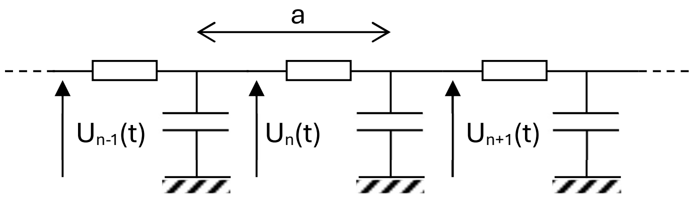
ETUDE D'UN PHENOMENE DE DIFFUSION

On se propose dans ce travail de modéliser à l'aide d'une chaine de cellules RC le comportement d'un milieu diffusif continu.

1. Préparation

On considère une chaîne constituée d'un grand nombre N de cellules RC identiques de taille a.



La loi des nœuds permet de montrer que les tensions U_{n-1}, U_n et U_{n+1} sont liées par l'équation :

$$RC\frac{dU_n}{dt} = U_{n-1}(t) + U_{n+1}(t) - 2U_n(t)$$

On considère une fonction C^2 u(x,t) telle que u(x = na,t) = U_n(t).

En considérant que a est petite devant l'échelle des variations spatiales de u(x,t) (modèle continu), on montre que u(x,t) vérifie l'équation :

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \; avec\; D = \frac{a^2}{RC}$$

Q1. Quel type d'équation reconnaissez-vous ? Quelle est l'unité de D ?

Q2. On se place en régime stationnaire (indépendant du temps) ; quelle est la forme de u(x) ?

Q3. On se place en régime permanent sinusoidal ; on admet que la solution de cette équation s'écrit :

$$u(x,t) = U_0 exp\left(-\frac{x}{\delta}\right) cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right) avec\; \delta = \sqrt{\frac{2D}{\omega}} et\; U_0 = U(0,0)$$

Remarque : x = na = $n\sqrt{DRC}$ d'où x/ $\delta = n\frac{\sqrt{DRC}}{\sqrt{\frac{2D}{\omega}}} = n\sqrt{\frac{RC\omega}{2}}$

soit (dans la limite N (nombre de cellules) $\rightarrow\infty$) :

$$u_n(t) = U_0 exp\left(-n\sqrt{\frac{RC\omega}{2}}\right) cos\left(\omega t - n\sqrt{\frac{RC\omega}{2}}\right)$$

Quelle est l'amplitude de u_n(x) ? Quel nom donner à δ ? A quelle condition portant sur δ et a le modèle continu peut-il modéliser correctement le système ?
Montrer que cette condition est équivalente à $RC\omega \ll 1$.

2. Matériel

Vous disposez : d'une chaine de 40 cellules RC avec R = 1 kΩ et C = 100 nF ; de multimètres, d'un oscilloscope et d'un ordinateur avec LatisPro.

3. Manipulations en régime stationnaire

Mesurer la valeur de a et donner l'incertitude de la mesure (on expliquera la mesure).

Court-circuiter à l'aide d'un fil le dernier condensateur de la chaine.

Alimenter la chaine à l'aide d'une tension constante U_0 = 10 V.

Mesurer à l'aide d'un multimètre les tensions U_n pour dix cellules bien choisies.

Quelle est l'incertitude-type sur chaque mesure (regarder la notice du voltmètre) ?

Tracer la courbe U_n =f(n) et valider la courbe obtenue.

4. Manipulations en régime permanent sinusoidal

Le dernier condensateur n'est plus court-circuité.

4.1. Etude de l'amplitude

Alimenter la chaine à l'aide d'un GBF délivrant une tension sinusoidale de fréquence f = 100 Hz et d'amplitude U_0 = 10 V.

Montrer que la fréquence f choisie permet d'utiliser le modèle continu, et vérifier que cette fréquence appartient à la bande passante des multimètres.

Mesurer à l'aide d'un voltmètre électronique les amplitudes efficaces de la tension aux bornes des 20 premiers condensateurs.

Quelle est l'incertitude-type sur chaque mesure (regarder la notice du voltmètre) ?

Tracer la courbe donnant l'amplitude U_n en fonction de x en faisant apparaître l'incertitude–type sur chaque mesure ; commenter son allure et la vérifier en traçant la droite appropriée (on utilisera des coordonnées semi-logarithmiques).

Mesurer δ et son incertitude grâce à une modélisation ; comparer à la valeur théorique.

4.2. Mesure du déphasage

Mesurer le déphasage φ pour dix cellules bien choisies.

Tracer la courbe φ en fonction de n et en déduire une nouvelle valeur de δ.

5. Manipulations en régime indiciel

Le dernier condensateur n'est plus court-circuité.

Appliquer une tension $u_0(t)$ de forme créneau symétrique, d'amplitude E_0 = 10V et de fréquence f = 2 Hz à la chaîne.

Observer la réponse $u_{10}(t)$, et la reproduire sur votre compte-rendu.

Mesurer la durée t_0 pour laquelle cette tension s'annule, l'origine des temps étant prise au début de l'échelon.

Cette durée dépend-elle de la condition au limite en bout de chaine ?

Reprendre cette mesure pour dix cellules bien choisies, et tracer la courbe t_0 = f(n).

On cherche à modéliser cette courbe par le modèle :

$$u_n(t) = E_0\left(1 - 2\mathrm{erf}\left(\frac{n}{2}\sqrt{\frac{RC}{t}}\right)\right)$$

où erf(x) est la fonction erreur, telle que erf(0,48) = 1/2 .

Quelle forme de t_0 ce modèle prévoit-il ? Dans quel domaine de n ce modèle peut-il s'appliquer ?