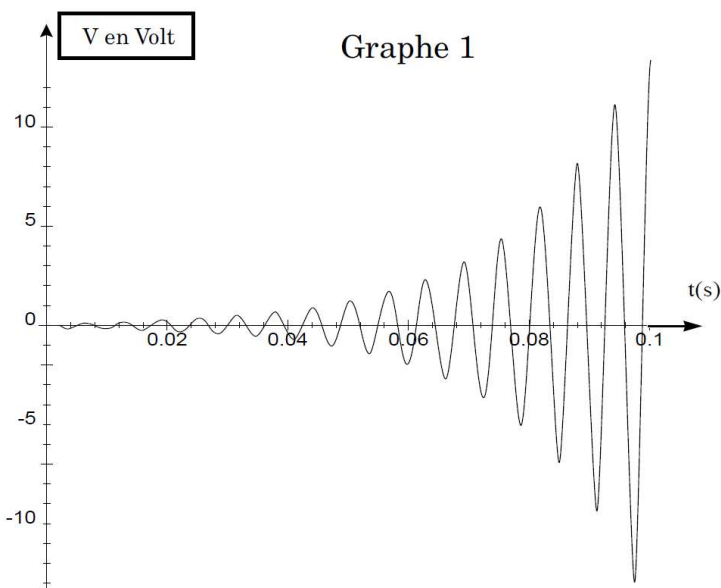
6. Exprimer la tension $u_c(t)$ aux bornes du condensateur au cours de la deuxième phase de charge, qui commence à l'instant t_1 .
7. Tracer l'allure de $u_c(t)$ en fonction du temps au cours de l'ensemble des deux phases de charge.
8. Exprimer l'intensité i_c qui traverse le condensateur pendant les deux phases de charge. On distinguera les cas en fonction de t .
9. Déterminer l'énergie électrique fournie par les deux générateurs pendant la charge.
10. En déduire le rendement pour cette nouvelle façon de procéder. Conclure quant aux avantages et désavantages par rapport à la première méthode. Proposer un moyen d'augmenter encore le rendement.

II. Etude d'une réponse temporelle

On considère une fonction du temps $V(t)$, solution de l'équation différentielle

$$\frac{d^2V}{dt^2} + b\omega \frac{dV}{dt} + \omega^2 V(t) = 0, \quad b \text{ et } \omega \text{ désignent des coefficients réels et constants, } \omega \text{ est positif.}$$

1. Quelles sont les dimensions de b et ω ?
2. Le graphe 1 représente la fonction en volt pour un couple de valeurs b et ω données.
 - a. Le système envisagé est-il stable ? Quel est le signe de b ? Quel est le signe du discriminant de l'équation caractéristique associée à cette équation différentielle ? Que vaut V à l'instant initial ?
 - b. On suppose que b^2 est négligeable devant l'unité. Donner les racines de l'équation caractéristique et en déduire l'expression de $V(t)$. On ne cherchera pas à évaluer les constantes.
 - c. Déterminer à l'aide du graphe la pseudopériode T des oscillations. En déduire une valeur approximative de ω .
 - d. En lisant les valeurs sur le graphique effectuer le rapport de $V(t) / V(t + NT)$ pour lesquelles l'amplitudes des oscillations est maximale, N est un entier. En déduire une valeur numérique de b et valider ou non l'hypothèse émise à la question 2.b.
3. Le graphe 2 représente la fonction en volt pour une seconde valeur du coefficient b , ω n'ayant pas été modifié. Caractériser brièvement l'allure de la courbe. Quel est le signe de b ? Quel est le signe du discriminant associé à l'équation différentielle ? quelle est la valeur de V à l'instant initial ?



III. Détermination des caractéristiques d'un filtre passe-bande

On note v_s la tension de sortie du filtre. Le filtre est un circuit linéaire dont la fonction de transfert s'écrit :

$$\underline{F}(j\omega) = \frac{v_s}{v_e} = \frac{F_o}{1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_o} - \frac{\omega_o}{\omega} \right)}$$

On se propose de déterminer les caractéristiques F_o , Q et ω_o du filtre à partir des oscillogrammes obtenus en régime périodique pour une tension d'entrée v_e rectangulaire pour deux valeurs de fréquences.

On rappelle la décomposition en série de Fourier de $v_e(t)$ dans le cas où $v_e(t)$ est périodique de période T avec :

$$\begin{aligned} \text{pour } 0 \leq t \leq T/2 & \quad v_e(t) = V_o \\ \text{pour } T/2 \leq t \leq T & \quad v_e(t) = 0 \end{aligned}$$

$$v_e(t) = V_o \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \sin((2k+1)\omega_1 t) \right) \text{ avec } \omega_1 = \frac{2\pi}{T}$$

Première expérience (oscillogramme de la figure 7):

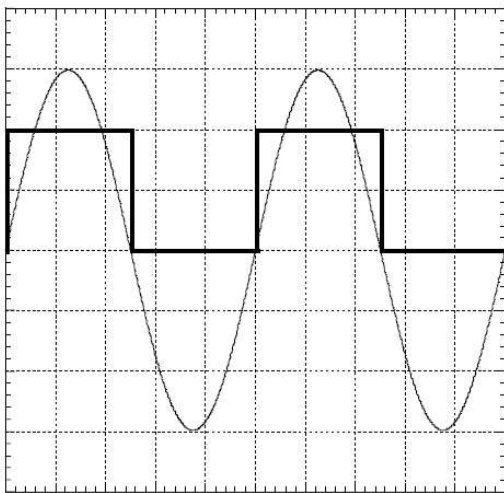


figure 7

- voies 1 et 2 en position DC
- base de temps : 50 µs par carreau
- sensibilités :
 - voie 1 (en gras) : 0,5 V par carreau
 - voie 2 : 2 V par carreau

Dans cette expérience :

- la tension v_s obtenue est quasi-sinususoïdale
- si on augmente la fréquence de v_e par rapport à la valeur correspondant à cet oscillogramme, on constate que l'amplitude de v_s diminue
- si, par rapport à cette même fréquence, on diminue légèrement la fréquence de v_e , on constate que l'amplitude de v_s diminue également.

Deuxième expérience (oscillogramme de la figure 8):

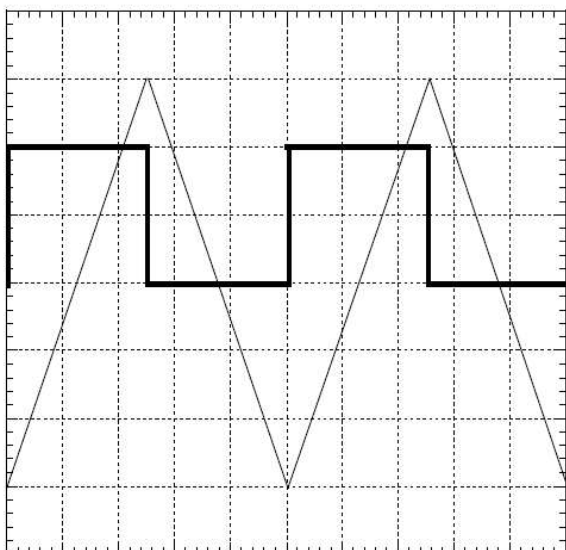


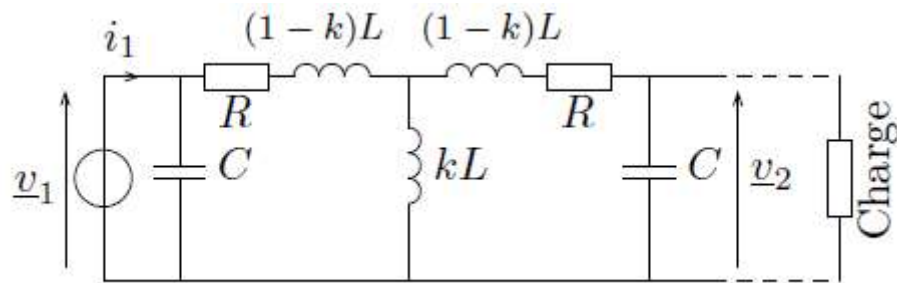
Figure 8

- voies 1 et 2 en position DC.
- base de temps : 5 µs par carreau
- sensibilités :
 - voie 1 (en gras) : 2 V par carreau
 - voie 2 : 0,2 V par carreau

Dans ce qui suit les mesures devront être faites avec soin (tous les résultats devront être obtenus avec une incertitude relative inférieure à 10 %).

1. Pourquoi, dans chaque expérience, la tension de sortie v_s ne comporte-t-elle pas de composante continue contrairement à la tension d'entrée v_e ?
2. Première expérience : pourquoi peut-on obtenir une tension de sortie v_s quasi-sinusoïdale alors que la tension v_e est rectangulaire ?
3. Dédire de l'oscillogramme de la première expérience et du commentaire qui l'accompagne la pulsation ω_0 et la valeur de F_0 .
Dans la deuxième expérience, v_s est triangulaire alors que v_e est rectangulaire. Le filtre a un comportement intégrateur.
4. Donner l'expression approchée de $F(j\omega)$ dans le domaine de fréquence correspondant à la deuxième expérience.
5. En utilisant l'oscillogramme de la deuxième expérience, déterminer, en justifiant précisément la méthode utilisée, le rapport $F_0 \omega_0 / Q$ (on se souviendra que la composante continue de v_e n'est pas intégrée). En déduire la valeur de Q .

IV. Etude expérimentale d'un circuit d'ordre 2



On considère le circuit électronique ci-dessus, dont on fournit la fonction de transfert complexe en sortie ouverte :

$$\underline{H} = \frac{v_2}{v_1} = \frac{j\omega Lk}{R + j\omega(L + R^2C) - 2\omega^2RLC + j\omega^3CL^2(k^2 - 1)}$$

où ω désigne

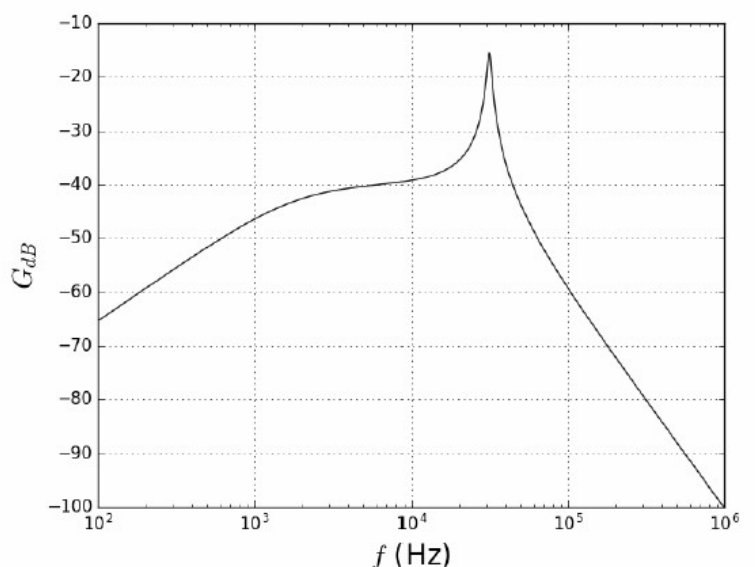
la pulsation.

On donne les valeurs numériques des composants : $R = 10 \, \Omega$, $L = 0,86 \, \text{mH}$, $C = 30 \, \text{nF}$.

1. Donner le schéma équivalent du circuit aux basses fréquences, et en déduire la valeur asymptotique de v_2 . Est-ce cohérent avec l'expression de $\underline{H}$?

En utilisant l'expression de la fonction de transfert, on trace, pour une valeur de $k = 0,01$ le diagramme de Bode de ce système représentant l'évolution du gain en décibels $G_{dB} = 20 \log |H|$ en fonction de la fréquence f (Figure 1)

2. Interpréter les comportements aux basses fréquences et hautes fréquences, en comparant les pentes des asymptotes (en dB/décade) mesurées sur le diagramme de Bode et celles déduites de l'expression de $\underline{H}$.



Dans le cadre des hypothèses $k \ll 1$ et $R \ll L\omega$ satisfaites expérimentalement on peut montrer que la fonction de transfert est approchée par :

$$\underline{H} \simeq \frac{k}{1 + j\omega RC - \omega^2 LC}$$

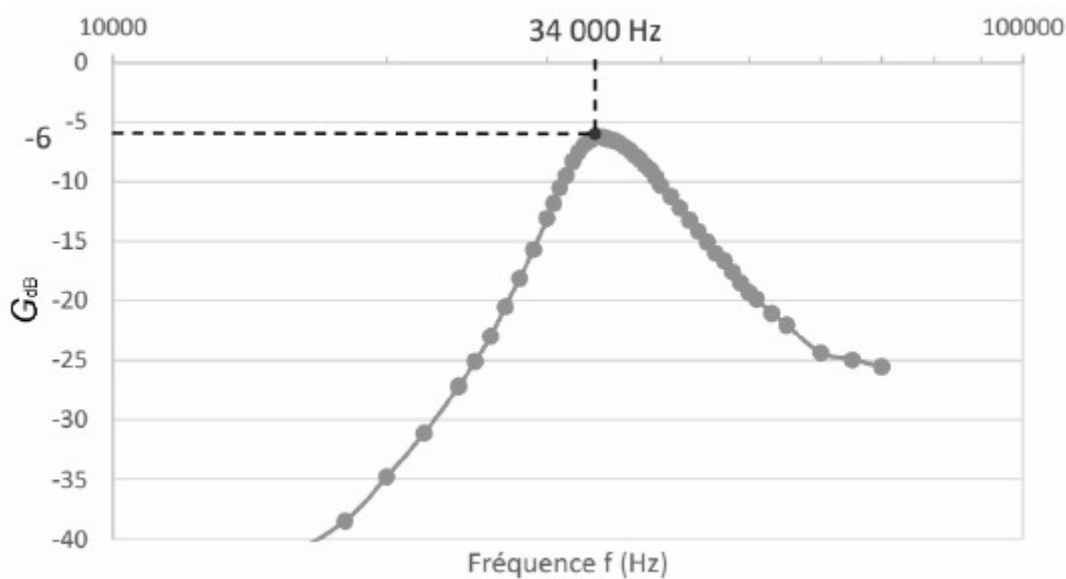
3. Mettre la fonction de transfert simplifiée sous la forme canonique suivante :

Identifier les paramètres H_0 , Q et ω_0 en fonction de k , R , L et C puis calculer leur valeur numérique. Quelle est la nature de ce filtre ?

$$\underline{H} = \frac{H_0}{1 + \frac{j}{Q} \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right) - \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2}$$

4. Déterminer l'expression de la fréquence de résonance du système f_r en fonction des paramètres du circuit puis la calculer numériquement. On posera $x = \omega/\omega_0$ dans un premier temps pour simplifier les calculs. La fréquence de résonance f_r dépend-elle de k ? Est-il possible d'assimiler f_r et f_0 ?

Le tracé expérimental du diagramme de Bode en gain donne la courbe ci-dessous :



5. Comparer la fréquence de résonance expérimentale à la prédiction théorique de la question 4.
6. En analysant le diagramme de Bode en gain expérimental, déterminer la valeur de k . L'hypothèse $k \ll 1$ est-elle validée ?
7. En détaillant votre méthode, estimer la valeur du facteur de qualité Q et la comparer à la valeur obtenue à la question 3.