

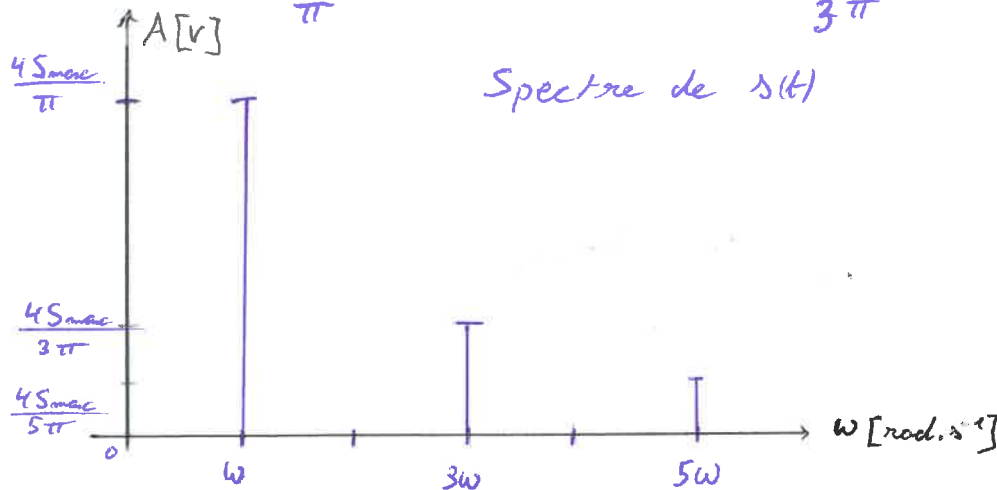
Exercice II :

1. D'après la représentation de $s(t)$, le signal n'a pas de valeur moyenne, donc $V_{\text{moy}} = 0$ ✓
Ainsi la constante a_0 sera nulle car elle représente la valeur moyenne. ✓

2. Le signal carré est impair

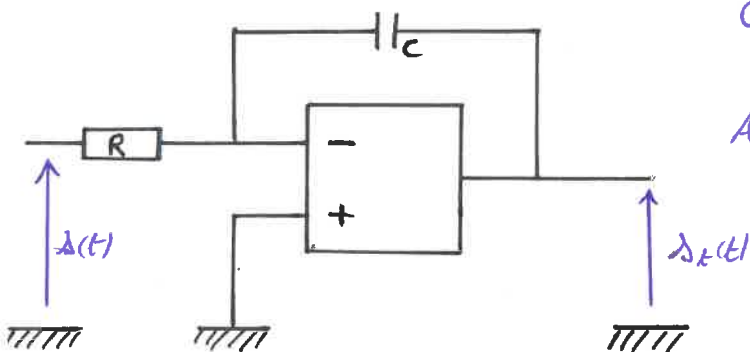
On la fonction cosinus est paire et sinus est impaire
Pour former un signal impair, on somme des fonctions impaires (sinus ici). Ainsi $a_n = 0$ ✓

3. $s(t) = 0 + \frac{2 S_{\text{max}}}{\pi} \cdot 2 \cdot \sin(\omega t) - 0 + \frac{4 S_{\text{max}}}{3\pi} \sin(3\omega t) + \frac{4 S_{\text{max}}}{5\pi} \sin(5\omega t)$ ✓



4

On cherche à intégrer un signal, on utilise donc un montage Ali intégrateur.



On a donc $s_k(t) = -\frac{1}{RC} \int s(t) dt$

Ainsi $\frac{ds_k(t)}{dt} = -\frac{1}{RC} s(t) = \frac{2 S_{\text{max}}}{\frac{T}{2}}$

On $s(t) = \pm 5V$

Pente de $s_k(t)$ sur la représentation

On a pour $t \in [0; \frac{T}{2}]$: $-\frac{5}{RC} = \frac{4 S_{\text{max}}}{T} = \frac{4 S_{\text{max}}}{10^{-3}} = 4 S_{\text{max}} \cdot 10^3$

Car la période se conserve par intégration

$$RC = \frac{-5 \cdot 10^{-3}}{4 S_{\text{max}}}$$

En posant R ou C on obtient donc la valeur de l'inconnue ✓

5.

$$\text{On a } s_f(t) = -\frac{1}{RC} \int s(t) dt$$

On intègre terme à terme $s(t)$

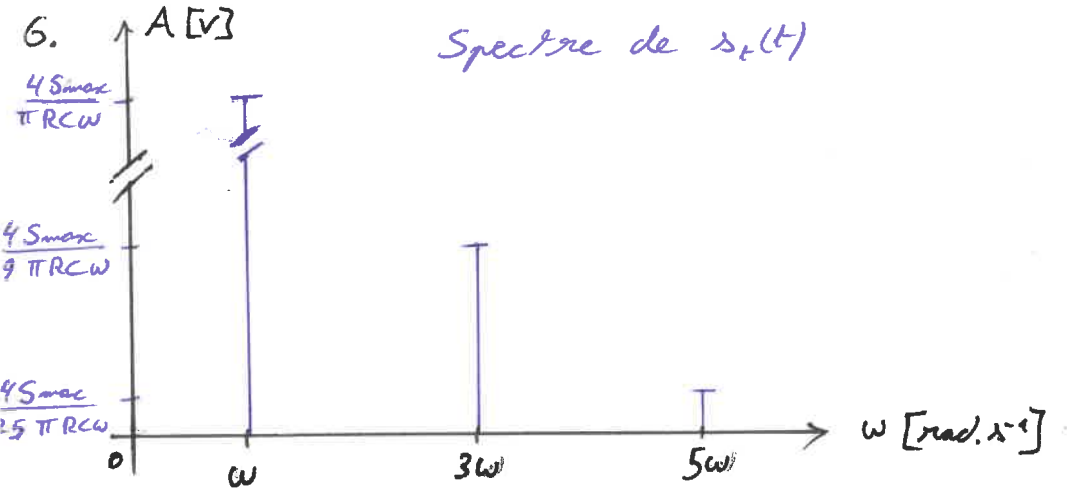
$$\int s(t) dt = -\frac{4 S_{\max}}{\pi} \times \frac{\cos(\omega t)}{\omega} - \frac{4 S_{\max}}{3\pi} \cdot \frac{\cos(3\omega t)}{3\omega}$$

$$\text{Donc } s_f(t) = -\frac{1}{RC} \left(\frac{4 S_{\max}}{\omega\pi} \cos(\omega t) + \frac{4 S_{\max}}{3^2 \omega\pi} \cos(3\omega t) \right)$$

Alors

$$s_f(t) = -\frac{2 S_{\max}}{\pi \omega RC} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\cos(n\omega t)}{n^2} \cdot 1 - (-1)^n \right)$$

6.



7.

On veut donc effectuer une décomposition en spectre de Fourier d'un signal avec $f_0 = 100 \text{ Hz}$ /

L'harmonique de rang 7 aura pour fréquence $f_7 = 7f_0 = 700 \text{ Hz}$ /

D'après le critère de Shannon on veut $2f_7 < f_c$ /

$$2f_7 = 1400 \text{ Hz} < f_c \quad \text{Posons } f_c = 10^4 \text{ Hz} /$$

On veut un nombre entier de périodes :

$$T_7 = \frac{1}{f_7} = \frac{1}{7} \cdot 10^{-2} \text{ s} \quad \text{On choisit } 7 \text{ périodes donc } \Delta t = 10^{-2} \text{ s}$$

$$f_c = 10^4 \text{ Hz} \Rightarrow T_c = 10^{-4} \text{ s}$$

On note N le nombre de points, on a

$$N = \frac{\Delta t}{T_c} = 7 \cdot 10^{-2} \cdot 10^4 = 7 \cdot 10^2 \text{ points}$$

On aura donc :

$$\Delta t = 7 \cdot 10^{-2} \text{ s} ; T_c = 10^{-4} \text{ s} ; N = 700$$

$$T_{\text{acq}} = 7 T_1 = \frac{7}{f_1} = 7 \times 10^{-2} \text{ s}$$

$$T_{\text{acq}} = 70 \text{ ms}$$

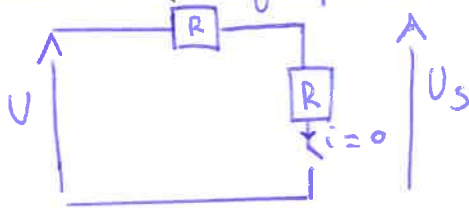
Ex 3

1) On souhaite éliminer les fréquences supérieures à 1 Hz. On cherche alors à obtenir un passe-bas.

- Filter A: Il s'agit d'un filtre de Wien, c'est-à-dire un passe-bande d'ordre 2.

- Filter B:

* En Basse fréquence:

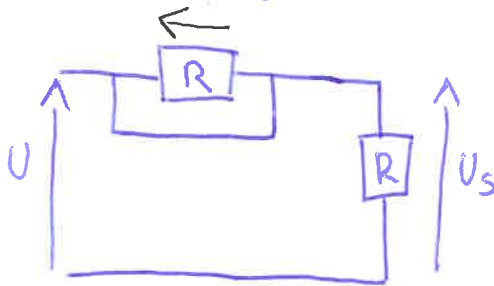


Grâce à une loi des mailles:

$$U = R i + U_s$$

d'où $\underline{H} = 1$

* En Haute fréquence:



De même, on établit que:

$$U_n = 0$$

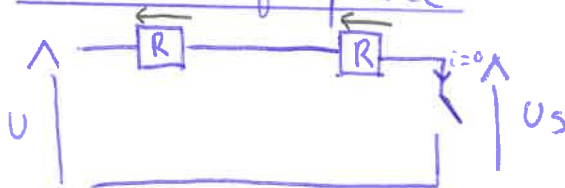
$$U - U_n - U_s = 0 \Rightarrow U = U_s$$

d'où $\underline{H} = 1$

Ainsi, le filtre B est un passe bande d'ordre 2 également.

- Filter C:

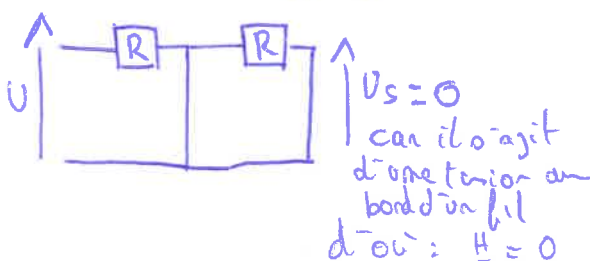
* En basse fréquence:



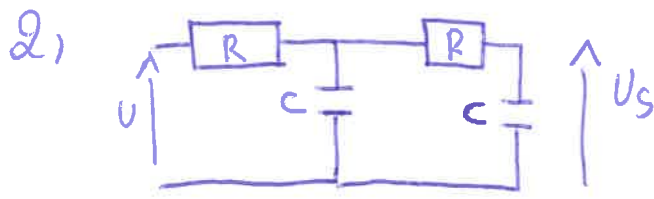
$$\text{d'où: } U = 2Ri + U_s \Rightarrow U = U_s$$

$\underline{H} = 1$

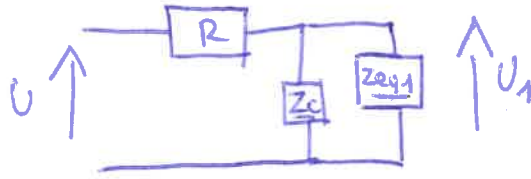
* En Haute fréquence:



Ainsi, après analyse des comportements en haute et basse fréquence, le filtre C est un passe bas

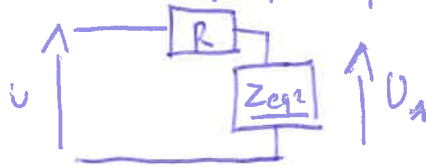


Puisque R et C sont en série, le filtre C part de l'entrée :



avec $\underline{Z_{eq1}} = R + \underline{Z_c} = R + \frac{1}{j\omega C}$
 où $U_s = \frac{\underline{Z_c}}{R + \underline{Z_c}} U_1$

De même, puisque $\underline{Z_{eq1}}$ et $\underline{Z_c}$ sont en parallèle :



avec $\frac{1}{\underline{Z_{eq2}}} = \frac{1}{\underline{Z_c}} + \frac{1}{\underline{Z_{eq1}}}$

À l'aide d'un pont diviseur de tension, on a :

$$U_1 = \frac{\underline{Z_{eq2}}}{R + \underline{Z_{eq2}}} U = \frac{1}{1 + \frac{R}{\underline{Z_{eq2}}}}$$

d'où : $\underline{H_F(j\omega)} = \frac{U_s}{U} = \frac{\underline{Z_c}}{R + \underline{Z_c}} \times \frac{\underline{Z_{eq2}}}{R + \underline{Z_{eq2}}}$

$$= \frac{1}{\left(1 + \frac{R}{\underline{Z_c}}\right)} \frac{1}{\left(1 + \frac{R}{\underline{Z_{eq2}}}\right)} = \frac{1}{1 + \frac{R}{\underline{Z_{eq2}}} + \frac{R}{\underline{Z_c}} + \frac{R^2}{\underline{Z_c} \cdot \underline{Z_{eq2}}}}$$

En régime
fréquentiel :

$$= \frac{1}{1 + R\left(j\omega C + \frac{j\omega C}{Rj\omega C + 1}\right) + Rj\omega C + R^2j\omega C\left(j\omega C + \frac{j\omega C}{Rj\omega C + 1}\right)}$$

$$= \frac{1}{1 + 2Rj\omega C + \frac{Rj\omega C + (Rj\omega C)^2}{Rj\omega C + 1} + (Rj\omega C)^2}$$

$$= \frac{1}{1 + 2Rj\omega C + (Rj\omega C)^2 + Rj\omega C \left(\frac{1 + Rj\omega C}{1 + Rj\omega C}\right)}$$

d'où : $\underline{H_F(j\omega)} = \frac{1}{1 + 3Rj\omega C + (Rj\omega C)^2}$

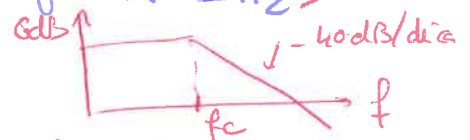
Q3, La forme canonique d'un passe-bas d'ordre 2,

$$H_F(j\omega) = \frac{H_0}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0 Q} + \left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right)^2} \quad \text{Par identification:}$$

$$\begin{cases} H_0 = 1 \\ \frac{1}{\omega_0} = RC \end{cases} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\omega_0 Q} = 3RC$$

On souhaite supprimer les fréquences supérieures à 1 Hz
~~est~~ Ce qui implique que : $f_c \ll 1 \text{ Hz}$

On prend $f_c = 1 \cdot 10^{-1} \text{ Hz}$,



D'où : $\omega_c = 2\pi f_c = 2\pi \cdot 1 \cdot 10^{-1} \approx 6 \cdot 10^{-1} \text{ rad.s}^{-1}$

Ainsi, $\omega_c = \frac{1}{RC} \approx 6 \cdot 10^{-1} \text{ rad.s}^{-1}$

On choisit $R = 1000 \Omega$

d'où : $C = \frac{1}{R\omega_c} = \frac{1}{1 \cdot 10^3 \cdot 6 \cdot 10^{-1}} = \frac{1}{6 \cdot 10^2} \approx 1,67 \cdot 10^{-3}$

Ainsi, $C = 1,63 \cdot 10^{-3} \text{ F}$

4) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

- U_k les valeurs échantillonnées du signal
- U_{sh} les valeurs obtenues à la sortie du filtre.

Ainsi, on peut écrire la fonction de transfert opérationnelle

$$\frac{U_{sh}(p)}{U_k(p)} = \frac{H_0}{1 + \frac{p}{Q\omega_0} + \left(\frac{p}{\omega_0}\right)^2} \quad \Leftrightarrow U_{sh}(p)$$

$$\Leftrightarrow U_{sh}(p) + \frac{U_{sh}(p) \cdot p}{Q\omega_0} + U_{sh}(p) \cdot \left(\frac{p}{\omega_0}\right)^2 = H_0 U_k(p)$$

$$\Leftrightarrow U_{sh}(t) + \frac{1}{Q\omega_0} \frac{dU_{sh}}{dt} + \frac{1}{\omega_0^2} \frac{d^2 U_{sh}}{dt^2} = H_0 U_k(t) \quad \times \omega_0^2$$

d'où : $\frac{d^2 U_{sh}}{dt^2} = \omega_0^2 \left(H_0 U_k(t) - U_{sh}(t) - \frac{1}{\omega_0 Q} \frac{dU_{sh}}{dt} \right)$

Pour effectuer la méthode d'Euler, on définit :

def f(t, Y)

| return [Y[1], $\omega_0^2 (H_0 U_s - Y[0] - Y[1]) / (Q + \omega_0)$]

avec Y[0] correspondant à liste des U_{sk} et Y[1] la
liste des $\frac{dU_{sk}}{dt} \rightarrow \frac{U_s(k+1) - U_{sk}}{T_e}$.

Ainsi, on définit, en posant a priori les conditions
initiales t_0 et y_0 ainsi que le pas dt :

def Euler(f, Y0, t0, tf, dt):

| LT, t, LY = [t0], t0+dt, [Y0]

| mY = [0, 0]

| while t <= tf:

| | mY[0] = LY[-1][0] + f(LT[-1], LY[-1])[0] * dt

| | mY[1] = LY[-1][1] + f(LT[-1], LY[-1])[1] * dt

| | LY.append(mY[0], mY[1])

| | LT.append(t)

| | t = t + dt

| return (LT, LY)

en fait l'idée de la question consiste à
trouver la relation de récurrence pour
calculer U_{k+1} en fonction de U_{sk} et de
 $U_{s(k-1)}$

La fonction retournera la liste LY contenant les dérivées
premières et secondes de U_{sk} . $\frac{d^2 U_{sk}}{dt^2} = \frac{U_s(k+1) + U_s(k-1) - 2U_{sk}}{T_e^2}$

Q5) $F_c = 2,56 \text{ Hz}$

D'après le théorème de Shannon, pour ne pas avoir
le phénomène de repliement du spectre, il faut que :

$$f_{\max} \leq \frac{F_c}{2} = \frac{2,56}{2} = 1,28 \text{ Hz}$$

Ainsi, l'intervalle de fréquence qui convient est :

$$\underline{[0 \text{ Hz}, 1,28 \text{ Hz}]}$$