

D1 Bon travail, très bien rédigé

Exercices

I. Stratégies de charge d'un condensateur

Q1: on pose $\eta = E^\alpha R^\beta C^\gamma$. Montrons que $\alpha, \beta, \gamma = 0$

THEVASAGAYATHIPUAI
Christyna
CHOUITA
Meissa
CHARRIER-KUTYLA
Arwen

$$[\eta] = 1$$

$$[R] = V \cdot A^{-1}$$

$$[E] = V$$

$$[C] = A \cdot s \cdot V^{-1}$$

) à justifier. $\alpha = C \frac{dq}{dt}$ du premier exemple.

$$\text{dnc } E^\alpha R^\beta C^\gamma = V^\alpha (V \cdot A^{-1})^\beta (A \cdot s \cdot V^{-1})^\gamma$$

$$= V^{\alpha+\beta-\gamma} A^{-\beta+\gamma} s^{-\gamma}$$

En résolvant le système :

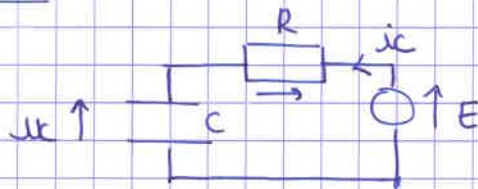
$$\begin{cases} s^{-\gamma} = 1 \\ A^{-\beta+\gamma} = 1 \\ V^{\alpha+\beta-\gamma} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \gamma = 0 \\ \gamma = \beta = 0 \\ \alpha = 0 \end{cases}$$

[ainsi η ne peut pas dépendre des valeurs de R, C ou E puisque $\alpha, \beta, \gamma = 0$]

B

• Premier procédé de charge :

à $t=0$:



Q2: D'après les lois du condensateur: $q = C u_c(t)$ et $i_c(t) = \frac{dq}{dt}$

D'après la loi des mailles :

$$u_c + R i_c = E$$

$$\Leftrightarrow u_c + R \frac{du_c}{dt} = E$$

$$\Leftrightarrow \frac{du_c}{dt} + \frac{1}{RC} u_c = \frac{1}{RC} E$$

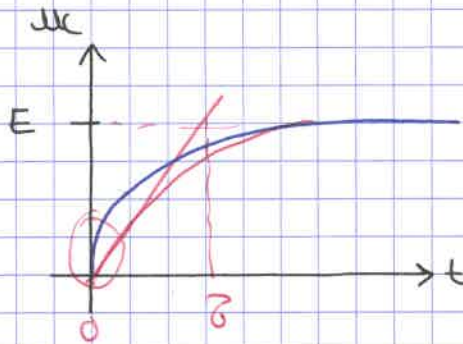
$$\Leftrightarrow \left[\frac{du_c}{dt} + \frac{u_c}{\tau} = \frac{E}{\tau} \right] \text{ où } \tau = RC$$

la solution s'écrit sous la forme: $u_c(t) = Ae^{-t/\tau} + E$

or u_c est continue donc $u_c(0^-) = u_c(0^+) = A + E = 0$

$$\Leftrightarrow A = -E$$

ainsi $u_c(t) = E(1 - e^{-t/\tau})$



la tangente à l'origine n'est pas verticale.

• D'après la loi des mailles: (oui, on peut aussi obtenir $i_c = C \frac{du_c}{dt}$)

$$u_c + Ri_c = E$$

$$\Leftrightarrow 0 = \frac{i_c}{C} + R \frac{di_c}{dt}$$

$$\Leftrightarrow \frac{di_c}{dt} + \frac{i_c}{RC} = 0 \quad \Leftrightarrow \left[\frac{di_c}{dt} + \frac{i_c}{\tau} = 0 \right]$$

à $t=0^-$: $Ri_c(0^-) = E$

$$\Leftrightarrow i_c(0^-) = \frac{E}{R}$$

i_c est continue donc $i_c(0^-) = i_c(0^+) = A = \frac{E}{R}$

ainsi $i_c(t) = \frac{E}{R} e^{-t/\tau}$



Q3: On calcule le rendement $\eta = \frac{\text{Estoclee}}{\text{Efournie}}$

• $E_{\text{fournie}} = \int_0^{+\infty} E i dt = \frac{E^2}{R} \int_0^{+\infty} e^{-t/\tau} dt = \left[-\frac{E^2}{R} e^{-t/\tau} \right]_0^{+\infty}$
par le générateur

$= CE^2$

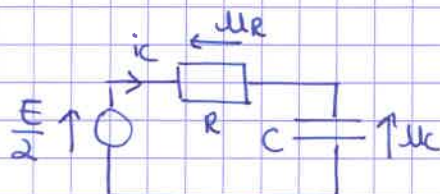
• $E_{\text{stockee}} = \frac{1}{2} C U_C(\infty)^2 = \frac{1}{2} CE^2$

ainsi $\eta_1 = \frac{CE^2}{2CE^2} = \frac{1}{2} = 50\%$

Le rendement ne dépend pas de la résistance R donc il ne peut pas être optimisé par R .

B

• Second procédé de charge:



Q4: d'après la loi des mailles:

$$\frac{E}{2} = U_R + U_C$$

$$\Leftrightarrow \frac{E}{2} = RC \frac{dU_C}{dt} + U_C$$

$$\Leftrightarrow \frac{dU_C}{dt} + \frac{U_C}{RC} = \frac{E}{2RC}$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{dU_C}{dt} + \frac{U_C}{\tau} = \frac{E}{2\tau} \right] \text{ où } \tau = RC$$

on n'est pas obligé de tout refaire, on peut procéder par analogie à partir des résultats de la question précédente.

la solution est de la forme: $U_C(t) = A e^{-t/\tau} + \frac{E}{2}$

d'après les conditions initiales, $U_C(0^-) = 0$

or U_C est continue donc $U_C(0^-) = U_C(0^+) = \frac{E}{2} + A = 0 \Leftrightarrow A = -\frac{E}{2}$

ainsi $u_c(t) = \frac{E}{2}(1 - e^{-t/\tau})$

Q5: d'après l'énoncé: $u_c(t_1) = 0,99 \times \frac{E}{2}$ ✓

$$\Leftrightarrow \frac{E}{2}(1 - e^{-t_1/\tau}) = 0,99 \times \frac{E}{2}$$

$$\Leftrightarrow 1 - e^{-t_1/\tau} = 0,99$$

$$\Leftrightarrow e^{-t_1/\tau} = 1 - 0,99$$

$$\Leftrightarrow -\frac{t_1}{\tau} = \ln(1 - 0,99)$$

$$\Leftrightarrow t_1 = \tau \ln(100)$$

$$\Leftrightarrow t_1 = \tau \ln(100) = 4,6 \tau$$

Q6: En avait: $\frac{du_c}{dt} + \frac{u_c}{\tau} = \frac{E}{\tau}$

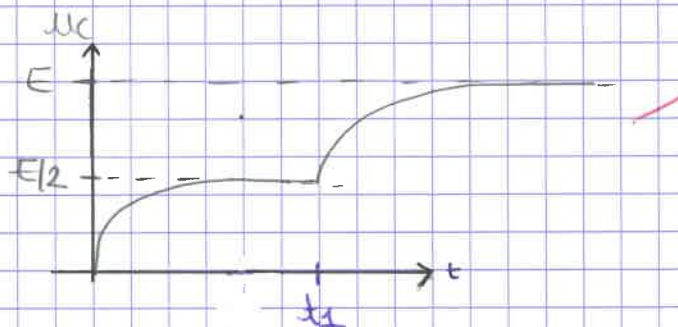
la solution est de la forme: $u_c(t) = Ae^{-(t-t_1)/\tau} + E$

or d'après la condition initiale: $u_c(t_1) = \frac{E}{2} = A + E$

$$\Leftrightarrow A = -\frac{E}{2}$$

donc $u_c(t) = E - \frac{E}{2}e^{-(t-t_1)/\tau}$ par $t \geq t_1$

Q7: $u_c(t) = E(1 - \frac{1}{2}e^{-(t-t_1)/\tau})$ par $t \geq t_1$



Q8: Pour $0 \leq t < t_1$: $i_c(t) = \frac{E}{2R} e^{-t/\tau}$

Pour $t \geq t_1$:

Par analogie: $i_c(t) = \frac{E}{2R} e^{-(t-t_1)/\tau}$

Christyna
Meissa
Arwen

Non chaque phase a sa propre valeur de i_c pas d'addition.
Ainsi, pendant les deux phases:

$$i_c(t) = \frac{E}{2R} e^{-t/\tau} + \frac{E}{R} e^{-t/\tau} = \frac{3E}{2R} e^{-t/\tau}$$

l'énergie.
Q9: la charge apportée en phase 1 est de: $0 \leq t < t_1$

$$\cdot E_1 = \int_0^{t_1} \frac{E}{2} i(t) dt = \frac{E}{2} \int_0^{t_1} i(t) dt = \frac{E}{2} \int_0^{t_1} dq$$

$$= \frac{E}{2} [q(t)]_0^{t_1} = \frac{E}{2} \times \frac{CE}{2} = \frac{CE^2}{4}$$

oui, bonne méthode, mais à expliquer l'énergie

la charge apportée en phase 2 est de:

$t \geq t_1$:

$$\begin{aligned} E_2 &= \int_{t_1}^{\infty} E i(t) dt = E \int_{t_1}^{\infty} i(t) dt = E [q(t)]_{t_1}^{\infty} \\ &= E \left(CE - \frac{CE}{2} \right) = E \times \frac{CE}{2} = \frac{CE^2}{2} \end{aligned}$$

ou $q(t_1) = C u_c(t_1)$
 $q(t \rightarrow \infty) = C u_c(t \rightarrow \infty) = CE$

ainsi l'énergie électrique fournie est de:

$$E_{fournie} = E_1 + E_2 = \frac{CE^2}{4} + \frac{CE^2}{2} = \frac{3CE^2}{4}$$

Q10: le rendement est de

$$\eta_2 = \frac{\frac{1}{2} CE^2}{\frac{3CE^2}{4}} = \frac{2}{3} = 66,7\%$$

Pour ces avantages, le rendement est meilleur avec la deuxième méthode que la première.

$$\eta_1 = 50\% < \eta_2 = 66,7\%$$

Quand aux inconvénients, la charge est plus longue puisqu'il faut attendre t_1 avant de basculer l'interrupteur vers d'autre position.

↳ Ceci et cela nécessite davantage de mise en oeuvre.

↳ on peut encore augmenter le rendement en augmentant le nombre de circuits de charge.

Exercice II : Étude d'une réponse temporelle

$$1) \underbrace{\frac{d^2 V}{dt^2}}_{V \cdot s^{-2}} + b \omega \underbrace{\frac{dV}{dt}}_{V \cdot s^{-1}} + \omega^2 \underbrace{V(t)}_V = 0$$

Donc ω^2 en s^{-2}
 et $b\omega$ en s^{-1}

donc ω en s^{-1}
 donc b sans dimension

→ car l'amplitude des oscillations augmente

2) a) Le système est instable, on en déduit que $b < 0$

eq caractéristique: $x^2 + b\omega x + \omega^2 = 0$

$$\Delta = (b\omega)^2 - 4\omega^2 = \omega^2 (b^2 - 4) < 0$$

$V(t=0) = 0$ par lecture graphique ↳ car régime pseudo-périodique

$$b) \Delta = -4\omega^2 < 0$$

car $b^2 < 4$

2 racines complexes:

$$-\frac{b\omega}{2} \pm \frac{\sqrt{4\omega^2}}{2} i = -\frac{b\omega}{2} \pm i\omega$$

$$V(t) = (A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)) e^{-\frac{b\omega}{2} t}$$

De plus, $V(t=0) = 0$ donc $A = 0$

Ainsi:

$$V(t) = B \sin(\omega t) e^{-\frac{b\omega}{2} t}$$

$$c) T = \frac{2\pi}{\omega} = 6,67 \cdot 10^{-3} s$$

expliquez comment vous obtenez cette valeur.

↳ 3 CS?? c'est top.

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 9,57 \cdot 10^2 s^{-1}$$

d) On lit avec les deux derniers maximums :

$$\frac{V(t)}{V(t+NT)} = \frac{8,5}{11} \quad N=1$$

$$\text{or } \frac{V(t)}{V(t+NT)} = \frac{B \sin(\omega t) e^{-\frac{b\omega}{2}t}}{B \sin(\omega(t+T)) e^{-\frac{b\omega}{2}(t+T)}}$$

$$= \frac{\sin(\omega t)}{\sin(\omega(t+T))} e^{\frac{b\omega}{2}T}$$

car $\sin$ est T -périodique

$$\text{donc } \frac{V(t)}{V(t+NT)} = e^{\frac{b\omega}{2}T} = e^{b\pi}$$

$$\text{Ainsi } \frac{8,5}{11} = e^{b\pi}$$

$$\text{donc } b = \frac{\ln \frac{8,5}{11}}{\pi} = -8,2 \cdot 10^{-2} \ll -1$$

cohérent avec l'hypothèse

3) Cette courbe est exponentielle.

On n'observe pas d'oscillations donc $\Delta > 0$ ✓

et donc $b > 2 > 0$ ✓

On lit graphiquement $V(t=0) = 0$ ✓

d'où

$$b < -2$$

(non b est toujours négatif car le système est instable)

$$V(t) = A e^{r_1 t} + B e^{r_2 t}$$

$$\text{avec } r_{1/2} = -\frac{b\omega}{2} \pm \omega \sqrt{b^2 - 4}$$

Exercice III

Alexis, Isaac, Quentin

① C'est un filtre passe-bande donc il coupe la composante continue, de plus $v_s(t)$ oscille autour de 0 il n'y a bien vraiment pas de composante continue

② Les courbes $v_s(t)$ et $v_e(t)$ sont en phase, de même fréquence le filtre passe-bande coupe la composante continue et les suivantes sauf la fondamentale.
 $\rightarrow$ car $v_e(t)$ est décomposé en série de Fourier.

③ On mesure $T_1 = 5 \times 50 \times 10^{-6} \text{ s} = 250 \times 10^{-6} \text{ s}$
 comme le texte admet que l'amplitude de v_s diminue si la fréquence augmente ou diminue alors on peut faire l'approximation que $\omega_1 = \omega_0$
 Ainsi $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_1} = 8000\pi \text{ rad.s}^{-1} = 2.5 \cdot 10^4 \text{ rad.s}^{-1}$

Et on a que $\frac{v_s}{v_e} = F_0 \Leftrightarrow \frac{v_{s\max}}{v_{e,1}} = F_0$ à la résonance $\omega = \omega_0$

ici $v_{e,1} = v_0 \left(\frac{2}{\pi} \sin(\omega_1 t) \right)$
 (pour $k=0$) $= \frac{2v_0}{\pi} \sin(\omega_1 t)$

De même on mesure

$$v_{s\max} = 0,5 \text{ V}$$

$$F_0 = \frac{6}{\frac{2v_0}{\pi}} = \frac{3\pi}{v_0} = 3\pi = 9,4$$

avec $v_0 = 1 \text{ V}$
 car $v_0/2 =$ valeur moyenne du cosinus $= 0,5 \text{ V}$

④ Dans la deuxième expérience la fréquence f_2 est très supérieure à celle de résonance $\omega \gg \omega_0$

$$F(j\omega) \sim -j \frac{F_0 \omega_0}{Q \omega} \quad \text{car } F_0 > 0$$

car $T_2 = 25 \mu\text{s}$
 et $f_2 = 10 f_0$

⑤

$$\frac{F_0 \omega_0}{Q} \times \frac{1}{j\omega} = F(j\omega) = \frac{v_s}{v_e}$$

$$\frac{v_e F_0 \omega_0}{Q} = j\omega v_0$$

ici la rampe $\Delta v = 1,2 \text{ V}$ et $\Delta t = 12,5 \mu\text{s}$

$$\text{Donc on a } \frac{dv_s(t)}{dt} = \frac{F_0 \omega_0}{Q} (v_e(t) - \langle v_e \rangle)$$

car le filtre coupe la composante continue

Ainsi $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f_0 \omega_0}{Q} \left(V_0 - \frac{V_0}{2} \right) = \frac{f_0 \omega_0 V_0}{2Q}$

$\Leftrightarrow \frac{\frac{\Delta s}{\Delta t}}{f_0 \omega_0 V_0} = \frac{1}{2Q}$ avec $V_0 = \cancel{1V} 2V$ (l'amplitude de $v_c(t)$ a été modifiée)

$\Leftrightarrow 2Q = \frac{f_0 \omega_0 V_0}{\frac{\Delta s}{\Delta t}} \Leftrightarrow Q = \frac{f_0 \omega_0 V_0}{2 \frac{\Delta s}{\Delta t}}$

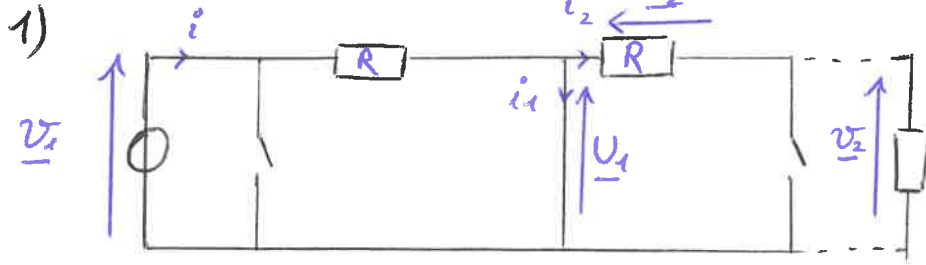
Application numérique: $Q = \cancel{1,23} = 2,5$
 $= \frac{3\pi \times 8000\pi}{2 \times 1,2} \times 2$
 $12,5.656$

écrire l'expression numérique avant AN.

⚠ Vous ne pouvez pas supprimer V_0 de l'expression littérale car la relation n'est plus homogène

Exercice IV

Mamadou THIAM
Xander DOTT



$i_2 = 0$ car le circuit est ouvert
à fréquence nulle
 $C = \text{interrupteur ouvert}$

D'après la loi des mailles : $U_1 + U_2 + v_2 = 0 \Rightarrow v_2 = 0$ car $U_2 = Ri_2 = 0$ et $U_1 = 0$

En basse fréquence

$$H \sim \frac{j\omega Lk}{R} \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} 0 \quad \text{Le résultat est donc cohérent.}$$

2) On observe sur le graphe :

- une pente de 20 dB/dec en basse fréquence
- une pente de -40 dB/dec en haute fréquence
- En basse fréquence :

$$H(\omega) = \frac{j\omega Lk}{R} \quad G(\omega) = \frac{\omega Lk}{R}$$

$$G_{dB} = 20 \log\left(\frac{\omega Lk}{R}\right) = \underbrace{20 \log(\omega)}_{\text{pente}} + \underbrace{20 \log\left(\frac{Lk}{R}\right)}_{\text{constante}}$$

• En haute fréquence :

$$H(\omega) = \frac{j\omega Lk}{j\omega^3 CL^2(k^2 - 1)} = \frac{k}{\omega^2 CL(k^2 - 1)} \quad G(\omega) = \frac{k}{\omega^2 CL(k^2 - 1)}$$

$$\begin{aligned} G_{dB} &= 20 \log\left(\frac{k}{\omega^2 CL(k^2 - 1)}\right) = 20 \log\left(\frac{k}{CL(k^2 - 1)}\right) - 20 \log(\omega^2) \\ &= \underbrace{20 \log\left(\frac{k}{CL(k^2 - 1)}\right)}_{\text{constante}} - \underbrace{40 \log(\omega)}_{\text{pente}} \end{aligned}$$

Les résultats obtenus sont cohérents

3)

$$H(\omega) = \frac{k}{1 + j\omega RC - \omega^2 LC} = \frac{H_0}{1 + j\frac{\omega}{Q} - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

Par identification :

$$\frac{1}{\omega_0^2} = LC \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \checkmark$$

$$H_0 = k \quad \checkmark$$

$$RC = \frac{1}{Q\omega_0} \Rightarrow Q = \frac{\sqrt{LC}}{RC} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \quad \checkmark$$

A.N. : $Q = \frac{1}{10} \sqrt{\frac{0,86 \cdot 10^{-3}}{30 \cdot 10^{-9}}} \approx 17$ $H_0 = 0,04 = \underline{4}$

$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{30 \cdot 10^{-9} \times 0,86 \cdot 10^{-3}}} \approx 2,0 \cdot 10^5 \text{ rad.s}^{-1}$

D'après la forme canonique de la fonction de transfert il s'agit d'un filtre passe bas d'ordre 2.

4) Par définition $G(\omega_r) = G_{\max}$

$\underline{H} = \frac{k}{1 + j\omega RC - \omega^2 LC}$ $G = |\underline{H}| = \frac{k}{\sqrt{(1 - (\frac{\omega}{\omega_0})^2)^2 + (\frac{\omega}{Q\omega_0})^2}}$

posons $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ G est maximal lorsque son dénominateur est minimal.

On cherche $(1 - x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2} = 0 \Leftrightarrow x^4 + x^2(\frac{1}{Q^2} - 2) + 1 = 0$

posons $X = x^2$

$\Leftrightarrow X^2 + X(\frac{1}{Q^2} - 2) + 1 = 0$ on dérive donc $2X + (\frac{1}{Q^2} - 2) = 0$

Ainsi $X = 1 - \frac{1}{2Q^2}$ et $x = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} \approx 1$ car $Q = 17$

Alors $\frac{\omega_r}{\omega_0} = \frac{f_r}{f_0} \approx 1 \Rightarrow f_r \approx f_0$

De plus f_r ne dépend pas de k et on peut assimiler f_r à f_0

5) $f_r = \frac{\omega_r}{2\pi} \approx \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{2 \cdot 10^5}{2\pi} \approx 3,2 \cdot 10^4 \text{ Hz} \approx 3,4 \cdot 10^4 \text{ Hz}$ qui est la valeur lue sur le diagramme de Bode
 Δ unités.

6) On se place à la résonance ($\omega = \omega_0$)

On lit sur le tracé $G_{dB}(\omega_0) = -6 = 20 \log(G(\omega_0))$

$\Rightarrow G(\omega_0) = 10^{\frac{-6}{20}} = QH_0 = Qk$

$\Rightarrow k = \frac{10^{\frac{-6}{20}}}{Q} \approx \frac{10^{\frac{-6}{20}}}{17} \approx 3 \cdot 10^{-2} \ll 1$

l'hypothèse $k \ll 1$ est validée

7) Pour estimer Q on a la formule $Q \approx \frac{f_0}{\Delta f}$

où Δf désigne la bande passante

telle que $G_{dB} = G_{dB, \max} - 3 \text{ dB}$ On détermine donc Δf en traçant un diagramme de Bode.

Comment?
script python
dans le réseaux

Sur le diagramme de Bode, on lit

$$f_1 = 31\,000 \text{ Hz} \quad \text{et} \quad f_2 = 38\,000 \text{ Hz}$$

$$\text{Ainsi } Q \approx \frac{f_0}{f_2 - f_1} = \frac{34\,000}{7\,000} = 4,8 \approx 5 < 10$$

Soit il existe une erreur de lecture du diagramme de Bode
soit l'approximation est très large.

→ calcul analytique possible, mais petit.