PAQUETS D'ONDES

6.2.2. Paquet d'ondes	
Superposition de deux ondes de fréquences proches dans un milieu non absorbant et dispersif.	Déterminer la vitesse de groupe. Associer la vitesse de groupe à la propagation de l'enveloppe du paquet d'ondes. Capacité numérique : à l'aide d'un langage de programmation, simuler la propagation d'un paquet d'ondes dans un milieu dispersif et visualiser le phénomène d'étalement.
Domaine spectral d'un paquet d'onde de durée finie.	Énoncer et exploiter la relation entre les ordres de grandeur de la durée temporelle d'un paquet d'onde et la largeur fréquentielle de son spectre.

1. Rappels : vitesse de phase, dispersion, absorption

1.1. Forme générale d'une onde

On considère une onde de forme complexe :

$$\underline{s}(x,t) = s_0 \cdot expj(\omega t - \underline{k}(\omega)x)$$

dont la relation de dispersion s'écrit :

$$\underline{k}(\omega) = k'(\omega) + jk''(\omega) \text{ avec } k'(\omega) = Re(k) \text{ et } k''(\omega) = Im(k).$$

On a alors :

$$\underline{s}(x,t) = p_0 \cdot expj(\omega t - k'x) \cdot exp(k''x)$$

et

$$s(x,t) = Re\left(\underline{s}(x,t)\right) = s_0 \cdot cos(\omega t - k'x) \cdot exp(k''x)$$

Remarque : si l'onde se propage selon les x croissants ; on doit avoir :

k' > 0 et k'' < 0.

Déf : la vitesse de phase V_φ est la vitesse de propagation des plans d'onde : $v_\varphi = \frac{\omega}{k'}$

Si la vitesse de phase dépend de ω, on dit que le milieu est **dispersif**.

Le facteur exp(k"x) (avec k'' < 0) traduit un amortissement de l'onde ; on dit qu'il y a **absorption**.

1.2. Exemples

Onde plane dans le vide : $k = \frac{\omega}{c}$, où c est la célérité de la lumière dans le vide

Plasma : $\underline{k}^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$, où ω_p est la pulsation plasma.

Cable coaxial : $\underline{k}^2 = \Gamma\Lambda\omega^2 - j(r\Gamma + g\Lambda)\omega - rg$,
où r est la résistance, g la conductance, Γ la capacité et Λ l'inductance linéiques du cable.

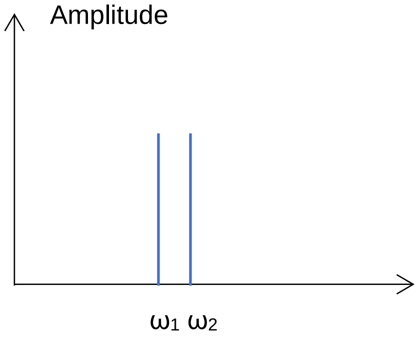
Conducteur ohmique : $\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - j\mu_0\gamma\omega$, où γ est la conductivité du conducteur ohmique.

2. Propagation d'un signal à deux composantes

Une onde monochromatique ne transporte aucune information ; on utilise en général des ondes comportant plusieurs composantes spectrales.

On considère un milieu :

- sans absorption : k est réel, supposé > 0 ;
- faiblement dispersif : v_φ dépend de ω.



2.1. Définition de l'onde

On considère la propagation d'une onde formée de deux composantes très proches dans un milieu dispersif caractérisé par une relation de dispersion k = f(ω) :

$$u_1(x,t) = A.\cos(\omega_1 t - k_1.x)$$
$$u_2(x,t) = A.\cos(\omega_2 t - k_2.x)$$

où $k_1 = k(\omega_1)$; $k_2 = k(\omega_2)$.

La vitesse de phase V_φ de chacune de ces ondes est :

$$v_{\varphi 1} = \frac{\omega_1}{k_1} \; ; \; v_{\varphi 2} = \frac{\omega_2}{k_2}$$

On pose

$$\omega_m = \frac{\omega_2 + \omega_1}{2} \; ; \; \Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$$
$$k_m = \frac{k_2 + k_1}{2} \; ; \; \Delta k = k_2 - k_1$$

On suppose

$$\Delta\omega \ll \omega_m \, ; \Delta k \ll k_m$$

On calcule

$$u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t)$$

2.2. Mise en œuvre numérique

Le script de base, à modifier, AnimationDeBase.py est disponible sur le répertoire de classe : il propage une simple sinusoïde de pulsation ω avec une relation de dispersion ω = k.c.

Lire le script pour identifier la partie « physique », puis l'éxécuter.

En modifiant le script de base, définir la somme des deux OPPHH $u_1(x,t)$ et $u_2(x,t)$ de même amplitude, de pulsations :

$$\omega_1 = 2\pi\,(0{,}2 - 0{,}002) \text{ et } \omega_2 = 2\pi\,(0{,}2 + 0{,}002)$$

Et de vecteurs d'ondes

$$k_1 = 2\pi\,(1{,}0 - 0{,}05) \text{ et } k_2 = 2\pi\,(1{,}0 + 0{,}05)$$

Propager cette onde et observer l'existence de deux vitesses.

2.3. Analyse de la simulation

On calcule

$$u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t) = 2.A.cos(\omega_m t - k_m.x).cos(\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta k}{2}x)$$

L'onde résultante a une vitesse de phase moyenne :

$$v_\varphi = \frac{\omega_m}{k_m}$$

L'enveloppe de l'onde résultante se propage à une vitesse :

$$v_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}$$

Les vitesses de phase et de groupe sont-elles identiques ?

Calculer avec les valeurs proposées la vitesse de phase moyenne V_φ et la vitesse de groupe V_g et vérifier que :

$$V_\varphi = 5\ V_g$$

Comment modifier les valeurs des pulsations pour réaliser :

$$V_\varphi = V_g\ ?$$

(un calcul peut être nécessaire)

Vérifier le résultat sur la simulation.

Est-il possible de réaliser :

$$V_\varphi < V_g\ ?$$

3. Paquet d'ondes : vitesse de groupe

3.1. Définition

On appelle paquet d'ondes (ou groupe d'ondes) une onde formée par un ensemble d'ondes sinusoïdales ayant un spectre de pulsations continu dans un domaine limité entourant une pulsation ω_0 et une densité spectrale d'amplitude $A(\omega)$.

Le paquet d'ondes s'écrit :

$$U(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(\omega).\exp j(\omega t - k(\omega).x)\,.\,d\omega$$

Remarque : en général, l'amplitude du paquet d'ondes n'est non nulle que dans un domaine restreint $[\omega_1,\omega_2]$ autour d'une pulsation centrale ω_0, avec $\omega_2-\omega_1 << \omega_0$.

Au voisinage de $k = k_0 = k(\omega_0)$, un développement de Taylor de ω à l'ordre 1 donne :

$$\omega = \omega_0 + (k-k_0).\left(\frac{d\omega}{dk}\right)_{k_0}$$

d'où :

$$U(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(\omega).d\omega.\exp j(\omega_0 t - k(\omega_0).x)\,.\exp j\left((k-k_0)\left[\left(\frac{d\omega}{dk}\right)_{k_0}.t - x\right]\right)$$

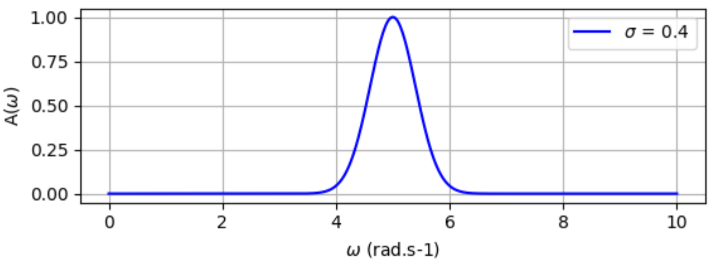
Définition : la vitesse de groupe est :

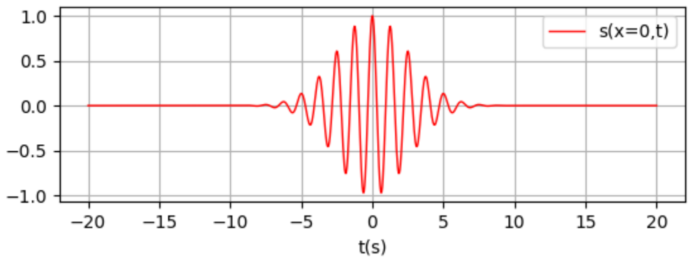
$$\boldsymbol{v_g = \frac{d\omega}{dk}}$$

Le paquet d'ondes se propage à la vitesse de groupe.

3.1. Extension temporelle d'un paquet d'ondes

Exemple : paquet d'onde gaussien : $A(\omega) = e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\omega-\omega_0}{\sigma}\right)^2}$





L' extension Δt est liée à la largeur spectrale $\Delta\omega$ par :

$$\boldsymbol{\Delta\omega\Delta t \approx 2\pi}$$

Remarque : de même, l'extension spatiale Δx est liée à sa largeur en vecteurs d'onde Δk par :

$$\boldsymbol{\Delta k\Delta x \approx 2\pi}$$

3.2. Propagation d'un paquet d'ondes gaussien

Un paquet d'ondes gaussien est tel que l'amplitude spectrale A(ω) est gaussienne (voir figure) :

$$A(\omega) = e^{-\frac{(\omega-\omega_0)^2}{2\sigma^2}}$$

σ est l'écart-type en pulsations, on montre qu'il est lié à la largeur à mi- hauteur $\Delta\omega$ par :

$$\Delta\omega\ = 2\sqrt{2\,ln(2)}\,\sigma \approx 2{,}36\,\sigma$$

Nous allons calculer la forme du paquet d'onde par une méthode de rectangles, entre les deux pulsations limites ω_1 et ω_2, en découpant l'intervalle de pulsations en N parties de largeur dω = $(\omega_2-\omega_1)/N$:

$$s(x,t) = \sum A(\omega)\cos(\omega t - k(\omega)x)\,d\omega$$

a) Propagation sans dispersion

Définir les grandeurs :
- omega0= $2\pi*5$ #pulsation centrale
- sigma =$2\pi*0.4$ #écart-type de la gaussienne
- omega1=$2\pi*3$
- omega2=$2\pi*7$
- N=1000 #nombre de rectangles
- d_omega=(omega2-omega1)/N

Définir une fonction A(ω) renvoyant la forme de l'amplitude spectrale.

Définir une vitesse de phase v_phi = 1.

Définir une fonction F(x,t) dans laquelle :
- On initialise la somme s(x,t) à s = 0
- On initie une boucle qui va itérer un indice i de 0 à N
- On définit la valeur de ω par $\omega = \omega_1 + i.d\omega$
- On définit la fonction k(ω).
- On ajoute à s le terme $A(\omega)\cos(\omega t - k(\omega)x)\,d\omega$

Cette fonction renvoie la valeur de s après sommation sur tout l'intervalle.

Modifier la fonction Animate(t) pour tracer la fonction F(x,t) de x = 0 à x = 40.

b) Propagation avec dispersion

On utilise la relation de dispersion du plasma :

$$k = \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_c^2}}{c}$$

Définir les constantes :
- C = 1
- $\omega_c = 2\pi*3$

Modifier la définition de k(ω) dans la boucle.