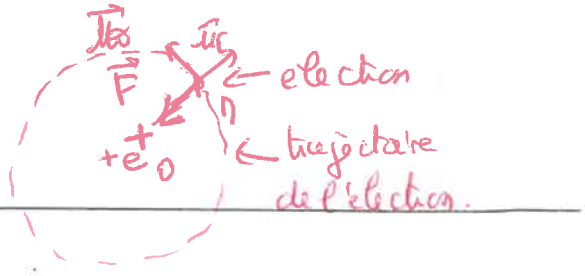
TD 10

AD1 Groupe 6

où est le schéma ?



a) Donner les charges de ces particules.

• Proton possède une charge électrique positive : $q_p = +e = 1{,}60 \cdot 10^{-19}\ C$ ✓

• Electron possède une charge électrique négative $q_e = -e = -1{,}60 \cdot 10^{-19}\ C$. ✓

Pour l'hydrogène $q_p + q_e = 0$. $(OM = a)$.

b) Par définition : $\vec{E}(M) = \dfrac{\vec{F}_{q(O)\to q(M)}}{q(M)} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \dfrac{q(O)}{a^2}\vec{u}$ (On suppose $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\ F.m^{-1}$)

$$\Rightarrow \|\vec{E}(M)\| = \frac{1 \cdot |q_e|}{4\pi\varepsilon_0 \cdot a^2} = \frac{1{,}60 \cdot 10^{-19}}{4\pi \cdot (53 \cdot 10^{-12})^2 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}} = 5{,}13 \cdot 10^{11}\ V.m^{-1}.$$

c) Dans un champ électrostatique : On a $\vec{F} = q \cdot \vec{E}$ ici $q_e = -e$.

$\Rightarrow \vec{F} = -e \cdot \vec{E}$

A représenter $\Rightarrow$ schéma OBLIGATOIRE

A.N : $\|\vec{F}\| = \|\vec{E}\| \cdot e = 1{,}60 \cdot 10^{-19} \cdot 5{,}13 \cdot 10^{11} = 8{,}21 \cdot 10^{-8}\ N$. ✓

d) Par définition. $\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r$ (ou $r = a$) $\quad \vec{v} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta$ or $r = a$ donc $= r\dot{\theta}\vec{u}_\theta$

Donc $\vec{a} = r\ddot{\theta}\vec{u}_\theta - r\dot{\theta}^2\vec{u}_r$.

On est dans un mouvement circulaire uniforme. $\ddot{\theta} = 0$

$\vec{a} = -r\dot{\theta}\vec{u}_r$ $(r = a)$ comme $\|\vec{v}\| = \dot{\theta} \cdot a$,

$\vec{a} = -\dfrac{v^2}{a}\vec{u}_r$ ✓

rappel

$$\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \frac{d\vec{u}_r}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}\,\vec{u}_\theta$$

$$\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = \frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = -\dot{\theta}\,\vec{u}_r$$

Système : électron de masse m_e.

Système des forces : $\sum \vec{F}_{ext} = m_e \cdot \vec{a}$

$\Rightarrow \vec{F} = m_e \cdot \vec{a} = -\dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\vec{u}_r$ Ainsi $v^2 = \dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 \cdot a \cdot m_e}$.

$\Rightarrow v = \sqrt{\dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 \cdot a \cdot m_e}}$ A.N : $v = \sqrt{\dfrac{(1{,}60 \cdot 10^{-19})^2}{4\pi \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 53 \cdot 10^{-12} \cdot 9{,}0 \cdot 10^{-31}}}$

$= 2{,}1 \cdot 10^6\ m.s^{-1}$ ✓

TD 10 : AD2, gap 8 : Champs et forces électrostatique



1) $\|\vec{E}(M)\| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \times \frac{Q'}{d^2}$ et $\|\vec{E}(M')\| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \times \frac{Q}{d^2}$

créé par Q' ; créé par Q

$$\Leftrightarrow \frac{E(M)}{E(M')} = \frac{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \times \frac{Q'}{d^2}}{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \times \frac{Q}{d^2}} = \frac{Q'}{Q} \Leftrightarrow \boxed{E(M) = E(M')\frac{Q'}{Q}}$$

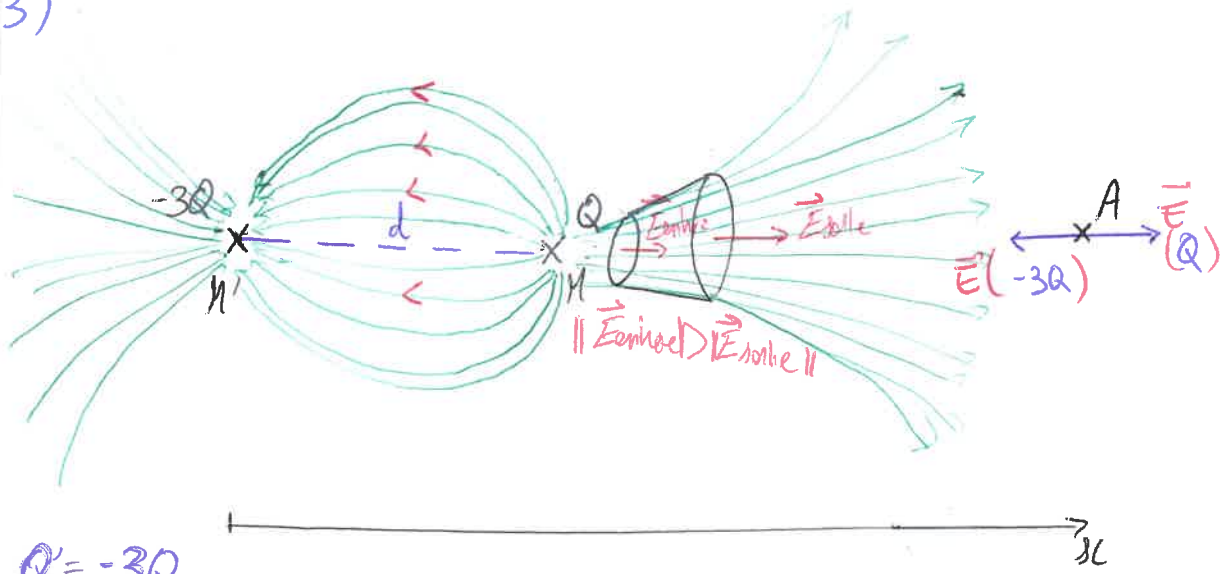
système ; système

2) $\vec{F}(Q) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q \times Q'}{d^2}\vec{u_z}$ et $\vec{F}(Q') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \times \frac{QQ'}{d^2}\vec{u_z}$

$$\Leftrightarrow \frac{\|\vec{F}(Q)\|}{\|\vec{F}(Q')\|} = \frac{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \times \frac{QQ'}{d^2}}{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \times \frac{QQ'}{d^2}} = 1 \text{ ,} /$$

Donc $\boxed{\|\vec{F}(Q)\| = \|\vec{F}(Q')\|}$ /

3)



$Q' = -3Q$

au point A, $\vec{E} = \vec{E_Q} + \vec{E_{Q'}} = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow 0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{Q}{(MA)^2} - \frac{3Q}{(M'A)^2}\right]$$

On pose, $M'A = x$, et $MA = x - d$ avec $x > 0$ et $x > d$.

$$\Leftrightarrow \frac{Q}{(x-d)^2} = \frac{3Q}{x^2} \Leftrightarrow (x-d)^2 = \frac{x^2}{3}$$

résolvez jusqu'au bout !

$$\Leftrightarrow (x-d) = \pm \boxed{\frac{x}{\sqrt{3}}}$$

$\begin{cases} \sqrt{3}x_1 - d\sqrt{3} = +x \\ \sqrt{3}x_2 - d\sqrt{3} = -x \end{cases}$

$\begin{cases} x_1 = \sqrt{3}d / \sqrt{3} - 1 \\ x_2 = \frac{d\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1} \end{cases}$

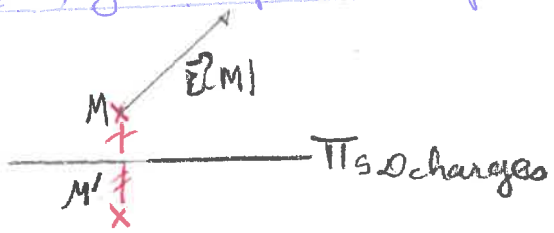
x_1 ne convient pas car $x_1 < d$

$\boxed{x_2 = 2{,}4\,d}$ → ok

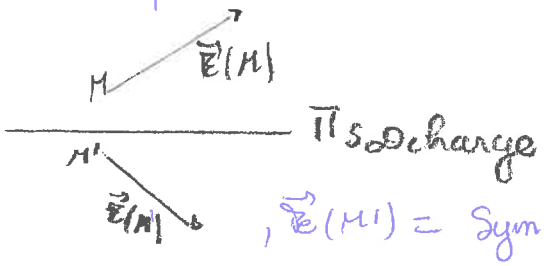
Groupe 4

TD 10 AD N°3

1) La position de M' symétrique de M par rapport au plan Π

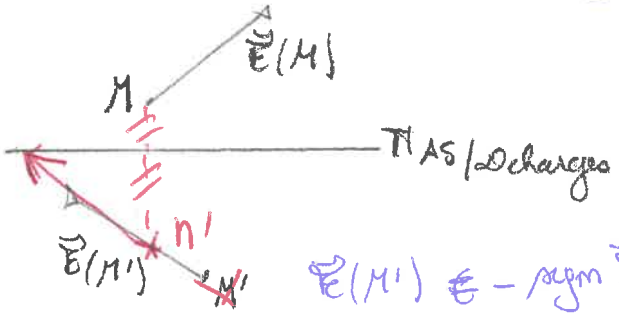


2) Le champ électrostatique en M' si Π est plans de symétrie des charges



, $\vec{E}(M') = \text{Sym}\ \vec{E}(M) / \Pi$ Sc Dcharges

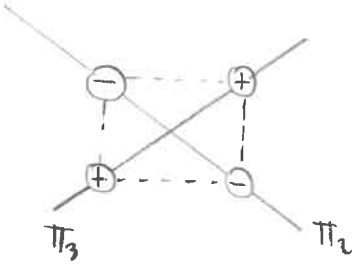
3) Le champ électrostatique en M'' si Π AS Dcharge



$\vec{E}(M') \in -\text{sym}\ \vec{E}(M) / \Pi$ AS Dcharges

Groupe 10

AD4



1) Les plans de symétrie des charges sont :

$\Pi_1(O, \vec{e_x}, \vec{e_y})$

et Π_2 et Π_3 tels que représentés sur le schéma.

$\Pi_2 (O, \vec{e_x} + \vec{e_y}, \vec{e_z})$

$\Pi_3 (O, \vec{e_x} + \vec{e_y}, \vec{e_z})$

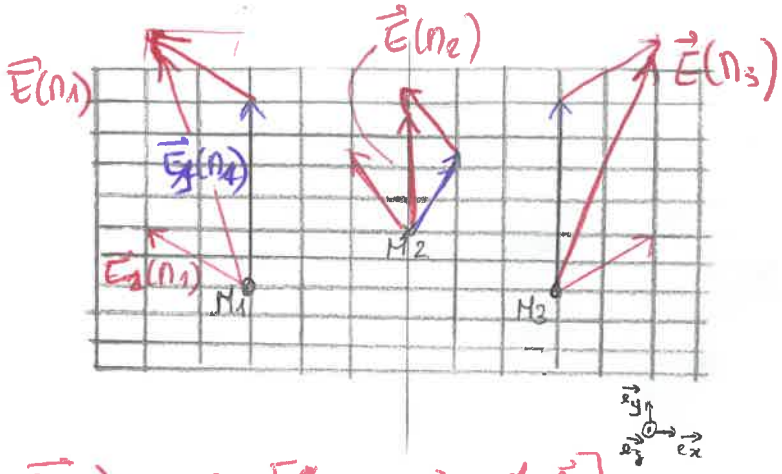
2) Les plans d'antisymétrie des charges sont :

$\Pi_4(O, \vec{e_y}, \vec{e_z})$

et $\Pi_5(O, \vec{e_x}, \vec{e_z})$

TD 10

ADS / Groupe 3



$\overrightarrow{OO_1} = -3\vec{e}_x \quad \overrightarrow{OO_2} = +3\vec{e}_x$

$\overrightarrow{O_1n_2} = \overrightarrow{On_2} - \overrightarrow{OO_1} = 8\vec{e}_y + 3\vec{e}_x$

$\overrightarrow{O_2n_2} = \overrightarrow{On_2} - \overrightarrow{OO_2} = 8\vec{e}_y - 3\vec{e}_x$

$$\vec{E}(n_1) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1}{(O_1n_1)^3}\overrightarrow{O_1n_1} + \frac{q_2\overrightarrow{O_2n_2}}{(O_2n_1)^3}\right) = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q_1}{(O_1n_1)^2}\vec{e}_y + \frac{q_2\vec{e}_x}{(O_2n_2)}\right]$$

q_1 O_1 $\times O$. q_2 O_2

a) $\vec{E}(M_1) = \vec{E}_1(M_1) + \vec{E}_2(M_1)$

$= 6\vec{e}_y + 2\vec{e}_y - 2\vec{e}_x$

$= -2\vec{e}_x + 8\vec{e}_y$

Attention à l'homogénéité. Les champs ne sont pas homogènes à des distances...

b) $\vec{E}(M_2) = \vec{E}_1(M_2) + \vec{E}_2(M_2)$

$= 1\vec{e}_x + \frac{5}{2}\vec{e}_y - 1\vec{e}_x + \frac{5}{2}\vec{e}_y$

$= 5\vec{e}_y$

idem ...

c) $\vec{E}(M_3) = \vec{E}_1(M_3) + \vec{E}_2(M_3)$

$= 2\vec{e}_x + 8\vec{e}_y$

En considérant O tel que $OM_1 = OM_3$

et sachant que $O \in (M_2, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ (P)

$M_3 = \text{sym } M_1 / P$

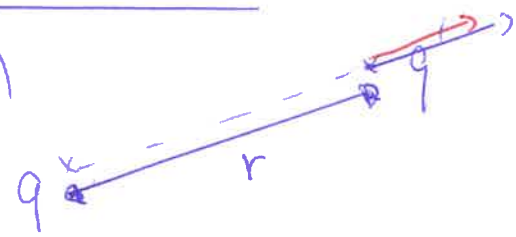
$\vec{E}(M_3) = \text{sym}(\vec{E}(M_1)) / P$ donc $\vec{E}(M_3) = 2\vec{e}_x + 8\vec{e}_y$ (b)

de plus $\vec{E}(M_2) = 5\vec{e}_y \in (M_2, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ (P) (c)

Gr 9

AD n°10

a) $\vec{F}$ si qq' de même signe



$$\vec{F}_{q \to q'} = \frac{1}{4\varepsilon_0 \pi} \cdot \frac{qq'}{r^2} \vec{u_r}$$

ici ε_0 est la permittivité du vide, $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \left(N^{-1} \cdot m^{-2} \right)$ $F \cdot m^{-1}$

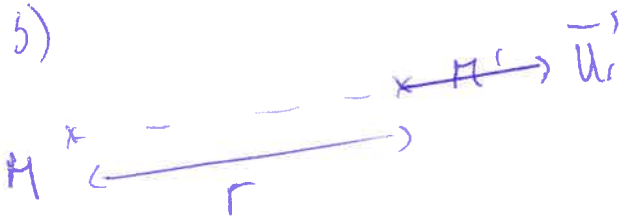
de plus on sait que dans un système supposé galiléen la seconde loi de Newton donne :

$$\sum \vec{f}_{ext} = m\vec{a}$$

On en déduit $N = Kg \cdot m \cdot s^{-2}$

Finalement, $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \left(Kg^{-1} \cdot s^2 \cdot m^{-3} \right)$ $F \cdot m^{-1}$

b)



$$\vec{F}_{M \to M'} = \frac{-G m m'}{r^2} \vec{u_r}$$

G est la constante d'interaction gravitationnelle.

G est en $N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$ c'est à dire en $Kg^{-1} \cdot s^{-2} \cdot m^{-1}$.

c)

Champ électrostatique $\vec{E}$	Champ gravitationnel $\vec{G}$
$\vec{F} = q\vec{E}$	$\vec{F} = m\vec{g}$
Force électrostatique	Force d'interaction gravitationnelle.
$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$	$-G$
$\frac{1}{\varepsilon_0}$ ⟷	$-G4\pi$.
q ⟷	m.

d) Thm de Gauss

Soit S une surface fermée et $\vec{E}$ un champ électrostatique.
Le flux de $\vec{E}$ à travers S est égale à la charge intérieur à la surface divisée par ε_0.

$$\Phi_S(\vec{E}) = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

e) Thm de Gauss Gravitationnel

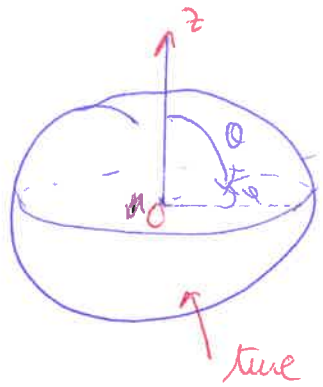
Soit S une surface fermée et $\vec{G}$ un champ gravitationnel.

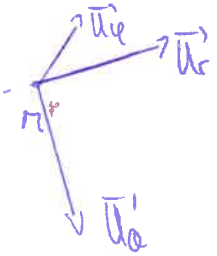
$$\Phi_S(\vec{G}) = -M_{int} \cdot 4\pi G.$$

M_{int} étant la masse intérieur de S. B

f)

g)





* les plans $\Pi_1(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ et $\Pi_2(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\varphi)$ sont des plans de symétrie des masse passant par M

donc $\vec{\mathcal{G}}(M) \in (\Pi_1 \cap \Pi_2)$

$\vec{\mathcal{G}}(M)$ est colinéaire à $\vec{u}_r$

$\vec{\mathcal{G}}(M) = \mathcal{G}(M)\vec{u}_r$ → les lignes de champ sont radiales

* la masse est invariante par rotation d'angles θ et φ

donc $\mathcal{G}(M)$ est indépendant de θ et φ

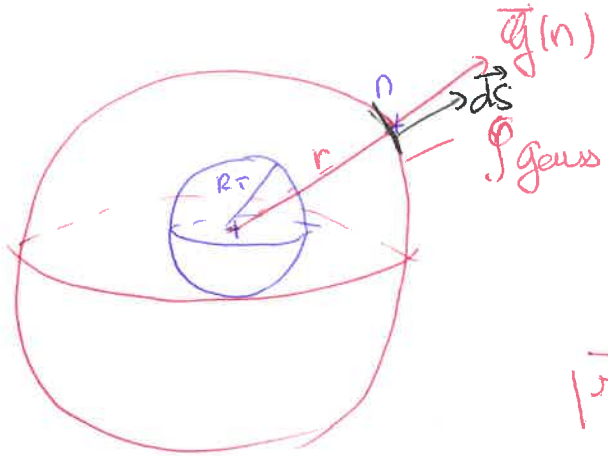
$$\mathcal{G}(M) = \mathcal{G}(r, \theta, \varphi) = \mathcal{G}(r)$$

$$\boxed{\vec{\mathcal{G}}(M) = \mathcal{G}(r)\vec{u}_r}$$

* on veut appliquer le Th. de Gauss. On choisit une surface fermée sphérique qui passe par M

$$\Phi(\vec{\mathcal{G}}(M)) \text{ à travers } S_{Gauss} = \oiint_{S_{Gauss}} \mathcal{G}(r)\vec{u}_r \cdot d\vec{S}\vec{u}_r$$

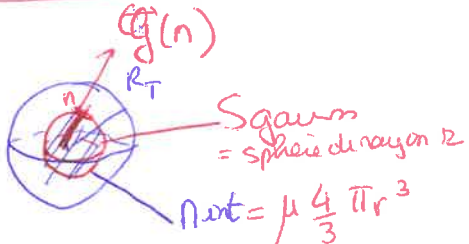
$$= \mathcal{G}(r) \times 4\pi r^2$$



* M int S_{Gauss}

ici $\boxed{r > R_T}$ donc $M_{int} = M_T$ masse de la terre

$\boxed{r < R_T}$



avec μ = masse volumique de la terre $= \dfrac{M_T}{\frac{4}{3}\pi R_T^3}$

$$\boxed{M_{int} = \frac{M_T r^3}{R_T^3} \quad r < R_T}$$

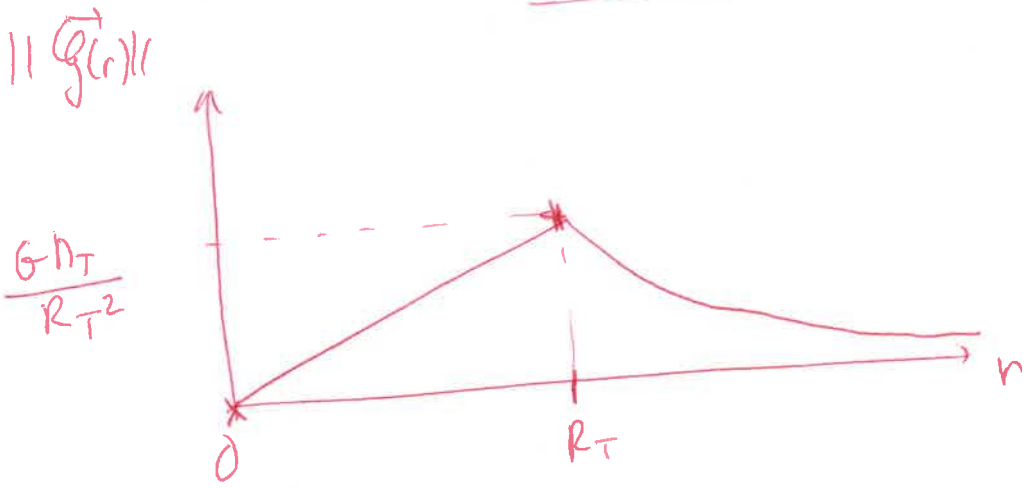
* Th de gauss $\Phi(\vec{g})$ à travers S fermée $= -4\pi G M_{int}$

$r > R_T$ $\quad 4\pi r^2 g(r) = -4\pi G M_T$

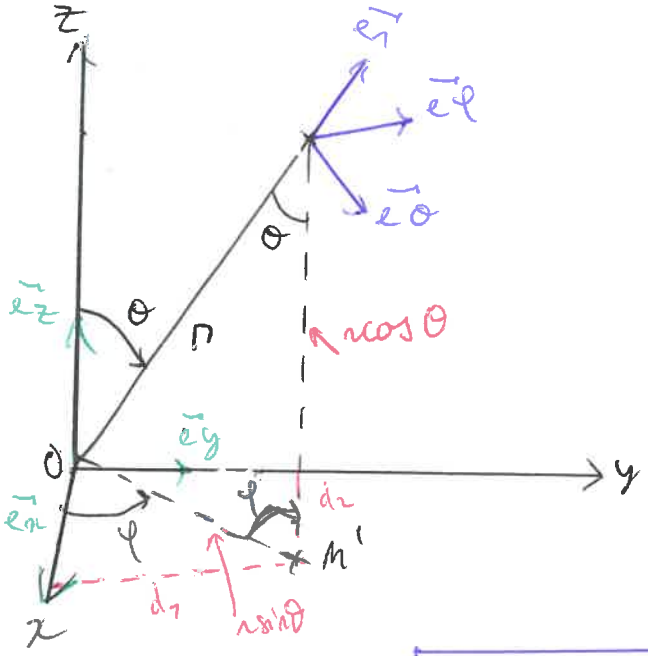
$$\vec{g}(r) = -\frac{G M_T}{r^2}\vec{u}_r$$

$r < R_T$ $\quad 4\pi r^2 g(r) = -4\pi G n_T \frac{r^3}{R_T^3}$

$$\vec{g}(r) = -\frac{G n_T r}{R_T^3}\vec{u}_r$$



Groupe n°8 : AD n°12



a/ $\sin\theta = \frac{\|\overrightarrow{OM'}\|}{r} \Leftrightarrow \boxed{\|\overrightarrow{OM'}\| = r\sin\theta}$ ✓

b/ $\sin\varphi = \frac{d_1}{\|\overrightarrow{OM'}\|} \Leftrightarrow d_1 = r\sin\theta\sin\varphi$

$\cos\varphi = \frac{d_2}{\|\overrightarrow{OM'}\|} \Leftrightarrow d_2 = r\sin\theta\cos\varphi$

$\boxed{\overrightarrow{OM'} = r\sin\theta\sin\varphi\,\vec{e_y} + r\sin\theta\cos\varphi\,\vec{e_x}}$ ✓

c/ $\cos\theta = \frac{\|\overrightarrow{M'M}\|}{r} \Leftrightarrow \overrightarrow{M'M} = r\cos\theta\,\vec{e_z}$

$\boxed{\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'} + \overrightarrow{M'M} = r\sin\theta\sin\varphi\,\vec{e_y} + r\sin\theta\cos\varphi\,\vec{e_x} + r\cos\theta\,\vec{e_z}}$ ✓

d/ $\boxed{\overrightarrow{OM} = r\,\vec{e_r}}$ ✓

e/ $\vec{e_z}\cdot\vec{e_r} = \cos\theta$

$\vec{e_z}\cdot\vec{e_\theta} = -\sin\theta$

$\vec{e_z}\cdot\vec{e_\varphi} = 0$

Ainsi $\boxed{\vec{e_z} = \cos\theta\,\vec{e_r} - \sin\theta\,\vec{e_\theta}}$ ✓

TD 10 AD 13

groupe 6.

---

a) $\overrightarrow{OM'} = r\cos\theta\,\vec{e}_x + r\sin\theta\,\vec{e}_y + 0\vec{e}_z = r\cos\theta\,\vec{e}_x + r\sin\theta\,\vec{e}_y$ /

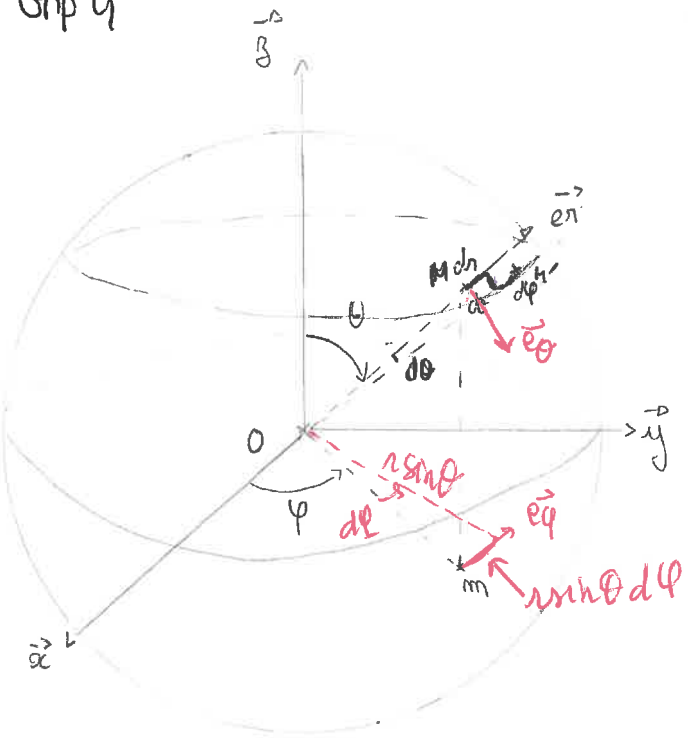
b) $\overrightarrow{OM'} = re_r + 0e_\theta + 0e_z = re_r$. /

c) $\overrightarrow{OM} = r\cos\theta\,\vec{e}_x + r\sin\theta\,\vec{e}_y + z\vec{e}_z$. /

d) $\overrightarrow{OM} = re_r + 0e_\theta + ze_z = re_r + ze_z$. /

il faut refaire le schéma, ne serait-ce que pour s'entraîner.

TD 10 bis AD14 Grp 4



Q1 Pour une sphère chargée pour déterminer $\vec{E}(M)$, on considère les coordonnées sphériques : (r,θ,φ)

$r \in [0,R]$, $\theta \in [0,\pi]$, $\varphi \in [0,2\pi]$

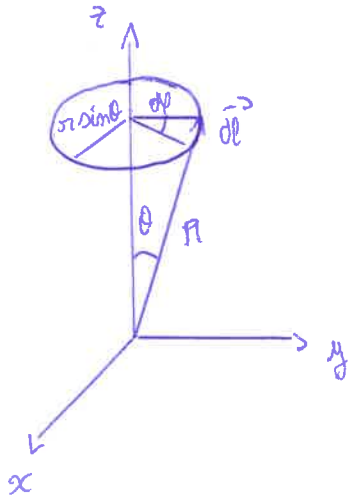
$\vec{OM} = r\vec{e_r}$

Q2 $\vec{dM} = \vec{MM'} = dr\,\vec{e_r} + r\,d\theta\,\vec{e_\theta} + r\sin\theta\,d\varphi\,\vec{e_\varphi}$

Q3 Lorsqu'on se déplace sur $\vec{e_r}$: $\vec{dr} = dr\,\vec{e_r}$

sur $\vec{e_\theta}$: $d\vec{\theta} = r\,d\theta\,\vec{e_\theta} \simeq r\,d\theta$ (angle très petit)

sur $\vec{e_\varphi}$: $d\vec{l} = d\varphi\, r\sin\theta\,\vec{e_\varphi}$



On en déduit que

$dV = dr\, r\,d\theta \sin\theta\, d\varphi\, r$

$= r^2 dr \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$

Q4) Pour les surfaces élémentaires, on a seulement un déplacement $d\vec{M} = r d\theta \vec{e_\theta} + d\varphi \vec{e_\varphi} r \sin\varphi$

$$\boxed{\vec{dS} = r d\theta \, r \sin\theta \, d\varphi \, \vec{u_r}}$$

$$\iint dS = r^2 \int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = r^2 \left([-\cos\theta]_0^{\pi} [\varphi]_0^{2\pi} \right)$$

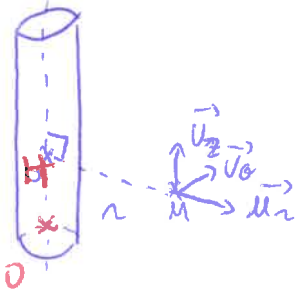
$$= r^2 (1-(-1)) 2\pi = 4\pi r^2$$

= Surface d'1 sphère de rayon r.

Groupe 2 : AD 1 & 5 TD 10

distribution

1) On utilise les coordonnées cylindriques pour étudier des fils ou cylindre /



et $\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r + z\vec{u}_z$

$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HM}$

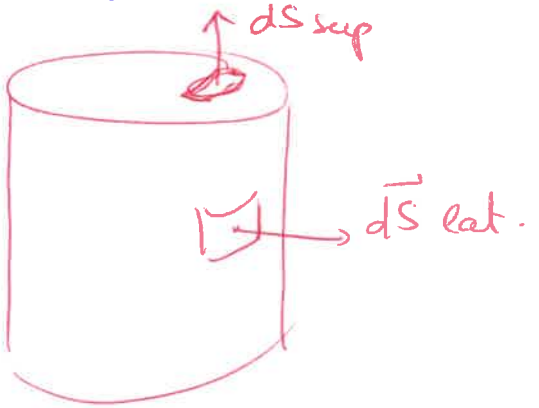
2) $\overrightarrow{dM} = r\,d\theta\,\vec{u}_\theta + dr\,\vec{u}_r + dz\,\vec{u}_z$ /

3) $dz = r\,d\theta \times dr \times dz$ /

4) dS_{sup} et dS_{lat} sont les surfaces élémentaires radiale et axiale

et $\overrightarrow{dS_{sup}} = r\,d\theta\,dr\,\vec{u}_z$ /

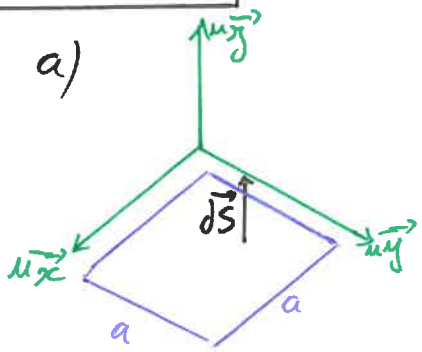
$\overrightarrow{dS_{lat}} = r\,d\theta\,dz\,\vec{u}_r$ //



TD 10 bis
AD n° 16

Groupe 11

a)



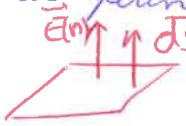
• Un carré est une surface ouverte car la surface ne contient pas de volume ✓

$\vec{E}(n) = E_x \vec{u_x} + E_y \vec{u_y}$

• $\Phi_{S_{carré}}(\vec{E}) = \iint_{S_{carré}} (E_x \vec{u_x} + E_y \vec{u_y}) \cdot dS \vec{u_z}$ car $\vec{E}(M) \in (O, \vec{u_x}, \vec{u_y})$

$= 0$ car $\vec{u_x}$ et $\vec{u_z}$ sont perpendiculaires de même pour $\vec{u_y}, \vec{u_z}$ ✓

• Si $\vec{E}(M)$ est perpendiculaire au plan $(O, \vec{u_x}, \vec{u_y})$



$\vec{E}(M) = E(M) \vec{u_z}$

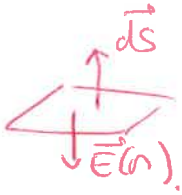
Si $E(M) > 0$:

$\Phi_{S_{carré}}(\vec{E}) = \iint_{S_{carré}} E(M) \vec{u_z} \cdot \vec{u_z} dS_{carré} = E(M) \iint_{S_{carré}} dS_{carré}$ car $\vec{E}(M)$ est uniforme

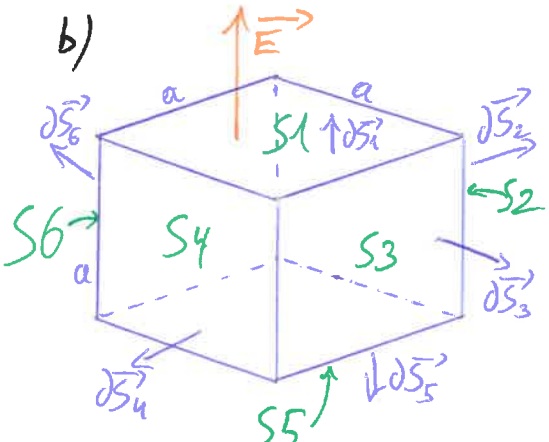
$= E(M) S_{carré} = \boxed{E a^2 = \Phi_{S_{carré}}(\vec{E})}$ ✓

Si $E(M) < 0$:

$\Phi_{S_{carré}}(E) = -\iint_{S_{carré}} E(M) S_{carré} = -E S_{carré} = \boxed{-E a^2 = \Phi_{S_{carré}}(\vec{E})}$ ✓



b)



• Le cube est une surface fermée, mais il est composé de 6 faces qui sont des surfaces ouvertes

• $\Phi_{S_{cube}}(\vec{E}) = \Phi_{S_1}(\vec{E}) + \Phi_{S_2}(\vec{E}) + \Phi_{S_3}(\vec{E}) + \Phi_{S_4}(\vec{E}) + \Phi_{S_5}(\vec{E}) + \Phi_{S_6}(\vec{E})$

Donc $\Phi_{S_{cube}}(\vec{E}) = \iint_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{S_1} + \iint_{S_2} \vec{E} d\vec{S_2} + \iint_{S_3} \vec{E} d\vec{S_3} + \iint_{S_4} \vec{E} d\vec{S_4} + \iint_{S_5} \vec{E} d\vec{S_5} + \iint_{S_6} \vec{E} d\vec{S_6}$

$= \iint_{S_1} E_x dS_1 + 0 + \iint_{S_5} -E dS_5$ car $\vec{E}$ est perpendiculaire à dS_2, dS_3, dS_4 et dS_6

$= E_x S_1 - E_x S_5$ car $\vec{E}$ est uniforme sur S_1 et S_5

$\boxed{\Phi_{S_{cube}}(E) = 0}$ car $S_1 = S_5$

TB

TD10

Grp 10

TB

AD17 :

- $\left[\operatorname{div}\left(3x^2\vec{u_x} + 2ay\vec{u_y} - 2bz\vec{u_z}\right) = \frac{\partial 3x^2}{dx} + \frac{\partial 2ay}{\partial y} + \frac{\partial(-2b)z}{\partial z}\right.$
$\left. = 6x + 2a - 2b\right]$

- $\left[\operatorname{div}\left(2xy\vec{u_x} + 8a^2e^{z/2b}\vec{u_y} - 6b^2\vec{u_z}\right) = \frac{\partial(2xy)}{dx} + \frac{\partial\left(8a^2e^{z/2b}\right)}{dy} - \frac{\partial 6b^2}{dz}\right.$
$\left. = 2y\right]$

- $\left[\operatorname{div}\left(8x^2y\vec{u_x} + \frac{6x^4}{y}\vec{u_y}\right) = \frac{\partial 8x^2y}{dx} + \frac{\partial}{dy}\frac{6x^4}{y}\right.$
$\left. = 16xy - \frac{6x^4}{y^2}\right]$

- $\left[\operatorname{div}\left(x\vec{u_z} + z\vec{u_x}\right) = \frac{\partial x}{dz} + \frac{\partial z}{dx} = 0\right]$